应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

文章编号:1000-0887(2000)04-0409-06

一般 Lyness 方程的周期性与严格振动性*

李先义[1,2], 肖功福[3]

(1. 华东师范大学 数学系,上海 200062;2. 中南工学院 基础课部,湖南衡阳 421001;
3. 湖南大学 衡阳分校 基础课部,湖南衡阳 421101)

(周焕文推荐)

摘要: 研究了一般的 Lyness 方程

$$x_{n+1}=\frac{x_n}{(a+bx_n)x_{n-1}},\qquad n=0,1,2,\cdots,\tag{$*$}$$

其中 a、$b\in[0,\infty)$ 且 $a+b>0$,初值 x_{-1}、x_0 为任意正数. 得到了一些新的结果:方程($*$)解的周期性的一个必要充分条件;方程($*$)的所有解严格振动的充分条件. 作为应用,解决了 G. Ladas 提出的一个公开问题.

关 键 词: 一般 Lyness 方程; 周期性; 严格振动性; 公开问题
中图分类号: O175.7 **文献标识码:** A

引 言

考虑下列时滞差分方程

$$x_{n+1}=\frac{x_n}{(a+bx_n)x_{n-1}},\qquad n=0,1,2,\cdots,\tag{1}$$

其中

$$a,b\in[0,\infty)\text{ 且 }a+b>0,\tag{2}$$

初值 x_{-1},x_0 为任意正数. 方程(1) 在文献[1] 中被 G. Ladas 作为一般的 Lyness 方程.

显然,在条件(2)下,方程(1)的任一解 $\{x_n\}$是正的. 且方程(1) 有唯一的正平衡点 $\bar{x}$;而且,当 $b=0$ 时,$\bar{x}=1/a$,当 $b>0$ 时,$\bar{x}=(-a+\sqrt{a^2+4b})/2b$.

关于方程(1),E. A. Grove, E. J. Janowski, C. M. Kent 和 G. Ladas 在文献[2]中研究了它的不变性,得到

定理 A 设 $\{x_n\}$是方程(1) 的一个解,那么

$$\frac{1}{x_n}+(b+a^2)x_n+\frac{ax_{n-1}}{x_n}+abx_{n-1}x_n+\frac{ax_n}{x_{n-1}}+(b+a^2)x_{n-1}+\frac{1}{x_{n-1}}\equiv\text{const},\qquad n=0,1,\cdots.$$

本文的第一作者在文献[3]中研究了它的有界保持性,根据定理 A,得到

---

* 收稿日期: 1998-05-04; 修订日期: 1999-12-01
基金项目: 数学天元基金资助项目;中南工学院科研基金资助项目
作者简介: 李先义(1966~),男,湖南衡阳人,副教授,硕士,主要从事微分-差分方程定性分析的研究.

定理 B 假设(2)成立且 $\{x_n\}$ 是方程(1)的一个解，那么存在正常数 P, Q: $0 < P \leqslant Q < +\infty$,使得

$$P \leqslant x_n \leqslant Q, \qquad n = -1,0,1,\cdots$$

然而,方程(1)的周期性和振动性还没有被研究过,到目前为止,我们也没有看到这方面的任何结果. 因此,本文的目的是研究方程(1)的周期性和振动性,并提供我们最近得到的一些新的结果,主要是方程(1)解的周期性的一个必要充分条件和方程(1)所有解严格振动的充分条件. 作为应用,我们的结果解决了 G.Ladas 在文献[4]中提出的一个公开问题.

本文的基本概念与文献[2,3,5,6]一致.

1 主要结果

1.1 周期性

关于方程(1)的周期性,我们主要获得下列两个定理:

定理 1 假定(2)成立,并设 $\{x_n\}$ 是方程(1)的一个解,那么下列陈述正确:

(ⅰ) 如果 $b = 0$,那么解 $\{x_n\}$ 是 6- 周期解;

(ⅱ) 如果 $a = 0$,那么解 $\{x_n\}$ 是 4- 周期解.

证明

(ⅰ)在条件(2)及 $b = 0$ 下,方程(1)变成

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{ax_{n-1}}, \qquad n = 0,1,2,\cdots.$$

因此

$$x_{n+6} = \frac{x_{n+5}}{ax_{n+4}} = \frac{x_{n+4}}{ax_{n+3} \cdot ax_{n+4}} = \frac{1}{a^2 \cdot \dfrac{x_{n+2}}{ax_{n+1}}} = \frac{x_{n+1}}{ax_{n+2}} = x_n.$$

证明完毕.

(ⅱ)的证明与(ⅰ)的证明类似,省略.

定理 2 假定(2)成立,那么当且仅当 $b = a^2$ 方程(1)的每个正解 $\{x_n\}$ 是 5- 周期解.

证明 按照方程(1),

$$x_n = \frac{x_{n+1}}{(a + bx_{n+1})x_{n+2}} = \frac{x_{n+2}}{(a + bx_{n+2})x_{n+3}} \cdot \frac{1}{\left(a + b\dfrac{x_{n+2}}{(a + bx_{n+2})x_{n+3}}\right)x_{n+2}} = \frac{1}{a(a + bx_{n+2})x_{n+3} + bx_{n+2}}$$

而

$$x_{n+5} = \frac{x_{n+4}}{(a + bx_{n+4})x_{n+3}} = \frac{x_{n+3}}{(a + bx_{n+3})x_{n+2}} \cdot \frac{1}{\left(a + b\dfrac{x_{n+3}}{(a + bx_{n+3})x_{n+2}}\right)x_{n+3}} = \frac{1}{a(a + bx_{n+3})x_{n+2} + bx_{n+3}}.$$

因此

$$\frac{1}{x_{n+5}} - \frac{1}{x_n} = (b - a^2)(x_{n+3} - x_{n+2}),$$

这表明 $x_{n+5} = x_n, n = -1,0,1,\cdots$ 当且仅当 $b = a^2$. 证明完毕.

1.2 振动性

关于方程(1)的振动性,我们得到

定理3 假定(2)成立,设 $\{x_n\}$ 是方程(1)的任一个非平凡正解,那么 $\{x_n\}$ 关于方程(1)的正平衡点 $\bar{x}$ 严格振动.

证明 为反驳起见,假定方程(1)有一个非振动解 $\{x_n\}$. 那么存在 $n_0 \in \mathbf{N}$,使得

$$x_n \geqslant \bar{x}, \qquad n \geqslant n_0, \tag{3}$$

或

$$x_n \leqslant \bar{x}, \qquad n \geqslant n_0. \tag{4}$$

我们将证明(3)成立会导致矛盾,(4)成立时的证明是类似的,将省略.

我们首先证明:存在 $n_1 > n_0$,使得

$$x_{n_1} < x_{n_1-1}. \tag{5}$$

否则

$$x_n \geqslant x_{n-1}, \qquad n > n_0.$$

这表明 $\{x_n\}$ 当 $n > n_0$ 时递增. 结合定理B,就有: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在且是有限的. 但是定理A表明:当 $n \to \infty$ 时,方程(1)的任何非平凡正解的极限不存在. 这个矛盾说明(5)是正确的.

其次:

$$x_{n_1+1} - \bar{x} = \frac{x_{n_1}}{(a + bx_{n_1})x_{n_1-1}} - \frac{1}{a + b\bar{x}} = \frac{bx_{n_1}(\bar{x} - x_{n_1-1}) + a(x_{n_1} - x_{n_1-1})}{(a + bx_{n_1})x_{n_1-1}(a\bar{x} + b)}.$$

因此,根据(5)知 $x_{n_1+1} - \bar{x} < 0$,这与(3)矛盾. 证明完毕.

2 应 用

G. Ladas 在文献[4]中提出了下列公开问题:

公开问题 C([4]中的公开问题1.5) 假定 $f \in C((0, \infty), (0, \infty))$, $p \geqslant 5$ 是一个正整数. 试寻找关于 f 和 p 的必要和(或)充分条件使得方程

$$x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{x_{n-1}}, \qquad n = 0, 1, \cdots \tag{6}$$

的每个正解是 p-周期解.

对此公开问题,我们有下列结果

定理 C_1 假定 f 是一个正比例函数: $f(x) = ax, a, x \in (0, \infty), p = 6$. 那么方程(6)的每个正解是6-周期解.

定理 C_2 假定 f 是有理函数 $f(x) = x/(a + bx), a, b, x \in (0, \infty), p = 5$. 那么方程(6)的每个正解是5-周期解的必要充分条件是 $b = a^2$.

分别按照定理1(ⅰ)和定理2,定理 C_1 和定理 C_2 的正确性是显然的.

关于上述公开问题,我们也有下述结果:

定理 C_3 假定函数 $f(x) = (\max\{x, 1\})/x^l$,这里 l 是一个非负整数,那么方程(6)的每一个正解是

(ⅰ) 5-周期解,当 $p = 5, l = 0$;

(ⅱ) 7-周期解,当 $p = 7, l = 1$.

证明

(ⅰ) 显然 $x_{n+1}=\dfrac{\max\{x_n,1\}}{x_{n-1}},\qquad n=0,1,2,\cdots.$

因此，

$$x_{n+5}=\frac{\max\{x_{n+4},1\}}{x_{n+3}}=\max\left\{\frac{\max\{x_{n+3},1\}}{x_{n+2}},1\right\}\Big/x_{n+3}=$$

$$\frac{\max\{\max\{x_{n+3},1\},x_{n+2}\}}{x_{n+3}x_{n+2}}=\frac{\max\{x_{n+3},\max\{x_{n+2},1\}\}}{x_{n+3}x_{n+3}}=$$

$$\frac{\max\{x_{n+3},x_{n+3}x_{n+1}\}}{x_{n+3}x_{n+2}}=\frac{\max\{x_{n+1},1\}}{x_{n+2}}=x_n.$$

结论正确.

(ⅱ) 明显地，

$$x_{n+1}=\frac{\max\{x_n,1\}}{x_nx_{n-1}},\qquad n=0,1,2,\cdots.\tag{7}$$

因此，

$$x_{n+7}=\frac{\max\{x_{n+6},1\}}{x_{n+6}x_{n+5}}=\frac{\max\left\{\dfrac{\max\{x_{n+5},1\}}{x_{n+5}x_{n+4}},1\right\}}{\dfrac{\max\{x_{n+5},1\}}{x_{n+5}x_{n+4}}x_{n+5}}=$$

$$\frac{\max\{\max\{x_{n+5},1\},x_{n+5}x_{n+4}\}}{\max\{x_{n+5},1\}x_{n+5}}=$$

$$\frac{\max\left\{\max\left\{\dfrac{\max\{x_{n+4},1\}}{x_{n+4}x_{n+3}},1\right\},\dfrac{\max\{x_{n+4},1\}}{x_{n+4}x_{n+3}}x_{n+4}\right\}}{\max\left\{\dfrac{\max\{x_{n+4},1\}}{x_{n+4}x_{n+3}},1\right\}\dfrac{\max\{x_{n+4},1\}}{x_{n+4}x_{n+3}}}=$$

$$\frac{\max\{\max\{\max\{x_{n+4},1\},x_{n+4}x_{n+3}\},\max\{x_{n+4},1\}x_{n+4}\}x_{n+4}x_{n+3}}{\max\{\max\{x_{n+4},1\},x_{n+4}x_{n+3}\}\max\{x_{n+4},1\}}=$$

$$\frac{\max\{\max\{1,x_{n+4},x_{n+4}x_{n+3}\},\max\{x^2_{n+4},x_{n+4}\}\}x_{n+4}x_{n+3}}{\max\{1,x_{n+4},x_{n+4}x_{n+3}\}\max\{x_{n+4},1\}}=$$

$$\frac{\max\{1,x_{n+4},x^2_{n+4},x_{n+4}x_{n+3}\}x_{n+4}x_{n+3}}{\max\{1,x_{n+4},x_{n+4}x_{n+3}\}\max\{x_{n+4},1\}}=$$

$$\frac{\max\{\max\{1,x_{n+4},x^2_{n+4}\},x_{n+4}x_{n+3}\}x_{n+4}x_{n+3}}{\max\{1,x_{n+4},x_{n+4}x_{n+3}\}\max\{x_{n+4},1\}}=$$

$$\frac{\max\{\max\{1,x^2_{n+4}\},x_{n+4}x_{n+3}\}x_{n+4}x_{n+3}}{\max\{1,x_{n+4},x_{n+4}x_{n+3}\}\max\{x_{n+4},1\}}=$$

$$\frac{\max\{1,x^2_{n+4},x_{n+4}x_{n+3}\}x_{n+4}x_{n+3}}{\max\{1,x_{n+4},x_{n+4}x_{n+3}\}\max\{x_{n+4},1\}}.$$

即，

$$x_{n+7}=\frac{\max\{1,x^2_{n+4},x_{n+4}x_{n+3}\}x_{n+4}x_{n+3}}{\max\{1,x_{n+4},x_{n+4}x_{n+3}\}\max\{x_{n+4},1\}}.\tag{8}$$

又按照方程(7)，

$$x_n=\frac{\max\{x_{n+1},1\}}{x_{n+1}x_{n+2}},\qquad n=-1,0,1,\cdots.$$

用类似于上面的方法,我们可得

$$x_n = \frac{\max\left\{\dfrac{\max\{x_{n+2},1\}}{x_{n+2}x_{n+3}},1\right\}}{\dfrac{\max\{x_{n+2},1\}}{x_{n+2}x_{n+3}}x_{n+2}} = \frac{\max\{\max\{x_{n+2},1\},x_{n+2}x_{n+3}\}}{\max\{x_{n+2},1\}x_{n+2}} =$$

$$\frac{\max\{1,x_{n+3}^2,x_{n+3}x_{n+4}\}x_{n+3}x_{n+4}}{\max\{1,x_{n+3},x_{n+3}x_{n+4}\}\max\{x_{n+3},1\}}. \tag{9}$$

根据(8)和(9),我们有

$$x_{n+7} = x_n, \qquad n = -1,0,1,\cdots. \tag{10}$$

现在我们证明(10).

明显地,条件 $x_{n+3},x_{n+4} \in (0,+\infty)$ 能被分成下列 4 种情况:

① $x_{n+3},x_{n+4} \in (0,1]$;

② $x_{n+3},x_{n+4} \in (1,\infty)$;

③ $0 < x_{n+3} < 1 < x_{n+4}$;

④ $0 < x_{n+4} < 1 < x_{n+3}$.

对于情形①,从(8)和(9),可得

$$x_{n+7} = x_n = x_{n+4}x_{n+3}.$$

对于情形②,从(8)我们有

$$x_{n+7} = \frac{\max\{x_{n+4}^2,x_{n+3}x_{n+4}\}x_{n+4}x_{n+3}}{x_{n+4}x_{n+3}x_{n+4}} = \max\{x_{n+4},x_{n+3}\}.$$

依据(9),也有 $x_n = \max\{x_{n+4},x_{n+3}\}$. 因此,$x_{n+7} = x_n$.

在情形③,分别根据(8)和(9),易见

$$x_{n+7} = \frac{x_{n+4}^2 \cdot x_{n+4}x_{n+3}}{x_{n+4} \cdot x_{n+4}} = x_{n+4}x_{n+3}.$$

而

$$x_n = \frac{\max\{1,x_{n+3}x_{n+4}\}x_{n+3}x_{n+4}}{\max\{1,x_{n+3}x_{n+4}\}} = x_{n+4}x_{n+3},$$ 因此也有 $x_{n+7} = x_n$.

在情形④,我们类似也可得到 $x_{n+7} = x_{n+4}x_{n+3} = x_n$.

因此(10)总是成立,证明完毕.

注: 如果定理 C_3 中"max"被换成"min",结论仍然成立.

[参 考 文 献]

[1] Ladas G. Open problems and conjectures[A]. In: *Proceedings of the First International Conference on Difference Equations*[C]. Basel: Gordon and Breach Science Publishers, 1994, 337 ~ 349.

[2] Grove E A, Janowski E J, Kent C M, et al. On the rational recursive sequence $x_{n+1} = (\alpha x_n + \beta)/[(\gamma x_n + \delta)x_{n-1}]$ [J]. *Comm Appl Nonlinear Anal*, 1994, 1(1): 61 ~ 72.

[3] 李先义,肖功福,唐衡生,等. 关于 Ladas G 的一个公开问题[J]. 中南工学院学报, 1997, 11(1): 26 ~ 31.

[4] Ladas G. Open problems and conjectures[J]. *J Diff Equ Appl*, 1995, 1(1): 1 ~ 3.

[5] Li Xianyi, Tang Hengsheng, Liu Yachun, et al. A conjecture by G Ladas[J]. *Applied Mathematics a Journal of Chinese University, Ser B*, 1998, 13(1): 39 ~ 44.

[6] Kocic V L, Ladas G. *Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order*[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.

Periodicity and Strict Oscillation for Generalized Lyness Equations

Li Xianyi[1], Xiao Gongfu[2]

(1. *Basic Science Department, Central-South Institute of Technology, Hengyang, Hunan* 421001, *P R China*;

2. *Basic Science Department, Hengyang Branch of Hunan University, Hengyang, Hunan* 421101, *P R China*)

Abstract: A generalized Lyness equation is investigated as follows

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{(a + bx_n)x_{n-1}}, \qquad n = 0,1,2,\cdots, \qquad (*)$$

where $a, b \in [0, \infty)$ with $a + b > 0$ and where the initial values x_{-1}, x_0 are arbitrary positive numbers. Some new results, mainly a necessary and sufficient condition for the periodicity of the solutions of Eq. (*) and a sufficient condition for the strict oscillation of all solutions of Eq(*), are obtained. As an application, the results solve an open problem presented by G. Ladas.

Key words: generalized Lyness equation; periodicity; strict oscillation; open problem