应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 05_0477_06

关于一阶剪切板的 Kûrmûn 型精化理论*

张建武, 李 奇, 束永平

(上海交通大学 机械工程学院, 上海 200030)

(沈惠申推荐)

摘要: 依据 Mindlin_Reissner 理论, 着重研究一阶剪切板的 Kûrmûn 型精化理论, 并推导出仅以挠度和应力函数为未知变量的广义 Kûrmûn 型大挠度方程, 适用于复合材料上复合构造剪切板的非线性分析• 在当前板的精化理论中, 消去的两个转角以隐含形式作用于板的整体变形• 这一工程理论适用于各种计及横向剪切复合材料板、正交各向异性中厚板和夹层板等的线性和非线性分析• 容易发现, 针对具体的工程应用, 由该方程可直接获得相应的退化形式, 并且与文献所载的一致•

关 键 词: 复合材料; 剪切板; Kûrmûn 方程
中图分类号: TU311.2 文献标识码: A

引 言

铺层复合材料在薄壁结构工程中的应用日益增多, 伴随而来的横向剪切效应使这类板壳结构非线性问题的分析变得异常复杂•

板的经典理论以 Kirchhoff 直法线假设为基础, 忽略板的横向剪切变形• 因此在薄板情况下, 用经典薄板大挠度 Kûrmûn 方程可获十分满意的工程问题的解• 但对于铺层复合材料板壳结构, 横向剪切、拉弯耦合和弯剪耦合效应对结构失稳破坏有时起着不可忽视的作用[1~5]• 为获得工程上精确和满意的预测结果, 有必要建立新工程理论来分析复合材料铺层板的非线性性态• 常见的板的精化理论包括一阶剪切板理论(FSDPT)[6~7]、高阶剪切板理论(HSDPT)[8~9]、剪切板分层理论(LSDPT)[10]以及三维弹性理论[11]等• 如果所关心的是剪切板的整体大挠度弯曲与后屈曲, 一阶剪切板理论就可以给出比较满意的结果• 就铺层剪切板而言, 一阶剪切板理论的精度与剪切修正系数的选择有关, 高阶剪切板理论精度较高, 但需处理至少四个未知变量, 即挠度、应力函数和两个转角• 尽管剪切板分层理论含有较多的未知变量, 计算繁杂, 但可用于研究层间应力问题, 仍有应用• 三维弹性理论作为校核其它各种理论正确性和精度的依据, 具有较高的理论价值•

一阶剪切板理论包含的未知变量包括挠度、应力函数和两个转角, 在求解一些工程问题时有进一步简化的必要• 为此, 本文基于 Reissner 中厚板[6] 和 Hoff 夹层板理论, 应用 Mindlin_Reissner 剪切约束消去两个转角, 推导出了铺层复合材料剪切板的广义大挠度 Kûrmûn 方程•

* 收稿日期: 1999_02_26; 修订日期: 1999_12_18
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59675027)
作者简介: 张建武(1954~), 男, 教授, 工学博士, 德国洪堡学者.

应用数学和力学,第 21 卷 第 5 期(2000 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 05_0459_09

Banach 空间非线性二阶微分积分方程初值问题的单调迭代方法*

陈芳启, 陈予恕

(天津大学 力学系, 天津 300072)

(我刊编委陈予恕来稿)

摘要: 利用单调迭代方法及 Mönch 不动点定理,研究了 Banach 空间中混合单调二阶微分积分方程初值问题的耦合最小最大拟解及解的存在性,给出了耦合最小最大拟解及解的存在定理·

关 键 词: 微分积分方程; Kuratowski 非紧性测度; 耦合下上拟解; 单调迭代方法
中图分类号: O177.91 文献标识码: A

引 言

在文[1]中,郭大钧建立了 Banach 空间中 Volterra 型一阶微分积分方程初值问题极值解的存在性定理· 本文我们讨论 Banach 空间 E 中二阶微分积分方程初值问题(IVP):

$$\left.\begin{aligned} &u'' = F(t, u, u, u', Tu) \qquad (\forall t \in J), \\ &u(0) = x_0,\ u'(0) = x_1, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

这里 $J = [0, d]\ (d > 0)$, $x_0, x_1 \in E$, $F \in C(J \times E \times E \times E \times E, E)$, 且

$$(Tx)(t) = \int_0^t k(t, s)x(s)\mathrm{d}s \qquad (\forall t \in J), \tag{2}$$

$k \in C(\Omega, R^+)$, $\Omega = \{(t, s): 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant d\}$· 由于 F 中含有导数项 u', 故[1～2]中使用的方法在这里不适用· 本文应用单调迭代方法及 Mönch 不动点定理建立了 IVP(1) 的若干耦合最小最大拟解及解的存在定理·

设 P 是 Banach 空间 E 中的锥,这样 P 在 E 中诱导了半序: $x \leqslant y$ 当且仅当 $y - x \in P$· 我们说锥 P 是正规的, 若存在一个正数 N_1 使得: $\theta \leqslant x \leqslant y$ 蕴含 $\|x\| \leqslant N_1\|y\|$, 这里 θ 是 E 中零元素; 称锥 P 是正则的, 若 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots \leqslant y$ 蕴含: 存在 $x \in E$, 满足: $\|x_n - x\| \to 0$(当 $n \to \infty$), 有关锥的详细理论可参见[3]·

1 预备知识

在文中, α 表示 Kuratowski 非紧性测度, $\|\cdot\|_C$ 表示空间 $C(J, E)$ 的上确界范数, 对 $D \subset C(J, E)$, 记 $D(t) = \{x(t): x \in D\} \subset E\ (t \in J)$·

* 收稿日期: 1999_01_23; 修订日期: 1999_10_18
基金项目: 国家自然科学基金资助(19672043), 国家教委博士点专项基金资助
作者简介: 陈芳启(1963～), 博士, 现从事博士后工作, 已发表论文 30 余篇.

在该方程中首次发现因材料方向性而引起的弯_剪耦合效应• 本文就当前的一阶剪切板的Kûrmûn型精化理论作了详细讨论,给出广义大挠度Kûrmûn方程的推导细节,以及导出相应的各种退化形式•

1 基本公式和广义 Kûrmûn 方程的推导

根据三维弹性理论,板的面力与横向力平衡方程可表示如下

$$\left.\begin{aligned}&N_{X,X}+N_{XY,Y}=0,\\&N_{XY,X}+N_{Y,Y}=0,\\&Q_{X,X}+Q_{Y,Y}=-(q+N_XW_{,XX}+2N_{XY}W_{,XY}+N_YW_{,YY}),\\&M_{X,X}+M_{XY,Y}=Q_X,\\&M_{XY,X}+M_{Y,Y}=Q_Y,\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

其中 薄膜力分量 $\boldsymbol{N}=(N_X,N_Y,N_{XY})^{\mathrm T}$、弯矩分量 $\boldsymbol{M}=(M_X,M_Y,M_{XY})^{\mathrm T}$、横向剪切力分量 $\boldsymbol{Q}=(Q_X,Q_Y)^{\mathrm T}$、以及 W 和 q 分别为附加挠度和板表面分布载荷•

对任意铺层复合材料的板,一般本构关系可表示成部分逆形式如下

$$\begin{pmatrix}\varepsilon\\ \boldsymbol{M}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{B}^*\\ -\boldsymbol{B}^{*\mathrm T} & \boldsymbol{D}^*\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}\\ \kappa\end{pmatrix},\tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{D}^*=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{B}^*=-\boldsymbol{A}^{-1}$,而 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 分别为 3×3 矩阵,包含铺层板薄膜刚度、拉弯耦合系数和弯曲刚度• $\varepsilon=(\varepsilon_X,\varepsilon_Y,\varepsilon_{XY})^{\mathrm T}$ 和 $\kappa=(\kappa_X,\kappa_Y,\kappa_{XY})^{\mathrm T}$ 则分别为薄膜应变和弯曲曲率分量•

剪切板中面几何约束仍采用形式比较简单的 Kûrmûn 大挠度应变_位移关系式

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_X=U_{,X}+W_{,X}^2/2,\\&\varepsilon_Y=U_{,Y}+W_{,Y}^2/2,\\&\gamma_{XY}=V_{,X}+U_{,Y}+W_{,X}W_{,Y}\bullet\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

同时考虑铺层板横向剪切效应的影响,式(2)中曲率有如下形式

$$(\kappa)=\begin{pmatrix}\kappa_X\\ \kappa_Y\\ \kappa_{XY}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-W_{,XX}+\gamma_{XZ,X}\\ -W_{,YY}+\gamma_{YZ,Y}\\ -2W_{,XY}+\gamma_{XZ,Y}+\gamma_{YZ,X}\end{pmatrix}\bullet\tag{4}$$

应当注意式(4)中 $\gamma_{XZ}=S_X^{-1}Q_X$, $\gamma_{YZ}=S_Y^{-1}Q_Y$,而 $S_X=k^2hG_{XZ}$ 和 $S_Y=k^2hG_{YZ}$ 分别为横向剪切刚度• 显然,对各向同性板来说,在 Reissner 理论中剪切修正系数 $k^2=5/6$,而在 Mindlin 理论中剪切修正系数 $k^2=\pi^2/12$•

引入应力函数 ϕ,并使其满足如下关系

$$N_X=\phi_{,YY},\quad N_Y=\phi_{,XX},\quad N_{XY}=-\phi_{,XY},\tag{5}$$

利用式(5)方程(1)的前两个面内平衡方程自动满足• 将式(2)和(4)代入式(1)的后三个方程,经消去弯矩分量横向平衡方程可表成如下

$$\frac{\partial Q_X}{\partial X}+\frac{\partial Q_Y}{\partial Y}=-L_1^*(W)-L_2^*(\phi)+L_3^*(\phi)+\left(\frac{D_{11}^*}{S_X}\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{D_{22}^*}{S_Y}\frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right)\left(\frac{\partial Q_X}{\partial X}+\frac{\partial Q_Y}{\partial Y}\right)+$$
$$D_\rho^2\left[\left(\frac{1}{S_Y}\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{1}{S_X}\frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right)\frac{\partial^4W}{\partial X^2\partial Y^2}+\frac{1}{S_XS_Y}\frac{\partial^4}{\partial X^2\partial Y^2}\left(\frac{\partial Q_X}{\partial X}+\frac{\partial Q_Y}{\partial Y}\right)\right]-$$

$$\frac{D_{66}^*}{S_X S_Y} L_1^* \left(\frac{\partial Q_X}{\partial X} + \frac{\partial Q_Y}{\partial Y}\right) - L_F'(\Phi) + D_{66}^* L_Q(Q_X, Q_Y), \tag{6}$$

式中 弹性系数和微分算子定义如下

$$D_\rho^2 = D_{11}^* D_{22}^* - (D_{12}^* + 2D_{66}^*)^2,$$

$$L_1^*(\ \ ) = D_{11}^*(\ \ )_{,XXXX} + 2(D_{12}^* + 2D_{66}^*)(\ \ )_{,XXYY} + D_{22}^*(\ \ )_{,YYYY},$$

$$L_2^*(\ \ ) = B_{21}^*(\ \ )_{,XXXX} + (B_{11}^* + B_{22}^*)(\ \ )_{,XXYY} + B_{12}^*(\ \ )_{,YYYY},$$

$$L_3^*(\ \ ) = (B_{61}^* - 2B_{26}^*)(\ \ )_{,XXXY} + (B_{62}^* - 2B_{16}^*)(\ \ )_{,XYYY},$$

$$\begin{aligned} L_Q(Q_X, Q_Y) = {} & \frac{1}{S_X S_Y}\left[D_{11}^* \frac{\partial^4}{\partial X^4}\left(\frac{\partial Q_X}{\partial X}\right) + (D_{12}^* + 2D_{66}^*) \frac{\partial^4}{\partial X^2 \partial Y^2}\left(\frac{\partial Q_X}{\partial X} + \frac{\partial Q_Y}{\partial Y}\right) + \right. \\ & \left. D_{22}^* \frac{\partial^4}{\partial Y^4}\left(\frac{\partial Q_Y}{\partial Y}\right)\right] + \frac{1}{S_X^2}\left[D_{11}^* \frac{\partial 4}{\partial X^2 \partial Y^2}\left(\frac{\partial Q_X}{\partial X}\right) + (D_{12}^* + 2D_{66}^*) \frac{\partial^4}{\partial Y^4}\left(\frac{\partial Q_X}{\partial X}\right)\right] + \\ & \frac{1}{S_Y^2}\left[(D_{12}^* + 2D_{66}^*) \frac{\partial^4}{\partial X^4}\left(\frac{\partial Q_Y}{\partial Y}\right) + D_{22}^* \frac{\partial^4}{\partial X^2 \partial Y^2}\left(\frac{\partial Q_Y}{\partial Y}\right)\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_F'(\ \ ) = {} & (J_1 B_{11}^* + J_1 B_{12}^*)(\ \ )_{,XXYYYY} + (J_1 B_{21}^* + J_2 B_{22}^*)(\ \ )_{,XXXXYY} + \\ & J_1 B_{16}^*(\ \ )_{,XYYYYY} + J_2 B_{26}^*(\ \ )_{,XXXXXY} - [J_1(B_{61}^* - B_{26}^*) + \\ & J_2(B_{62}^* - B_{16}^*)](\ \ )_{,XXXYYY}, \end{aligned}$$

$$J_1 = \frac{D_{12}^* + 2D_{66}^*}{S_X} - \frac{D_{22}^*}{S_Y},\quad J_2 = \frac{D_{12}^* + 2D_{66}^*}{S_Y} - \frac{D_{11}^*}{S_X}.$$

另一方面,注意到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{S_X} \frac{\partial^2}{\partial Y^2}\left(\frac{\partial Q_X}{\partial X} + \frac{\partial Q_Y}{\partial Y}\right) + \frac{1}{S_Y} \frac{\partial^2}{\partial X^2}\left(\frac{\partial Q_X}{\partial X} + \frac{\partial Q_Y}{\partial Y}\right) = \\ & \quad - \left(\frac{1}{S_X} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{1}{S_Y} \frac{\partial^2}{\partial X^2}\right) L_1^*(W) + L_Q(Q_X, Q_Y) - L_F(\Phi), \end{aligned} \tag{7}$$

式中

$$\begin{aligned} L_F(\ \ ) = {} & \left(\frac{B_{11}^* + B_{22}^*}{S_X} + \frac{B_{12}^*}{S_Y}\right)(\ \ )_{,XXYYYY}\left(\frac{B_{21}^*}{S_X} + \frac{B_{11}^* + B_{22}^*}{S_Y}\right)(\ \ )_{,XXXXYY} - \\ & \left(\frac{B_{61}^* - 2B_{26}^*}{S_X} + \frac{B_{62}^* - 2B_{16}^*}{S_Y}\right)(\ \ )_{,XXXYYY} - \frac{B_{62}^* - 2B_{16}^*}{S_X}(\ \ )_{,XYYYYY} + \\ & \frac{B_{12}^*}{S_X}(\ \ )_{,YYYYYY} - \frac{B_{61}^* - 2B_{26}^*}{S_Y}(\ \ )_{,XXXXXY} + \frac{B_{21}^*}{S_Y}(\ \ )_{,XXXXXX}. \end{aligned}$$

式(7)可改写成如下形式

$$L_Q(Q_X, Q_Y) = \left(\frac{1}{S_X} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{1}{S_Y} \frac{\partial^2}{\partial X^2}\right)\left[L_1^*(W) + \left(\frac{\partial Q_X}{\partial X} + \frac{\partial Q_Y}{\partial Y}\right)\right] - L_F(\Phi). \tag{8}$$

进一步将式(8)和方程(1)中的第三式代入式(6)得如下形式方程

$$\begin{aligned} & G_1^* L_1^*(W) + L_2^*(\Phi) - L_3^*(\Phi) + L_4^*(\Phi) - L_5^*(\Phi) - G_2^* W_{,XXYY} = \\ & \quad G_3^*[q + L^*(W, \Phi)], \end{aligned} \tag{9}$$

式中的微分算子分别定义如下

$$G_1^* = 1 - \frac{D_{66}^*}{S_X} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} - \frac{D_{66}^*}{S_Y} \frac{\partial^2}{\partial X^2},$$

$$G_2^* = D_\rho^2\left(\frac{1}{S_Y} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{1}{S_X} \frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right),$$

$$G_3^* = 1 - \left(\frac{D_{11}^*}{S_X} + \frac{D_{66}^*}{S_Y}\right)\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \left(\frac{D_{22}^*}{S_Y} + \frac{D_{66}^*}{S_X}\right)\frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{D_\rho^2}{S_X S_Y}\frac{\partial^4}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{D_{66}^*}{S_X S_Y} L_1^*,$$

$$L^*(\ ,\ ) = (\ )_{,XX}(\ )_{,YY} + 2(\ )_{,XY}(\ )_{,XY} + (\ )_{,YY}(\ )_{,XX},$$

$$L_4^*(\ ) = \left[\frac{1}{S_X}(D_{12}^* B_{16}^* + D_{66}^* B_{62}^*) - \frac{1}{S_Y} D_{22}^* B_{16}^*\right](\ )_{,XYYYY} + \left[\frac{1}{S_X}(D_{12}^* B_{26}^* - D_{12}^* B_{61}^* - D_{66}^* B_{61}^* + D_{11}^* B_{62}^* - D_{11}^* B_{16}^*) - \frac{1}{S_Y}(D_{22}^* B_{61}^* - D_{22}^* B_{26}^* - D_{12}^* B_{62}^* + D_{12}^* B_{16}^* - D_{66}^* B_{62}^*)\right](\ )_{,XYYYY} + \left[\frac{1}{S_y}(D_{12}^* B_{26}^* + D_{66}^* B_{61}^*) - \frac{1}{S_x} D_{11}^* B_{26}^*\right](\ )_{,XYYYY},$$

$$L_5^*(\ ) = \frac{D_{66}^* B_{21}^*}{S_Y}(\ )_{XXXXXX} - \left[\frac{1}{S_X}(D_{12}^* B_{21}^* + D_{66}^* B_{21}^* - D_{11}^* B_{22}^*) + \frac{1}{S_Y}(D_{12}^* B_{22}^* - D_{22}^* B_{21}^* + D_{66}^* B_{22}^* - D_{66}^* B_{11}^*)\right](\ )_{,XXXXYY} - \left[\frac{1}{S_X}(D_{12}^* B_{11}^* + D_{66}^* B_{11}^* - D_{11}^* B_{12}^* - D_{66}^* B_{22}^*) - \frac{1}{S_Y}(D_{12}^* B_{12}^* - D_{22}^* B_{11}^* + D_{66}^* B_{12}^*)\right](\ )_{,XXYYYY} + \frac{D_{66}^* B_{12}^*}{S_X}(\ )_{,YYYYYY}.$$

对任意铺层复合材料板, 控制变形协调的方程可方便地表出如下

$$L_7^*(\Phi) - L_2^*(W) + L_3^*(W) = -\frac{1}{2}L^*(W, W) + G_4^*[q + L^*(W, \Phi)], \tag{10}$$

式中微分算子分别定义为

$$L_7^*(\ ) = A_{22}^*(\ )_{,XXXX} + (2A_{12}^* + A_{66}^*)(\ )_{,XXYY} + A_{11}^*(\ )_{,YYYY},$$

$$G_4^* = \frac{B_{21}^*}{S_X}\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{B_{12}^*}{S_Y}\frac{\partial^2}{\partial Y^2}.$$

显然, 式(9)和(10)构成计及横向剪切变形复合材料铺层板的广义 Kûrmûn 大挠度方程. 容易看出, 受横向剪切变形的影响, 算子 G_1^*、G_2^*、G_3^* 和 G_4^* 都含有因材料指向性而引起的弯_剪耦合因子, 而算子 L_2^*、L_3^*、L_4^* 和 L_5^* 则包含非平衡铺层板中存在的拉_弯耦合效应. 为简化起见, 方程(9)中的 L_4^* 和 L_5^* 两项可以忽略, 因为 L_4^* 和 L_5^* 中的拉_弯耦合效应是比 L_2^* 和 L_3^* 中的更高阶的小量. 因此, 方程(9)简化为如下形式

$$G_1^* L_1^*(W) + L_2^*(\Phi) - L_3^*(\Phi) - G_2^* W_{,XXYY} = G_3^*[q + L^*(W, \Phi)]. \tag{11}$$

方程(11)和(10)构成的广义 Kûrmûn 大挠度方程不仅具有更高普遍形式, 而且为研究复合材料或复合构造剪切板的大挠度弯曲问题或非线性稳定性问题提供了有效的工程理论模型.

2 关于几个特例的讨论

式(11)和(10)给出的广义 Kûrmûn 大挠度方程适用于正交异性中厚板和夹层板、计及横向剪切变形任意铺层复合材料板和密加筋复合构造板等, 如作适当简化可导出文献所载的各种特殊形式的 Kûrmûn 型方程.

根据反对称斜交铺层方式, 式(2)中拉弯耦合矩阵中部分系数为零, 即

$$B_{12}^* = B_{21}^* = B_{11}^* = B_{22}^* = 0,$$

因此 $L_2^* = 0$, $G_4^* = 0$, 方程(11)和(10)退化为如下 Kûrmûn 型方程

$$G_1^* L_1^* (W) - L_3^* (\Phi) - G_2^2 W_{,XXYY} = G_3^* [q + L^* (W, \Phi)], \tag{12}$$

$$L_7^* (\Phi) + J_3^* (W) = -\frac{1}{2} L^* (W, W)• \tag{13}$$

运用式(12)和(13)作者研究了双向压缩四边简支反对称斜交铺层矩形板的屈曲与后屈曲,并构造出后屈曲平衡路径的渐近摄动解•

根据反对称正交铺层方式,式(2)中拉弯耦合矩阵中的另一部分系数为零,即

$$B_{16}^* = B_{61}^* = B_{62}^* = B_{26}^* = 0,$$

因此 $L_3^* = 0$, 方程(11)和(10)退化为如下Kûrmûn型方程

$$G_1^* L_1^* (W) + L_2^* (\Phi) - G_2^* W_{,XXYY} = G_3^* [q + L^* (W, \Phi)], \tag{14}$$

$$L_7^* (\Phi) - L_2^* (W) = -\frac{1}{2} L^* (W, W) + G_4^* [q + L^* (W, \Phi)]• \tag{15}$$

构造方程(14)和(15)的解析结构的解相当困难,目前能见到的是用直接法得到的近似解•

当铺层数足够地多或对称铺层方式有 $B_{ij}^* = 0 (i, j = 1, 2, 6)$, 方程(11)和(10)退化为控制各向异性中厚板和对称铺层剪切板大挠度的广义Kûrmûn方程

$$G_1^* L_1^* (W) - G_2^* W_{,XXYY} = G_3^* [q + L^* (W, \Phi)], \tag{16}$$

$$L_7^* (\Phi) = -\frac{1}{2} L^* (W, W)• \tag{17}$$

文献[4]、[5]研究了方程(16)和(17)并运用位移型摄动构造了夹层板和复合材料板的后屈曲的渐进展开式•

在正交异性薄板情况下,横向剪切刚度 $S_X \to \infty$, $S_Y \to \infty$, 方程(16)和(17)进一步退化为如下形式

$$L_1^* (W) + L_2(\Phi) - L_3(\Phi) = q + L^* (W, \Phi), \tag{18}$$

$$L_7^* (\Phi) - L_2(W) + L_3(N) = -\frac{1}{2} L^* (W, W)• \tag{19}$$

再进一步,如果忽略上述方程中的拉弯耦合项,方程可退化为

$$L_1^* (W) = q + L^* (W, \Phi), \tag{20}$$

$$L_7^* (\Phi) = -\frac{1}{2} L^* (W, W)• \tag{21}$$

应用方程(18)和(19),文献[1],[2]构造了双向压缩正交异性薄板后屈曲的渐近摄动解•

广义Kûrmûn大挠度方程(11)和(10)还可退化为中后板的Kûrmûn_Reissner方程和复杂夹层构造板的Kûrmûn_Alwan方程[12]• 文献[5]采用Kûrmûn_Reissner方程和摄动法研究了中厚板屈曲与后屈曲问题,所获结果的精度与Reddy的高阶剪切板理论相当•

3 结 束 语

本文导出了计及横向剪切变形任意铺层复合材料板的广义Kûrmûn大挠度方程• 由于此方程仅以挠度和应力函数为未知量,使复合材料和复合构造板的非线性分析变得极为便利• 广义Kûrmûn大挠度方程以及导出几种典型方程形成一种Kûrmûn一阶剪切板的精化理论• 这一新型精化理论适用于:1)反对称斜交铺层剪切板;2)反对称正交铺层剪切板;3)对称铺层剪切板和正交异性剪切板;4)正交异性薄板和反对称铺层薄板以及5)各向同性中厚板和夹层板等• 已有的研究与应用表明,这些方程都与文献中现有的方程是一致的• 本文给出的Kûrmûn型一阶剪板精化理论具有更广泛的工程应用前景•

[参 考 文 献]

[1] Zhang J W. A simplified perturbation solution to the large deflection Karman equations of orthotropic composite plates in axial compression and lateral pressure[J]. Ingenieur_Archiv(Arch Appl Mech), 1991, **61**(3): 174~182.

[2] Zhang J W, Shen H S. Postbuckling of orthotropic rectangular plates in biaxial compression[J]. ASCE J Engng Mech, 1991, **117**(5): 1158~1170.

[3] 张建武. 复合构造剪切板的屈曲与后屈曲性态研究[J]. 力学学报, 1994, **26**(2): 176~182.

[4] 张建武, 林忠钦. 复合材料剪切板的后屈曲及其 Karman 型精化理论[J]. 上海交通大学学报, 1994, **28**(4): 115~120.

[5] 沈惠申. 中厚板的弹性屈曲和后屈曲[J]. 应用数学和力学, 1990, **11**(4): 341~350.

[6] Reissner E. On the theory of bending of elastic plates[J]. J Math Phys, 1944, **23**: 184~191.

[7] Mindlin R D. Influence of rotatory inertia and shear on fluctuat motions of isotropic elastic plates[J]. ASME J Appl Mech, 1951, **18**: 31~38.

[8] Reddy J N. A simple higher_order theory for laminated composite plates[J]. J Appl Mech, 1984, **51**: 745~752.

[9] Reddy J N, Phan N D. Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher_order shear deformation theory[J]. J Sound Vibration, 1985, **98**: 157~170.

[10] Kyoung Woo_Min, Kim Chun_Gon. Delamination buckling and growth of composite laminated plates with transverse shear deformation[J]. Journal of Compostie Materials, 1995, **29**(15): 2047~2068.

[11] Bogdanovich A E, Deepak B P. Three_dimensional analysis of thick composite plates with multiple layers[J]. Composites Part B, Engineering, 1997, **28**B(4): 345~357.

[12] Alwan A M. Large deflection of sandwich plates with orthotropic core[J]. AIAA J, 1964, **2**(2): 1820~1822.

On the Refined First_Order Shear Deformation Plate Theory of Kûrmûn Type

Zhang Jianwu, Li Qi, Shu Yongping

(College of Mechanics and Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P R China)

Abstract: A new refined first_order shear_deformation plate theory of the Karman type is presented for engineering applications and a new version of the generalized Karman large deflection equations with deflection and stress functions as two unknown variables is formulated for nonlinear analysis of shear_deformable plates of composite material and construction, based on the Mindlin/Reissner theory. In this refined plate theory two rotations that are constrained out in the formulation are imposed upon overall displacements of the plates in an implicit role. Linear and nonlinear investigations may be made by the engineering theory to a class of shear_deformation plates such as moderately thick composite plates, orthotropic sandwich plates, densely stiffened plates, and laminated shear_deformable plates. Reduced forms of the generalized Karman equations are derived consequently, which are found identical to those existing in the literature.

Key words: composite; shear deformation plates; Kûrmûn equations