

文章编号:1000-0887(2000)04-0393-09

# 有限区间内四阶样条小波的构造\*

段继伟, 李启光

(1. 浙江工业大学 土木系, 杭州 310014; 2. 香港大学 土木工程系 香港)

(吴启光推荐)

**摘要:** 用有限区间上的截断4阶B样条,构造了有限区间上的4阶样条小波. 这些小波由边界小波和内部小波组成,对某一尺度,它们组成了有限维的小波空间. 于是,任何有限区间上的函数皆可表示为该区间上的尺度函数和小波函数的有限和,即小波级数,这克服了用无穷区间上的小波进行有限信号处理时,在边界上误差较大的不足,同时将该小波用于偏微分方程具有同样重要的意义.

**关键词:** B样条; 小波; 有限区间

**中图分类号:** O242.29; O241.82 **文献标识码:** A

## 引 论

小波分析是近年十分热门的研究课题,其应用的一个重要方面是偏微分方程的数值分析,其优越性已经有所报道<sup>[1,2,3,4]</sup>. 以往得到的小波是分布在整个数轴上的,而对偏微分方程的定解问题,未知函数常常分布在某一有限区间上,因此,将有限区间内的函数展开成小波级数,在边界上的处理常常是所关心的一个问题. 常用的处理方法有<sup>[5,6]</sup>:一种方法是将定义在 $[0, 1]$ 区间上的函数认为在该区间外为零,此区间上的函数被简单地延拓到整个数轴上了,于是可以利用无穷区间的小波率来处理此函数. 但是,这种方法由于此函数在区间端点处不连续,将带来较大的误差,为此需要增加边界小波的数目,使计算量增大. 另一种方法是将有限区间上的函数展成一个周期小波级数;而目前研究的焦点是集中在对有限区间上小波的构造上. 因为,研究表明,有限区间上的小波,对每一个尺度空间和小波空间,其维数是有限维的,这样任何区间上的函数皆可展成有限维的小波级数,这无论是对信号处理,还是对偏微分方程的求解,都具有重要的应用意义.

本文在总结<sup>[6,7,8]</sup>的基础上,具体构造出了在有限区间上的4阶样条小波. 一旦该小波构造出来,象样条函数一样,将该样条小波应用于力学的分析计算,将产生重要的意义.

## 1 $[0, 1]$ 区间上的多分辨分析和小波的定义

**定义 1**( $[0, 1]$ 区间上的多分辨分析) 一个函数  $f(x) \in L^2[0, 1]$ (平方可积空间) 称为产生多分辨分析(即 MRA),是指如果它产生一个巢形闭子空间  $V_j^{[0,1]}$ ,并且满足如下条件:

\* 收稿日期: 1997-09-22; 修订日期: 1998-09-10

**作者简介:** 段继伟(1964~),男,云南蒙自,副教授,博士,研究方向为软基处理、桩基的数值分析、计算土力学、小波理论.

- 1)  $V_0^{[0,1]} \subset V_1^{[0,1]} \subset \dots$ ;
- 2)  $\text{clos}_{L^2[0,1]}(\bigcup_{j \geq 0} V_j^{[0,1]}) = L^2[0,1]$ ;
- 3)  $\bigcap_{j \geq 0} V_j^{[0,1]} = 0$ ;
- 4)  $f(x) \in V_j^{[0,1]} \Leftrightarrow f(x + 2^{-j}) \in V_j^{[0,1]} \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}^{[0,1]}$ ,  $j \in \mathbf{Z}_+$ , 这里  $\mathbf{Z}_+$  是正整数集合;
- 5)  $\{f(x - k)\}_{k \in \text{Index}}$  为  $V_0^{[0,1]}$  的一个 Riesz 基(Index 为指标集), 即存在着常数  $A_j$  和  $B_j$ ,  $0 < A_j \leq B_j < \infty$ ,  $\inf A_j > 0$ ,  $\sup B_j < \infty$ , 成立

$$A_j(\|\{c_k\}\|_2^2) \leq \left\| \sum_{k \in \text{Index}} c_k f(x - k) \right\|_2^2 \leq B_j(\|\{c_k\}\|_2^2),$$

其中  $\{c_k\}$  为  $l^2$  空间中的序列, 则函数  $\varphi(x)$  称为形成一个多分辨分析.

如果一个函数  $\varphi(x)$  产生一个多分辨分析, 那么  $\varphi(x)$  称为尺度函数. 尺度函数通过伸缩和平移变换, 即定义函数  $\varphi_{jk}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - i)$  则按多分辨分析的定义,  $\varphi_{jk}(x)$  是空间  $V_j^{[0,1]}$  的基数, 而  $j$  称为尺度水平,  $V_j^{[0,1]}$  称为尺度空间.

定义 2([0,1] 区间上的小波) 一个函数  $\psi(x) \in L^2[0,1]$  称为小波, 如果它为多分辨分析的正交补, 即对尺度空间  $V_j^{[0,1]}$  有  $V_{j+1}^{[0,1]} = V_j^{[0,1]} \oplus W_j^{[0,1]}$ , 这里  $\oplus$  为直和,  $W_j^{[0,1]}$  称为小波空间, 即  $W_j^{[0,1]} = \text{clos}_{L^2} \langle \psi_{j,k} \in \mathbf{Z}_+ \rangle$ , 如果  $\psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - i) \in W_j^{[0,1]}$  ( $j, k \in \mathbf{Z}_+$ ) 也是一个多分辨分析, 则称  $\psi_{jk}(x)$  为尺度水平为  $j$  的小波.

如果内积

$$\langle \psi_{jk}(x), \psi_{j'k'}(x) \rangle = \int_0^1 \psi_{jk}(x) \psi_{j'k'}(x) dx = \delta_{j'j} \delta_{k'k} \quad (j, k, j', k' \in \mathbf{Z}_+), \quad (1)$$

式中  $\delta_{jk}$  为 Kronecker  $\delta$ -函数, 这时的小波称为正交小波; 否则, 称为半正交小波(如样条小波), 或称为非正交小波(如墨西哥帽小波).

## 2 样条空间与尺度空间

因为任何  $[a, b]$  区间的函数  $f(t)$ , 通过变换  $x = (t - a)/(b - a)$ , 则  $f(x)$  变为  $[0, 1]$  区间上的函数. 因此只须考虑  $[0, 1]$  区间的函数即可. 在计算力学中, 常用偶数阶样条函数,  $m$  阶 B 样条函数  $\Phi_m(x)$  定义为 ( $m$  为偶数)

$$\Phi_m(x) = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \left(x - k - \frac{m}{2}\right)_+^{m-1}, \quad (2)$$

其中

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}, \quad (x-a)_+^p = \begin{cases} (x-a)^p, & x \geq a, \\ 0, & x < a, \end{cases}$$

这个函数的紧支集为  $[-m/2, m/2]$ .

按样条函数理论, 定义在  $[0, 1]$  区间上的一个分划如下:  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-m/2} = 1$ . 分别向区间左右两端各增加  $m/2 - 1$  个结点, 即

$$x_{-m/2+1} < x_{-m/2+2} < \dots < x_{-1} < x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_{N-m/2} = 1 < x_{N-m/2+1} < \dots < x_{N+m/2-1},$$

其中结点

$$x_k = kh_j, \quad k = -\frac{m}{2} + 1, -\frac{m}{2} + 2, \dots, N + \frac{m}{2} - 1,$$

步长  $h_j = 2^{-j}$ , 结点总数为  $N + 1 = 2^j + 1$ .

以上述结点形成的样条函数构成一个  $m$  阶样条函数空间, 其基函数为如下 B 样条函数

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{m,i}(x) &= \Phi_m\left(\frac{x}{h} - i\right) = \Phi_m(2^{-j}x - i), \quad h = \frac{1}{N}, \\ i &= -\frac{m}{2} + 1, -\frac{m}{2} + 2, \dots, N + \frac{m}{2} - 1, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

形成的空间记为

$$S_{m,j} = \left\{ \Phi_{m,i}(x), \quad i = -\frac{m}{2} + 1, -\frac{m}{2} + 2, \dots, N + \frac{m}{2} - 1, N = 2^j \right\}. \quad (4)$$

这个空间是线性空间, 其维数为

$$\dim(S_{m,j}) = 2^j + m - 1. \quad (5)$$

取样条函数为尺度函数, 则理论上可证明, 该样条函数形成一个多分辨分析, 而  $V_j^{[0,1]}$  为尺度空间.  $V_j^{[0,1]} = S_{m,j}$  的维数由式(5)确定.

### 3 [0,1]空间上的小波空间

有了尺度空间, 则可通过该空间来构造小波函数以及小波空间. 文献[6,7,8]已经提供了构造该类小波的定理. 现总结并改写如下:

1) 构造  $2m$  阶样条空间

$$\tilde{S}_{2m,j_m^{+1}} = \{ \Phi_{2m}(2^{j+1}x - i) : i = -m, -m+1, \dots, N+m-1 \}; \quad (6)$$

2) 使  $2m$  阶样条空间满足端点边界条件, 构成另一个空间

$$\tilde{S}_{2m,j_m^{+1}}^0 = \{ s(x) \in \tilde{S}_{2m,j_m^{+1}} : s^{(p)}(q) = 0, p = 0, 1, \dots, m-1; q = 0, 1 \}; \quad (7)$$

3) 使 2) 中的空间满足小波条件, 即有如下空间

$$S_{2m,t_m^{+1}}^0 = \{ s(x) \in \tilde{S}_{2m,j_m^{+1}}^0 : s(t_k) = 0, k = 0, \dots, 2^j \}. \quad (8)$$

注意: 结点集合为  $t^j = t_m^j = \{ t_k^j \}_{-m+1}^{2^j+m-1}, t_k^j = k2^j, k = -m+1, \dots, 2^j+m-1$ .

于是, 有下列定理:

**定理 1** 对任意的  $m \in \mathbf{Z}_+$ ,  $m$  阶导数算子  $D^m$  把空间  $S_{2m,t_m^{+1}}^0$  变成小波空间  $W_j^{[0,1]}$ , 并且该小波空间的维数为  $2^j$ .

**定理 2** 对所有  $j \in \mathbf{Z}_+$ , 如果  $2^j \geq 2m-1$ , 将存在  $2^{j+1} - 2m + 2$  线性无关的内部小波, 它们可表示为,

$$\begin{aligned} \psi_{ji}(x) &= \psi(2^jx - i) = 2^{1-2m} \sum_{k=m}^{3m-2} (-1)^{k-m} \Phi_{2m}(k+1-2m) \Phi_{2m}^{(m)}(2i+k)(x), \\ & \quad i = 0, \dots, 2^j - 2m + 1. \end{aligned} \quad (9)$$

其紧支集为

$$\text{supp} \psi_{ji}(x) = \text{supp} \psi_m(2^jx - i) = [i2^{-j}, (2m-1+i)2^{-j}].$$

**定理 3** 对所有  $j \in \mathbf{Z}_+$ , 如果  $2^j \geq 2m-1$ , 在 0- 边界上将存在  $m-1$  个边界小波, 这些小波可表示为,

$$\psi_{ji}(x) = 2^{1-2m} \left[ \sum_{k=-m+1}^{-1} \alpha_k B_{k,2m,j+1}^{(m)}(x) + \sum_{k=m}^{3m-2+2i} (-1)^{k-m} \Phi_{2m}(k+1-2i-2m) \Phi_{2m}^{(m)}(2^{j+1}x-k) \right],$$

$$i = -m+1, \dots, -1, \quad (10)$$

式中  $B_{k,2m,j+1}(x)$  为(8)中满足边界条件的边界基函数;系数  $\alpha_k$  可由下式确定,

$$[B]\{\alpha\} = \{r\}, \quad (10a)$$

其中

$$[B]_{kl} = [B_{k,2m,j+1}(2l2^{-j-1})], \quad k = -m+1, \dots, -1,$$

$$\{r\} = \{r_1, r_2, \dots, r_{m-1}\}^T, \quad \{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}\}^T,$$

$$r_l = \left( - \sum_{k=m}^{3m-2+2i} (-1)^k \Phi_{2m}(k+1-2i-2m) \Phi_{2m}(2l-k) \right),$$

$$l = 1, \dots, m-1.$$

上面小波函数的紧支集为

$$\text{supp} \psi_{ji}(x) = \text{supp} \psi(2^j x - i) = [0, (2m-2+i)2^{-j}],$$

$$i = -m+1, \dots, -1.$$

由对称性,即 0-边界小波的指标变换,  $i \leftrightarrow 2^j - 2m + 1 - i$ , 可得 1-边界小波如下:

$$\psi_{ji}^1(x) = \psi^1(2^j x - i) = \psi_{j,2^j-2m+1-i}^0(1-x) =$$

$$\psi^0[2^j(1-x) - (2^j - 2m + 1 - i)],$$

$$i = 2^j - 2m + 2, 2^j - 2m + 3, \dots, 2^j - m, \quad (11)$$

其中  $\psi_{ji}^0(x)$  由式(11)确定,上式的紧支集为

$$\text{supp} \psi_{ji}^1(x) = \text{supp} \psi_{j,2^j-2m+1-i}^0(x) = [i2^{-j}, 1],$$

$$i = 2^j - 2m + 2, \dots, 2^j - m.$$

#### 4 4阶样条尺度空间与小波空间构造

当  $m$  等于 4 时,可构造 4 阶样条尺度空间为

$$S_{4,j} = \{\Phi_{4,i}(x), i = -1, 0, 1, 2, \dots, 2^j + 1\}, \quad (12)$$

8 阶样条空间为

$$S_{8,j+1} = \{\Phi_{8,i}(x), i = -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 2^{j+1} + 3\}, \quad (13)$$

这里

$$x_i = kh_{j+1}, h_{j+1} = 2^{-j-1}, \quad k = -3, -2, -1, 0, 1, \dots, 2^{j+1} + 3, N = 2^{j+1}.$$

对  $S_{8,j+1}$  而言,在 0-边界上,有 7 个截断样条函数,它们为

$$\Phi_{8,-3}(x), \Phi_{8,-2}(x), \Phi_{8,-1}(x), \Phi_{8,0}(x), \Phi_{8,1}(x), \Phi_{8,2}(x), \Phi_{8,3}(x);$$

在 1-边界上,同样也有 7 个截断样条函数,它们为

$$\Phi_{8,2^{j+1}-3}(x), \Phi_{8,2^{j+1}-2}(x), \Phi_{8,2^{j+1}-1}(x), \Phi_{8,2^{j+1}}(x), \\ \Phi_{8,2^{j+1}+1}(x), \Phi_{8,2^{j+1}+2}(x), \Phi_{8,2^{j+1}+3}(x).$$

先考虑 0-边界的情况,对 1-边界的情况由对称性易得. 为形成  $\bar{S}_{8,i}^0$  空间,须把上述 7 个截断函数代入(8)的边界条件,最后可得 3 个独立的基函数,但是用上述 7 个函数直接处理边界条件,不容易获得这 3 个边界基函数. 为此,先用上述 7 个 0-边界的截断函数来构造 7 个线性无关的边界基函数,这些基函数可表示为 7 个截断函数的线性组合,即

$$B_i(x) = \sum_{j=-3}^3 \alpha_{ij} \Phi_8\left(\frac{x}{h} - i\right) = \sum_{j=-3}^3 \alpha_{ij} \Phi_{8,i}(x), \quad i = -3, -2, \dots, 3, \quad (14)$$

也可写为

$$\begin{pmatrix} B_{-3}(x) \\ B_{-2}(x) \\ B_{-1}(x) \\ B_0(x) \\ B_1(x) \\ B_2(x) \\ B_3(x) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{-3,-3} & \alpha_{-3,-2} & \alpha_{-3,-1} & \alpha_{-3,0} & \alpha_{-3,1} & \alpha_{-3,2} & \alpha_{-3,3} \\ \alpha_{-2,-3} & \alpha_{-2,-2} & \alpha_{-2,-1} & \alpha_{-2,0} & \alpha_{-2,1} & \alpha_{-2,2} & \alpha_{-2,3} \\ \alpha_{-1,-3} & \alpha_{-1,-2} & \alpha_{-1,-1} & \alpha_{-1,0} & \alpha_{-1,1} & \alpha_{-1,2} & \alpha_{-1,3} \\ \alpha_{0,-3} & \alpha_{0,-2} & \alpha_{0,-1} & \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & \alpha_{0,3} \\ \alpha_{1,-3} & \alpha_{1,-2} & \alpha_{1,-1} & \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,-3} & \alpha_{2,-2} & \alpha_{2,-1} & \alpha_{2,0} & \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,-3} & \alpha_{3,-2} & \alpha_{3,-1} & \alpha_{3,0} & \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{8,-3} \\ \Phi_{8,-2} \\ \Phi_{8,-1} \\ \Phi_{8,0} \\ \Phi_{8,1} \\ \Phi_{8,2} \\ \Phi_{8,3} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

上述边界基函数首先须满足的边界条件为,

$$\left. \begin{aligned} & B_{-3}(0) \neq 0, B_{-2}(0) = 0, B_{-1}(0) = 0, B_0(0) = 0, B_1(0) = 0, \\ & B_2(0) = 0, B_3(0) = 0, \\ & B_{-3}^{(1)}(0) \neq 0, B_{-2}^{(1)}(0) \neq 0, B_{-1}^{(1)}(0) = 0, B_0^{(1)}(0) = 0, B_1^{(1)}(0) = 0, \\ & B_2^{(1)}(0) = 0, B_3^{(1)}(0) = 0, \\ & B_{-3}^{(2)}(0) \neq 0, B_{-2}^{(2)}(0) \neq 0, B_{-1}^{(2)}(0) \neq 0, B_0^{(2)}(0) = 0, B_1^{(2)}(0) = 0, \\ & B_2^{(2)}(0) = 0, B_3^{(2)}(0) = 0, \\ & B_{-3}^{(3)}(0) \neq 0, B_{-2}^{(3)}(0) \neq 0, B_{-1}^{(3)}(0) \neq 0, B_0^{(3)}(0) \neq 0, B_1^{(3)}(0) = 0, \\ & B_2^{(3)}(0) = 0, B_3^{(3)}(0) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

用 MATHEMATICA 软件,经过分析计算,可取

$$\begin{pmatrix} B_{-3}(x) \\ B_{-2}(x) \\ B_{-1}(x) \\ B_0(x) \\ B_1(x) \\ B_2(x) \\ B_3(x) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{120} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{473}{18\,648} & \frac{4}{2\,331} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{125}{2\,394} & \frac{47}{5\,985} & -\frac{9}{5\,320} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{13}{352} & 0 & \frac{1}{352} & 0 & -\frac{13}{352} & 1 \\ 0 & \frac{685}{279} & -\frac{352}{279} & 1 & -\frac{352}{279} & -\frac{685}{279} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24}{4\,795} & -\frac{339}{38\,360} & \frac{901}{43\,155} & -\frac{11}{126} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{8,-3} \\ \Phi_{8,-2} \\ \Phi_{8,-1} \\ \Phi_{8,0} \\ \Phi_{8,1} \\ \Phi_{8,2} \\ \Phi_{8,3} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

可以证明上述7个函数线性无关。代入上述边界条件,可知  $\bar{S}_{8,l_4}^0$  中的3个独立的边界基函数为  $B_1(x)$ 、 $B_2(x)$  和  $B_3(x)$ ,这3个边界基函数的图形如图1所示。

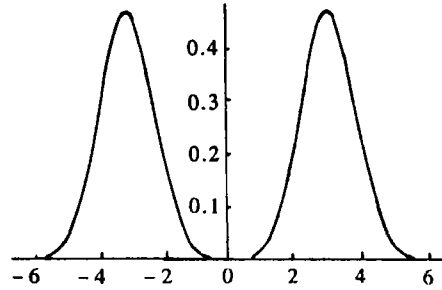
有了这3个边界基函数,就可以构造小波了。

1) 由定理2得内部小波为

$$\left. \begin{aligned} \psi_{ji}(x) &= 2^{-7} \sum_{k=4}^{10} (-1)^k \Phi_8(k+1-2m) \Phi_{8,2i+k}^{(4)}(x), \quad i = 0, \dots, 2^j - 7, \\ \text{supp}[\psi_{ji}(x)] &= [i2^{-j}, (7+i)2^{-j}]. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

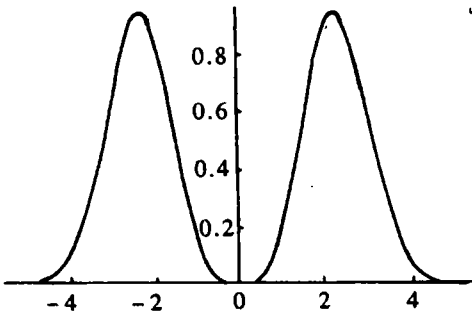
2) 由定理3得0-边界小波为

$$\begin{aligned} \psi_{ji}^0(x) &= \psi^0(2^j x - i) = 2^{-7} \left( \alpha B_1^{(4)}(2^{j+1}x) + \beta B_2^{(4)}(2^{j+1}x) + \gamma B_3^{(4)}(2^{j+1}x) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{k=4}^{10+2i} (-1)^k \Phi_8(k+1-2i-8) \Phi_8^{(4)}(2^{j+1}x - k) \right), \\ &\quad i = -3, \dots, -1, \end{aligned} \quad (19)$$

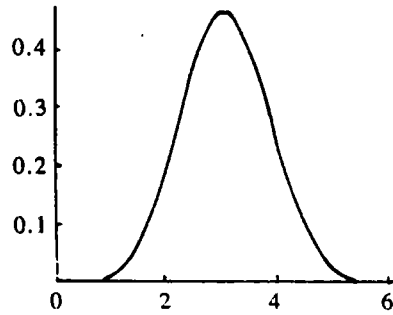


(a)  $B_1(x)$  的图形

其中,  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  由下式确定



(b)  $B_2(x)$  的图形



(c)  $B_3(x)$  的图形

图1 边界基函数图形

$$r_l = \left( - \sum_{k=4}^{10+2i} (-1)^k \Phi_8(k+1-2i-8) \Phi_8(2l-k) \right), \quad i = -3, -2, -1, l = 1, 2, 3; \quad (19a)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha B_1(2) + \beta B_2(2) + \gamma B_3(2) &= \gamma_l(l = 1), \\ \alpha B_1(4) + \beta B_2(4) + \gamma B_3(4) &= \gamma_l(l = 2), \\ \alpha B_1(6) + \beta B_2(6) + \gamma B_3(6) &= \gamma_l(l = 3); \end{aligned} \right\} \quad (19b)$$

其紧支集为

$$\text{supp}\psi_{ji}(x) = \text{supp}\psi_m(2^j x - i) = [0, (7+i)2^{-j}], \quad i = -3, -2, \dots, -1. \quad (19c)$$

3) 1-边界小波

$$\begin{aligned} \psi_{ji}^1(x) &= \psi^1(2^j x - i) = \psi_{j,2^j-2m+1-i}^0(1-x) = \\ &= \psi^0[2^j(1-x) - (2^j - 2m + 1 - i)] = \psi^0[2^j(1-x) - (2^j - 7 - i)], \\ &\quad i = 2^j - 2m + 2, \dots, 2^j - m = 2^j - 6, 2^j - 5, 2^j - 4 \quad (m = 4). \end{aligned} \quad (20)$$

其紧支集为

$$\text{supp}\psi_{i,j}^1(x) = \text{supp}\psi_{j,2^j-7-i}^0(x) = [i2^{-j}, 1]. \quad (20a)$$

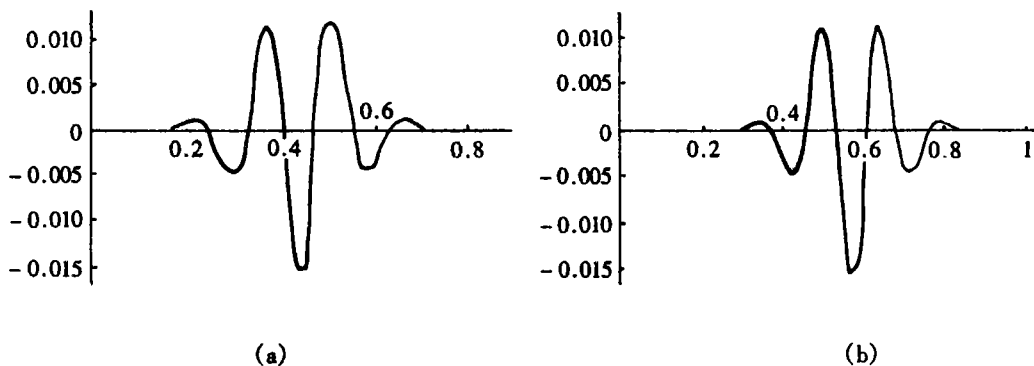


图2 内部小波

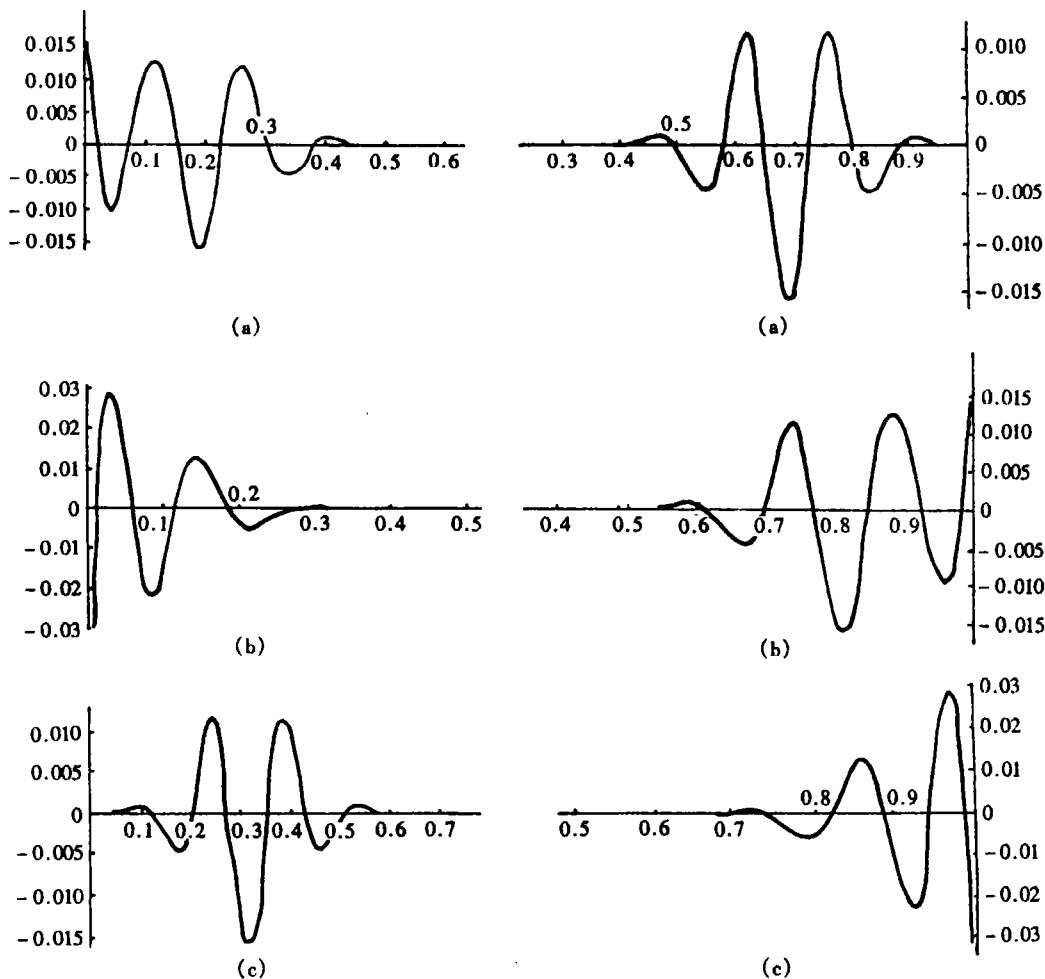


图3 0-边界小波

图4 1-边界小波

由下面的定理可知,为保证至少存在一个内部小波,取

$$j_0 = \min\{j \in \mathbf{Z}_+ : 2^j \geq 2m - 1\}, \quad (21)$$

则按上面的定理可构造出尺度水平为  $j_0$  的边界小波和内部小波。对尺度水平  $j \geq j_0$  的小波,可按小波理论的伸缩和平移特性求得<sup>[7]</sup>。

于是对  $m = 4$  的样条小波可知,  $j_0 = 3$ , 利用 MATHEMATICA 软件可以按上面推导, 得到尺度为  $j_0$  的小波如图 2 ~ 4 所示。

1. 内部小波 2 个 ( $j = j_0 = 3$ )

1)  $i = 0$ (图 2(a))

2)  $i = 1$ (图 2(b))

2. 0-边界小波 3 个 ( $j = j_0 = 3$ )

1)  $i = m - 1 = -3$ (图 3(a))

2)  $i = -2$ (图 3(b))

3)  $i = -1$ (图 3(c))

3. 1-边界小波 ( $j = j_0 = 3$ )

1)  $i = 2$ (图 4(a))

2)  $i = 3$ (图 4(b))

3)  $i = 4$ (图 4(c))

## 5 结 论

本文用截断四阶 B 样条构造出了有限区间上的内部小波和边界小波。有限区间内的样条空间, 这里也是尺度空间, 和小波空间一样是有限维的。任何在有限区间内的函数, 可按上述尺度函数和小波函数, 作有限维展开。这对小波在数值分析、处理信号的边缘效应等方面, 具有重要的应用意义。

### [参 考 文 献]

- [1] Chen Mingquayer, Hwang Chyi, Shih Yenping. A wavelet-Galerkin method for solving population balance equations[J]. *Computers Chem Engng*, 1996, 20(2): 131 ~ 145.
- [2] Chen Mingquayer, Hwang Chyi, Shin Yehping. The computation of wavelet-Galerkin approximation on a bounded interval[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1996, 39: 2921 ~ 2944.
- [3] Williams John R, Amaratunga Kevin. Introduction to wavelets in engineering[J]. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 1994, 37(14): 2365 ~ 2388.
- [4] Chen W H, Wu C W. A spline wavelet element method for frame structure vibration[J]. *Computational Mechanics*, 1995, 16(1): 11 ~ 12.
- [5] Daubechies Ingrid. Two recent results on wavelets: wavelet bases for the interval, and biorthogonal wavelets diagonalizing the derivative operator[A]. In: Larry L Schumaker, Glenn Webb Eds. *Recent Advances in Wavelet Analysis*, Academic Press, Incorporated, 1993.
- [6] Quak Ewald, Weyrich Norman. Wavelets on the interval[A]. In: Singh S P Ed. *Approximation Theory Wavelets and Applications*[C]. 1995.
- [7] Quak Ewald, Weyrich Norman. Decomposition and reconstruction algorithms for spline wavelets on a bounded interval[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 1994, 1: 217 ~ 231.
- [8] 关履泰. 有限区间截断 B 样条小波及其消失矩性质[J]. 中山大学学报(自然科学版), 1996, 35(3):



## 4th Order Spline Wavelets on a Bounded Interval

Duan Jiwei<sup>1</sup>, Peter Kai-kwong Lee<sup>2</sup>

(1. *Department of Civil Engineering, Zhejiang University of  
Technology, Hangzhou 310014, P R China;*

2. *Department of Civil Engineering, The University of Hong Kong,  
Hong Kong, P R China)*

**Abstract:** The 4th order spline wavelets on a bounded interval are constructed by the 4th order truncated B-spline functions. These wavelets consist of inner and boundary wavelets. They are bases of wavelet space with finite dimensions. Any function on an interval will be expanded as the sum of finite items of the scaling functions and wavelets. It plays an important role for numerical analysis of partial differential equations, signal processes, and other similar problems.

**Key words:** B-spline; wavelet; bounded interval