

文章编号: 1000-0887(2000) 05-0483-05

复频域卷积的离散算法^{*}

蔡坤宝¹, 杨瑞芳², 俞集辉¹

(1. 重庆大学 电气工程系, 重庆 400044; 2. 重庆大学 生物工程中心, 重庆 400044)

(张汝清推荐)

摘要: 导出了适用于计算机进行计算的复频域卷积的离散算法, 应用 Durbin 拉氏变换数值反演法对复频域卷积结果进行数值反演, 可获得时域数值解。将该数值解与解析解进行比较表明, 数值解具有较高的精度。

关键词: 复频域; 卷积; 拉氏变换; 数值反演

中图分类号: O177.6; O174.5 **文献标识码:** A

引 言

众所周知, 两个存在拉氏变换的时间函数的乘积的拉氏变换, 是这两个函数的拉氏变换的复频域卷积。对于具有解析表达式的两个复频域解析函数的卷积, 通常采用留数法进行计算, 此时必须求出其中一个函数的所有的极点。在工程计算中, 由于问题的复杂性, 往往难以用解析法求出复频域卷积的解析函数。甚至, 在复频域中给出的是拉氏变换的离散形式。显然, 研究用计算机实现复频域卷积的算法是十分有意义的。

1 复频域卷积的离散算法

现依据复频域卷积定理导出适合计算机进行计算的复频域卷积的离散算法。

1.1 复频域卷积定理

若已知因果信号 $f(t)$ 和 $g(t)$, 且

$$\left. \begin{aligned} L[f(t)] &= F(s), \quad \operatorname{Re}[s] > \sigma_f, \\ L[g(t)] &= G(s), \quad \operatorname{Re}[s] > \sigma_g. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

则

$$F_w(s) = L[f(x)g(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(z)G(s-z)dz \quad (2)$$

注意到, 积分是沿着 z 复平面上平行于虚轴的直线 c 进行的, 且必须满足

$$\sigma = \operatorname{Re}[s] > \sigma_f + \sigma_g, \quad \sigma_f < c < \sigma - \sigma_g, \quad (3)$$

即 $F(z)$ 的所有极点必须位于直线 c 的左侧, 而 $G(s-z)$ 的所有极点必须位于直线 c 的右侧。

* 收稿日期: 1998_05_08; 修订日期: 2000_01_20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(39470147); 国家教委留学回国人员科研基金资助项目(教委留(1994)666)

作者简介: 蔡坤宝(1950-), 男, 博士, 副教授。

这就是所谓的复频域卷积定理^[1]。

1.2 离散算法

令 $z = c + j\omega'$ 并代入式(2), 则有

$$F_w(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(c + j\omega') G(s - (c + j\omega')) d\omega' \quad (4)$$

令式(4)中的 $\omega' = 2\pi n/T$, 则可得

$$F_w(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(c + j2\pi n/T) G(s - (c + j2\pi n/T)) \quad (5)$$

将式(5)中的 s 离散化, 即令

$$s_k = a + jk2\pi/T \quad (a = 2c), \quad (6)$$

则

$$F_w(s_k) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(c + j2\pi n/T) G(c + j2\pi(k-n)/T) \quad (7)$$

在误差允许的范围內

$$F_w(s_k) \approx \frac{1}{T} \sum_{n=-M+1}^{M-1} F(n) G(k-n) = \frac{1}{T} F(k) * G(k), \quad (8)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} F(k) &= F(c + j2\pi k/T) \\ G(k) &= G(c + j2\pi k/T) \end{aligned} \right\} (k = -M+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, M-1) \quad (9)$$

式(8)表达的线性卷积可借助于循环卷积以FFT快速算法实现之。同时应当注意到, 一般情况下, 复频域卷积的结果无论是否继续参加复频域的其它运算, 其最终的结果还是要返回时域的, 故以上诸式中的三个参数 T , a 和 M 应当参照 Durbin 拉氏变换数值反演法^[2] 给出的收敛准则加以选择。尤其是, M 的选择应当满足在给定的误差范围内 $|F_w(s_M)|$ 已可忽略不计。若式(8)的卷积结果将继续参加复频域运算, 则 $F_w(s_k)$ 宜取 $k = -M+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, M-1$ 这 $2M-1$ 点离散值。反之, 若式(8)的卷积结果直接用以数值反演, 则 $F_w(s_k)$ 宜取 $k = 0, 1, \dots, M-1$ 这 M 点的离散值。

2 数值拉氏反变换算法

本文采用 Durbin 算法将离散卷积结果 $F_w(s_k)$ 变换为欲得的时域解。

2.1 计算方法

已知 $F_w(s_k)$ 欲得

$$f_w(t_l) = f_w(l\Delta t), \quad t_l = l\Delta t = lT/N \quad (l = 0, 1, \dots, N-1), \quad (10)$$

其中 T 是 $f_w(t)$ 从 $t = 0$ 开始的时间长度, 则基本计算公式为

$$f_w(t_l) = \frac{2\exp[at_l]}{T} \left[-\frac{1}{2} \operatorname{Re}\{F_w(a)\} + \operatorname{Re}\left\{ \sum_{k=0}^{\text{NSUM}-1} F_w(s_k) \left[\cos kl \frac{2\pi}{N} + j \sin kl \frac{2\pi}{N} \right] \right\} \right], \quad (11)$$

其中 NSUM 为正整数并与 M 相等。

式(11)的快速算法为

$$f_w(t_l) = C(l) \cdot \left[-\frac{1}{2} \operatorname{Re}\{F_w(a)\} + \operatorname{Re}\left\{ \sum_{k=0}^{N-1} [A(k) + jB(k)] W^{lk} \right\} \right] =$$

$$C(l) \cdot \left[-\frac{1}{2} \operatorname{Re}\{F_w(a)\} + N \cdot \operatorname{Re}\{IFFT[A(k) + jB(k)]\} \right], \quad (12)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} C(l) &= \frac{2}{T} \cdot \exp(ati) \quad (l = 0, 1, \dots, N-1), \\ W^{lk} &= \exp\left[j \frac{2\pi}{N} lk\right], \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} A(k) &= \sum_{l=0}^{L-1} \operatorname{Re}\left\{ F_w\left[a + j(k + lN) \frac{2\pi}{T} \right] \right\}, \\ B(k) &= \sum_{l=0}^{L-1} \operatorname{Im}\left\{ F_w\left[a + j(k + lN) \frac{2\pi}{T} \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (N \cdot L = \text{NSUM}) \cdot \quad (14)$$

2.2 参数选择

需要选择的参数有: NSUM , a 和 T 。选择的基本原则是: 给定欲求时间函数的时间长度 T ; a 必须大于零; NSUM 足够大, 以确保在满足误差要求的条件下, $F_w(s_k)$ 的复幅值频谱已达可以忽略的程度。三者受如下收敛条件所约束

$$\max \left[\left| \operatorname{Re}\left\{ F_w\left[a + j\text{NSUM} \frac{2\pi}{T} \right] \right\} \right|, \left| \operatorname{Im}\left\{ F_w\left[a + j\text{NSUM} \frac{2\pi}{T} \right] \right\} \right| \right] \leq \frac{\varepsilon}{\exp(aT)}, \quad (15)$$

$$\varepsilon = 10^{-10} \sim 10^{-6}.$$

通常选 $aT = 5 \sim 10$; $\text{NSUM} = 50 \sim 5000$, 这三个参数在求离散卷积时应当作出选择。

3 算例

本文给出如下三个算例。

1) 两因果信号的拉氏变换分别为 $F(s) = 2/s^3$ 和 $G(s) = 1/s^2$, 现应用本文导出的复频域离散卷积算法进行计算, 再将卷积结果作数值反演, 并与时域解析解作比较。取参数 $T = 10\text{s}$, $N = 100$, $aT = 20$, $c = a/2$, $\text{NSUM} = 5000$ 。时域数值解和解析解一并打印于图 1(a), 其中虚线代表数值解, 实线代表解析解。数值解偏离解析解的误差曲线示于图 1(b)。采用文献 [3] 给出的方差评估指标 (variance accounted for) 对曲线拟合状况评估如下:

$$VAF = 100 \cdot [1 - \text{ss}(\text{error}) / \text{ss}(\text{digital solution})] = 100\%$$

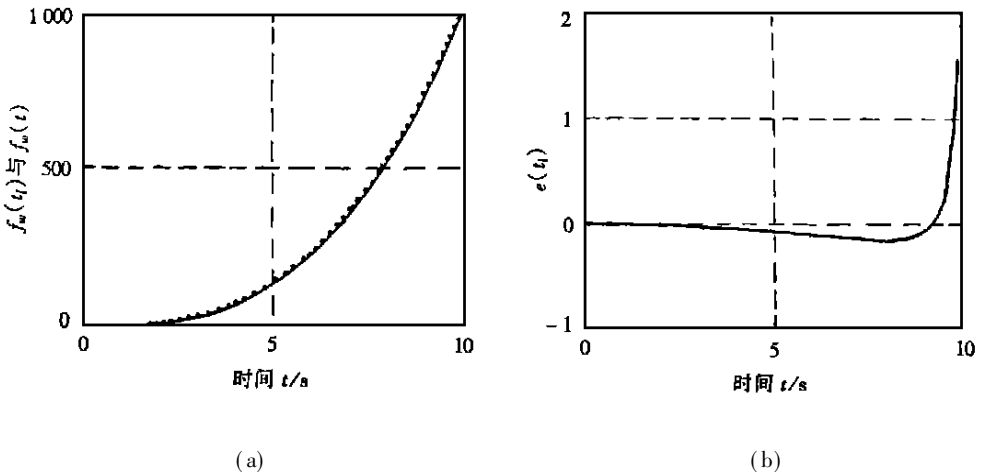


图 1

其中 ss 代表取平方和。此即表示, 上述两曲线几乎完全重合。

2) 两因果信号的拉氏变换为 $F(s) = 2\pi/[s^2 + 2(\pi)^2]$, $G(s) = \exp(-2s)/s$, 取参数 $T = 4s$, $aT = 10$, $c = a/2$, $N = 100$, $NSUM = 5000$ 。类似于图 1 的曲线示于图 2。且 $VAF = 99.9\%$ 。

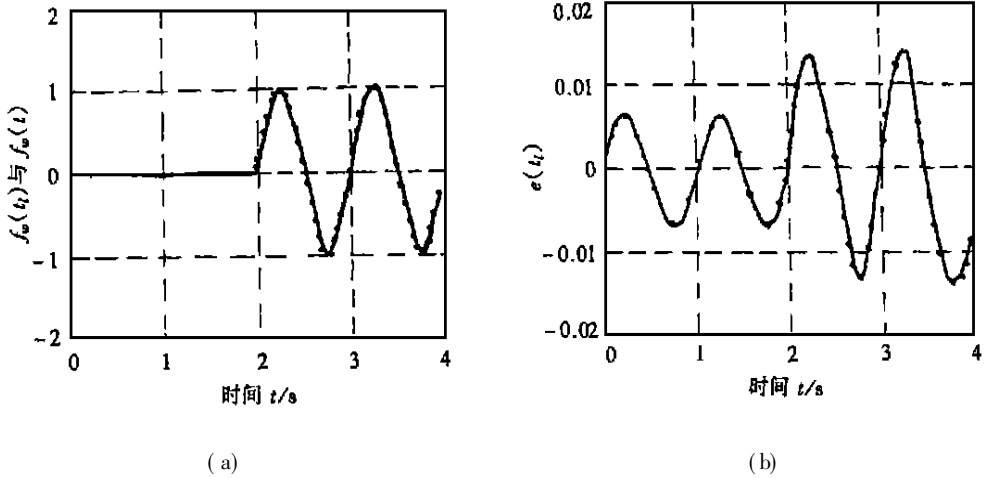


图 2

3) 时域反齿函数 $f(t) = (1 - 200t)u(t)$ 的拉氏变换为 $F(s) = (s - 200)/s^2$, $G(s) = 2000\pi/[s^2 + (2000\pi)^2]$ 。取参数 $T = 0.005s$, $aT = 10$, $c = a/2$, $N = 100$, $NSUM = 20000$ 。类似的曲线示于图 3。且 $VAF = 99.9\%$ 。

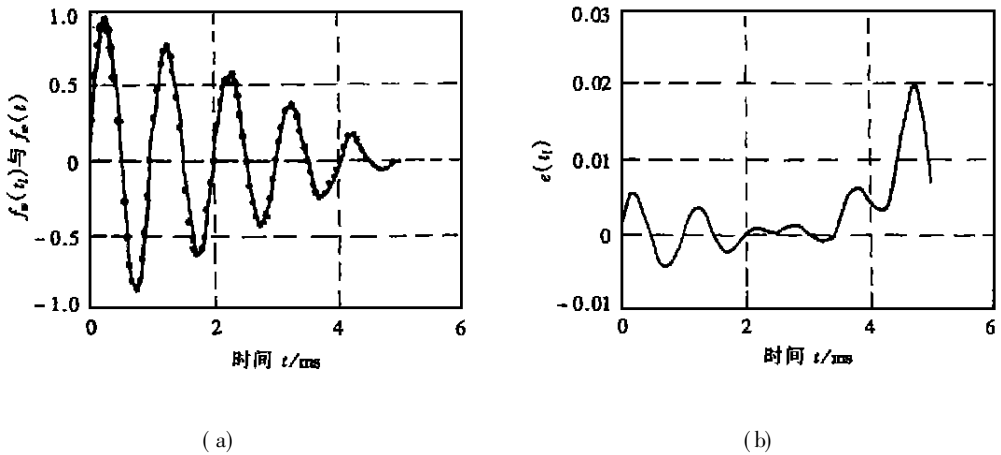


图 3

4 结 论

综上所述, 本文导出的复频域离散卷积算法易于实现, 精度较高, 具有理论和工程实践应用价值。

[参 考 文 献]

- [1] 奇利安 P.M. 信号、系统与计算机[M]. 北京: 人民邮电出版社, 1981.
- [2] Durbin F. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's methods[J]. The Computer Journal, 1974, 17(4): 371~ 376.
- [4] Jones L.A. Influence of the mechanical properties of a manipulandum on human operator dynamics [J]. Biol Cybern, 1990, 62: 299~ 307.

A Discrete Algorithm for Complex Frequency_Domain Convolutions

Cai Kunbao¹, Yang Ruifang², Yu Jihui¹

(1. College of Electrical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, P R China;

2. Biological Engineering Center, Chongqing University, Chongqing 400044, P R China)

Abstract: A discrete algorithm suitable for the computation of complex frequency_domain convolution on computers was derived. The Durbin's numerical inversion of Laplace transforms can be used to figure out the time_domain digital solution of the result of complex frequency_domain convolutions. Compared with the digital solutions and corresponding analytical solutions, it is shown that the digital solutions have high precision.

Key words: complex frequency_domain; convolution; Laplace transforms; numerical inversion