文章编号:1000-0887(2000)04-0353-04

五阶各向同性 Descartes 张量*

阎大桂，　徐　军，　严尚安，　付诗禄

(后勤工程学院 数学教研室,重庆 400016)

(钱伟长,陈正汉推荐)

摘要： 研究了五阶各向同性张量的存在性及其一般表示问题,得出了五阶各向同性 Descartes 张量的一般表达式.

关　键　词： Descartes 张量；　各向同性张量；　存在定理；　表示定理；　结构定理

中图分类号： O183　　　**文献标识码：** A

在文献[1]、[2]中讨论了0～4阶各向同性张量的存在性及其一般表达式,对于 $k\geqslant 5$ 阶的张量(仿射正交张量或 Descartes 张量),由于其分量的个数(3^k)十分巨大,结构非常复杂,因此还没有文献讨论这类问题．笔者对五阶各向同性张量的有关问题作了一些研究,主要结果如下．

利用五阶各向同性仿射正交张量和五阶各向同性 Descartes 张量的定义及一些特殊的 Descartes 正交坐标变换(确当的或非确当的变换),可以推出五阶各向同性仿射正交张量的所有分量必为零,而对于五阶 Descartes 张量的分量则可以不为零,也就表明非平凡的五阶各向同性 Descartes 张量是存在的. 对于五阶各向同性张量的存在性研究可以归结为：

定理 1(存在性)　非平凡的五阶各向同性仿射正交张量是不存在的;但是存在非平凡的五阶各向同性 Descartes 张量.

对于五阶各向同性 Descartes 张量的分量进行分类研究,可得到其分量的结构为：

定理 2(结构定理)　非平凡的五阶各向同性 Descartes 张量的分量共有 $3^5=243$ 个．它们可以分成5大类:(Ⅰ)5个下标都相同,如 π_{11111};(Ⅱ)4个下标都相同,有1个下标不相同,如 π_{11112};(Ⅲ)3个下标都相同,其余2个下标相同(但与前者不同),如 π_{11122};(Ⅳ)3个下标都相同,其余2个下标不同(且与前者也不同),如 π_{11123};(Ⅴ)下标取3个不同数值,但有两个重复,如 π_{11223}．

以下着重研究五阶各向同性 Descartes 张量如何数学表示的问题.

为了寻求各向同性张量的形式,需要应用各种 Descartes 正交坐标变换,常用的有以下几种特殊的变换：

(ⅰ)绕某一坐标轴旋转90°,例如绕 Oy_3 轴转90°,如图1．其变换矩阵为

---

* **收稿日期：** 1998-11-20; **修订日期：** 1999-10-13

作者简介： 阎大桂(1943～),教授,主研方向:偏微分方程算子理论,已发表论文20余篇.

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

(ⅱ) 绕某一坐标轴旋转 180°,例如绕 Oy_3 轴转 180°,如图 2. 其变换矩阵为

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

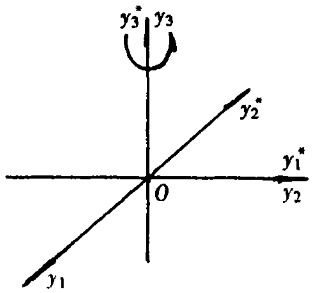

图 1 坐标变换(旋转 90°)

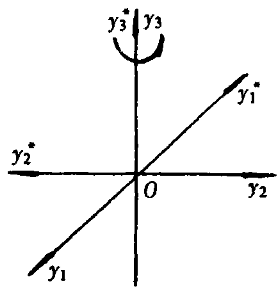

图 2 坐标变换(旋转 180°)

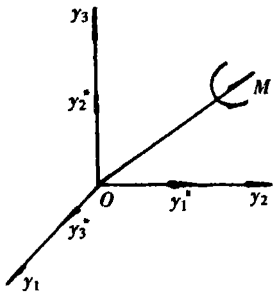

图 3 坐标变换(旋转 120°)

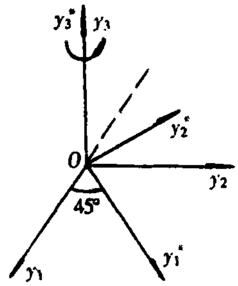

图 4 坐标变换(旋转 45°)

(ⅲ) 绕 OM 轴旋转 120°(OM 轴与三坐标轴夹角相等),如图 3. 其变换矩阵为

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

(ⅳ) 绕 Oy_3 轴转 45°,如图 4. 其变换矩阵为

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

利用以上 4 种坐标变换,容易证明在定理 2 中的第(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)、(Ⅴ)种类型的分量必为零,而只有第(Ⅳ)种类型的分量不为零. 以下对它们的表达式作出具体研究.

对于定理 2 中第(Ⅳ)种类型的分量 π_{ijklm},根据其角标的不同排列,可分成 10 类:

(a) $j = l = m$, 如 π_{12322}; (f) $i = j = l$, 如 π_{11213};

(b) $j = k = m$, 如 π_{12232}; (g) $k = l = m$, 如 π_{12333};

(c) $j = k = l$, 如 π_{12223}; (h) $i = l = m$, 如 π_{12311};

(d) $i = k = m$，如 π_{21232}；　　(i) $i = j = m$，如 π_{11231}；

(e) $i = k = l$，如 π_{12113}；　　(j) $i = j = k$，如 π_{11123}；

以下讨论这 10 类分量在各类内部及各类分量之间的关系．以(a) $j = l = m$ 为例，由于 π 是五阶 Descartes 各向同性张量，其分量应满足：

1) $\pi^*_{ijklm} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{kr}\alpha_{ls}\alpha_{mt}\pi_{pqrst}$；

2) $\pi^*_{ijklm} = \pi_{ijklm}$．

利用第(ⅲ)类坐标变换，可得

$$\pi^*_{12322} = \alpha_{1p}\alpha_{2q}\alpha_{3r}\alpha_{2s}\alpha_{2t}\pi_{pqrst} = \pi_{23133},$$

$$\pi^*_{23133} = \alpha_{2p}\alpha_{3q}\alpha_{1r}\alpha_{3s}\alpha_{3t}\pi_{pqrst} = \pi_{31211}.$$

由于 $\pi^*_{12322} = \pi_{12322}$，$\pi^*_{23133} = \pi_{23133}$，于是

$$\pi_{12322} = \pi_{23133} = \pi_{31211}, \tag{1}$$

同理

$$\pi_{21311} = \pi_{32122} = \pi_{13233}. \tag{2}$$

利用第(ⅰ)类变换可得

$$\pi^*_{12322} = \alpha_{1p}\alpha_{2q}\alpha_{3r}\alpha_{2s}\alpha_{2t}\pi_{pqrst} = -\pi_{21311},$$

考虑到 $\pi^*_{12322} = \pi_{12322}$，于是

$$\pi_{12322} = -\pi_{21311}. \tag{3}$$

由(1)、(2)、(3)式即推知：

$$\pi_{12322} = \pi_{23133} = \pi_{31211} = -\pi_{21311} = -\pi_{13233} = -\pi_{32122}.$$

令 $\pi_{12322} = \lambda_1$，则定理 2 中第(Ⅳ)种类型的分量中的(a)类(即 $j = l = m$ 时)可用一个参数 λ_1 表示，这种分量可写为(以下各式中下标重复出现多次不表示求和)：

1) $\pi_{ijklm} = \pi_{ijkjj} = \varepsilon_{ijk}\lambda_1 = \varepsilon_{ijk}\delta_{jl}\delta_{jm}\lambda_1$．

对于定理 2 中第Ⅳ种类型的分量中的另外 9 类作同样的讨论，可以得到类似的结果，每一类都引入一个参数 λ_i($i = 2,3,\cdots,10$)，这些分量的表达式分别为

2) $\pi_{ijklm} = \pi_{ijjlj} = \varepsilon_{ijl}\lambda_2 = \varepsilon_{ijl}\delta_{jk}\delta_{jm}\lambda_2$,

3) $\pi_{ijklm} = \pi_{ijjjm} = \varepsilon_{ijm}\lambda_3 = \varepsilon_{ijm}\delta_{jk}\delta_{jl}\lambda_3$,

4) $\pi_{ijklm} = \pi_{ijili} = \varepsilon_{ijl}\lambda_4 = \varepsilon_{ijl}\delta_{ik}\delta_{im}\lambda_4$,

5) $\pi_{ijklm} = \pi_{ijiim} = \varepsilon_{ijm}\lambda_5 = \varepsilon_{ijm}\delta_{ik}\delta_{il}\lambda_5$,

6) $\pi_{ijklm} = \pi_{iikim} = \varepsilon_{ikm}\lambda_6 = \varepsilon_{ikm}\delta_{ij}\delta_{il}\lambda_6$,

7) $\pi_{ijklm} = \pi_{ijkkk} = \varepsilon_{ijk}\lambda_7 = \varepsilon_{ijk}\delta_{kl}\delta_{km}\lambda_7$,

8) $\pi_{ijklm} = \pi_{ijkii} = \varepsilon_{ijk}\lambda_8 = \varepsilon_{ijk}\delta_{il}\delta_{im}\lambda_8$,

9) $\pi_{ijklm} = \pi_{iikli} = \varepsilon_{ikl}\lambda_9 = \varepsilon_{ikl}\delta_{ij}\delta_{im}\lambda_9$,

10) $\pi_{ijklm} = \pi_{iiilm} = \varepsilon_{ilm}\lambda_{10} = \varepsilon_{ilm}\delta_{ij}\delta_{ik}\lambda_{10}$.

为了得到最简洁的各向同性张量的表达式，还应讨论 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{10}$ 之间的相关性．为此，我们先讨论 λ_1 与其它参数的关系．

取第(ⅳ)种类型的变换：

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

应用 $\pi^*_{12322} = \pi_{12322}$，得到

$$\pi^*_{12322} = \alpha_{1i}\alpha_{2j}\alpha_{3k}\alpha_{2l}\alpha_{2m}\pi_{ijklm} =$$
$$\frac{1}{4}\pi_{11312} + \frac{1}{4}\pi_{11321} + \frac{1}{4}\pi_{12311} + \frac{1}{4}\pi_{12322} -$$
$$\frac{1}{4}\pi_{21311} - \frac{1}{4}\pi_{21322} - \frac{1}{4}\pi_{22312} - \frac{1}{4}\pi_{22321},$$

即 $\lambda_1 = \lambda_8 - \lambda_6 - \lambda_9$.

对定理 2 中第Ⅳ种类型的(b)~(j)类作出类似的变换,同理可得

$$\lambda_2 = \lambda_4 + \lambda_9 - \lambda_{10},\ \lambda_3 = \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_{10},\ \lambda_4 = \lambda_2 - \lambda_9 + \lambda_{10},$$
$$\lambda_5 = \lambda_3 - \lambda_6 - \lambda_{10},\ \lambda_6 = \lambda_3 - \lambda_5 - \lambda_{10},\ \lambda_7 = \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_8,$$
$$\lambda_8 = \lambda_1 + \lambda_6 + \lambda_9,\ \lambda_9 = -\lambda_1 - \lambda_6 + \lambda_8,\ \lambda_{10} = \lambda_9 + \lambda_4 - \lambda_2.$$

以上 10 个方程等价于方程组:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_6 - \lambda_8 + \lambda_9 = 0, \\ \lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_9 + \lambda_{10} = 0, \\ \lambda_3 - \lambda_5 - \lambda_6 - \lambda_{10} = 0, \\ \lambda_4 - \lambda_5 - \lambda_7 + \lambda_8 = 0. \end{cases}$$

该方程组系数矩阵之秩 $R(A) = 4$,未知数个数 $n = 10$. 因此方程组的解中含有 $n - r = 6$ 个独立参数,不妨设为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_6$,这时

$$\lambda_7 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,\ \lambda_8 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 - \lambda_5,$$
$$\lambda_9 = \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 - \lambda_5 - \lambda_6,\ \lambda_{10} = \lambda_3 - \lambda_5 - \lambda_6.$$

容易验证,将上面推出的定理 2 中第Ⅳ种类型的分量的 10 种表示式相加就是第Ⅳ种类型分量的表达式. 进而也不难验证它在定理 2 中的其它 4 种类型的分量的情况下也适用. 再考虑到 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{10}$ 之间的关系,我们最后得到五阶各向同性 Descartes 张量的表示定理:

定理 3(表示定理) 五阶各向同性 Descartes 张量的一般表达式为

$$\pi_{ijklm} = \varepsilon_{ijk}\delta_{jl}\delta_{im}\lambda_1 + \varepsilon_{ijl}\delta_{jk}\delta_{jm}\lambda_2 + \varepsilon_{ijm}\delta_{jk}\delta_{jl}\lambda_3 + \varepsilon_{ijl}\delta_{ik}\delta_{im}\lambda_4 + \varepsilon_{ijm}\delta_{ik}\delta_{il}\lambda_5 + \varepsilon_{ikm}\delta_{ij}\delta_{il}\lambda_6 +$$
$$\varepsilon_{ijk}\delta_{kl}\delta_{km}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \varepsilon_{ijk}\delta_{il}\delta_{im}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 - \lambda_5) +$$
$$\varepsilon_{ikl}\delta_{ij}\delta_{im}(\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 - \lambda_5 - \lambda_6) + \varepsilon_{ilm}\delta_{ij}\delta_{ik}(\lambda_3 - \lambda_5 - \lambda_6).$$

[参 考 文 献]

[1] 王甲升. 张量分析及其应用[M]. 北京:高等教育出版社,1987,81~92.

[2] Aris R. Vectors, *Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*[M]. Englewood Cliffs, N J: Prentice-Hall, Inc, 1962, 8~75.

Five Order Isotropic Descartes Tensor

Yan Dagui, Xu Jun, Yan Shang'an, Fu Shilu

(*Department of Mathematics, Logistical Engineering University, Chongqing* 400016, *P R China*)

Abstract: Five order isotropic descartes tensor and its existence theorem and representation problems are researched, then a general representation formula of five order isotropic descartes tensor is got.

Key words: descartes tensor; isotropic tensor; existence theorem; representation theorem; structure theorem