文章编号:1000-0887(2000)04-0431-06

一类不确定时滞系统的鲁棒稳定性*

年晓红

(长沙铁道学院 信息学院,长沙 410075)

(许政范推荐)

摘要: 给出了不确定时滞系统鲁棒稳定的若干结果,同时讨论了这类系统的稳定度,改进了前人关于时滞系统稳定性和鲁棒稳定性的一些结论,并给出了应用的例子.

关 键 词: 不确定系统; 鲁棒稳定性; 稳定度

中图分类号: O175.21;TP13 **文献标识码:** A

记 号

R—— 实数域

x—— 向量,$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $x_i \in R$

x^T—— 向量 x 的转置

A^T—— 矩阵 A 的转置

$\lambda_{max}(A)$—— 矩阵 A 的最大特征根

$\lambda_{min}(A)$—— 矩阵 A 的最小特征根

$\|x\|$ 向量 x 的范数; $\|x\| = (x^Tx)^{1/2}$

$\|A\|$ 矩阵 A 的范数; $\|A\| = \lambda_{max}^{1/2}(A^TA)$

$\lambda(A)$ 矩阵测度, $\mu(A) = \frac{1}{2}\lambda_{max}(A^T + A)$

引 言

时滞不仅是不稳定因素的一个主要来源而且大量的工程问题如化学过程、长距离气体运输等都可用含有时滞的系统来描述.在过去的几年中对时滞系统的研究引起了广泛的注意,Mori[1~3]、Hmamed[4]和 Wang 等[5]提出了许多检验时滞系统稳定性的结果.同时,许多学者对不确定时滞系统的稳定性进行了讨论,Thowsen[6]、Wang 和 Lin[7]、Cheres 等[8]、Cheres 等[9]提出了许多判断不确定时滞系统稳定性的结论.最近 Shyu K.K.和 Yan J.J.[10]给出了一些充分条件,这些结论推广和改进 Mori、Hmamed 等提出的一些结论[1,4].

本文中我们将在第1节用一种新的 Liapunov 函数研究不确定时滞系统的鲁棒稳定性和稳定度,同时给出时滞系统稳定的若干充分条件,这些条件改进了前人的一些相关结论.最后,我们将在第2节中给出应用本文结论的例子.

1 主要结论

考虑下面用微分差分方程描述的不确定时滞系统:

---

* **收稿日期:** 1997-07-22; **修订日期:** 1999-11-20

基金项目: 国家自然科学基金资助课题(69974031)

作者简介: 年晓红(1965~),男,教授,硕士(E-mail:xhnian@csru.edu.cn).

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}(t)=A_0x(t)+A_1x(t-h)+f_0(x(t),t)+f_1(x(t-h),t),\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t>0,\\&x(t)=\varphi(t),\qquad t\in[-h,0],\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

这里 $x\in R^n$ 为状态向量，A_0、$A_1\in R^{n\times n}$，$h>0$，$\varphi(t)$ 为连续的向量初值函数，f_0、f_1 为分别依赖于 $x(t)$、$x(t-h)$ 的不确定非线性扰动．一般假设 $\|f_0(x(t),t)\|$ 和 $\|f_1(x(t-h),t)\|$ 满足：

$$\left.\begin{aligned}&\|f_0(x(t),t)\|\leqslant\beta_0\|x(t)\|,\\&\|f_1(x(t-h),t)\|\leqslant\beta_1\|x(t-h)\|,\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

这里 $\beta_0,\beta_1>0$ 为给定的常量．

定义 1.1 系统(1)称为具有稳定度 $\beta>0$，若存在 $k>0$，使得(1)的解 $x(\cdot)$ 对所有的 t_1，$t_2\in\mathbf{R}^+$ 且 $t_1\leqslant t_2$，满足

$$\|x_{t_2}\|\leqslant k\|x_{t_1}\|\exp[-\beta(t_2-t_1)].$$

若在给定的扰动界限内系统(1)是稳定的，则称系统为鲁棒稳定的．

下面我们将推导系统(1)鲁棒稳定和具有给定稳定度的鲁棒稳定的几个充分条件．

定理 1.1 若存在正定矩阵 P 和实数 $\alpha>0$，使得矩阵

$$\begin{pmatrix}\lambda_{\min}(Q)-2\beta_0\|P\|-\alpha & -(\|PA_1\|+\beta_1\|P\|)\\-(\|PA_1\|+\beta_1\|P\|) & \alpha\end{pmatrix}$$

正定，则系统(1)稳定(这里 $A_0^{\mathrm T}P+PA_0=-Q$)．

证 设

$$V(x(t))=x^{\mathrm T}(t)Px(t)+\alpha\int_{t-h}^{t}x^{\mathrm T}(s)x(s)\mathrm{d}s,$$

则

$$\begin{aligned}\dot V(x(t))|_{(1)}=&-x^{\mathrm T}(t)Qx(t)+x^{\mathrm T}(t-h)A_1^{\mathrm T}Px(t)+x^{\mathrm T}(t)PA_1x(t-h)+\\&f_0^{\mathrm T}(x(t),t)Px(t)+x^{\mathrm T}(t)Pf_0(x(t),t)+f_1^{\mathrm T}(x(t-h),t)Px(t)+\\&x^{\mathrm T}(t)Pf_0(x(t-h),t)+\alpha x^{\mathrm T}(t)x(t)-\alpha x^{\mathrm T}(t-h)x(t-h)\leqslant\\&-(\lambda_{\min}(Q)-2\beta_0\|P\|-\alpha)\|x(t)\|^2+2(\|PA_1\|+\\&\beta_1\|P\|)\|x(t)\|\,\|x(t-h)\|-\alpha\|x(t-h)\|^2=\\&-(\|x(t)\|,\|x(t-h)\|)\times\\&\begin{pmatrix}\lambda_{\min}(Q)-2\beta_0\|P\|-\alpha & -(\|PA_1\|+\beta_1\|P\|)\\-(\|PA_1\|+\beta_1\|P\|) & \alpha\end{pmatrix}\times\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}\|x(t)\|\\\|x(t-h)\|\end{pmatrix}<0.$$

定理证毕．

推论 1.2 若条件

$$\lambda_{\min}(Q)>2(\beta_0\|P\|+\beta_1\|P\|+\|PA_1\|)$$

满足，则系统(1)鲁棒稳定．

证 设

$$\alpha=\frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q)-\beta_0\|P\|,$$

由定理 1.1 可得该结论.

考虑下面用微分差分方程描述的时滞系统:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h), \tag{3}$$

这里 $x \in R^n$ 为向量,矩阵 A_0 和 $A_1 \in R^{n\times n}, h > 0$.

该系统是系统(1)的一种特殊情况,由定理 1.1 我们可直接得到下面定理:

定理 1.3 如果存在正定矩阵 P 和实数 $\alpha > 0$,使得矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\min}(Q) - \alpha & -\|PA_1\| \\ -\|PA_1\| & \alpha \end{pmatrix}$$

正定,则系统(3)稳定(这里 $A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0 = -Q$).

推论 1.4 若条件 $\lambda_{\min}(Q) > 2\|PA_1\|$ 满足,则系统(3)稳定.

证 设

$$\alpha = \frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q),$$

由定理 1.3 可知:

$$\frac{1}{4}\lambda_{\min}^2(Q) > \|PA_1\|^2,$$

故:

$$\lambda_{\min}(Q) > 2\|PA_1\|,$$

推论得证.

注 1 若 $\gamma = \sqrt{\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P)}$,则 Shyu 和 Yan[10](1993) 的结论可写为:

$$\lambda_{\min}(Q) > 2\gamma\|PA_1\|. \tag{4}$$

因为 $\gamma \geqslant 1$,故推论 1.4 包含了条件(4),因此,本文的结论包含了 Mori 等[1](1983)、Hmamed[4](1986)和 Shyu 和 Yan[10](1993)得到的结论,我们将在后面给出一个例子加以说明.

定理 1.5 若存在正定矩阵 P 和实数 $\alpha > 0$ 使得矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\min}(Q) - 2\beta_0\|P\| - \alpha & -(e^{h\beta}\|PA_1\| + e^{h\beta}\beta_1\|P\|) \\ -(e^{h\beta}\|PA_1\| + e^{h\beta}\beta_1\|P\|) & \alpha \end{pmatrix}$$

正定,则系统(1)稳定并且具有稳定度 β(这里 $(A_0 + \beta I)^{\mathrm{T}}P + P(A_0 + \beta I) = -Q$).

证 设

$$z(t) = e^{\beta t}x(t), \tag{5}$$

系统(1)经变换(5)变为

$$\dot{z}(t) = (A_0 + \beta I)z(t) + e^{h\beta}A_1z(t-h) + \tilde{f}_0(z(t),t) + \tilde{f}_1(z(t-h),t), \tag{6}$$

这里:

$$\|\tilde{f}_0(z(t),t)\| = \|e^{\beta t}f_0(x(t),t)\| \leqslant \beta_0\|z(t)\|, \tag{7}$$

$$\|\tilde{f}_1(z(t-h),t)\| = \|e^{\beta t}f_1(x(t-h),t)\| \leqslant \beta_1e^{h\beta}\|z(t-h)\|. \tag{8}$$

为了简化推导,我们设:

$$\left.\begin{aligned} \bar{A}_0 &= A_0 + \beta I, \\ \bar{A}_1 &= e^{\beta h}A_1, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

(6)可化为

$$\dot{z}(t) = \bar{A}_0z(t) + \bar{A}_1z(t-h) + \tilde{f}_0(z(t),t) + \tilde{f}_1(z(t-h),t). \tag{10}$$

设 $V(z(t)) = z^{\mathrm{T}}(t)Pz(t) + \alpha\int_{t-h}^{t} z^{\mathrm{T}}(s)z(s)\mathrm{d}s.$

并记:

$$U = \begin{pmatrix} \lambda_{\min}(Q) - 2\beta_0 \| P \| - \alpha & -(\| P\bar{A}_1 \| + \mathrm{e}^{h\beta}\beta_1 \| P \|), \\ -(\| P\bar{A}_1 \| + \mathrm{e}^{h\beta}\beta_1 \| P \|) & \alpha \end{pmatrix},$$

则:

$$\dot{V}(z(t)) \mid_{(10)} \leqslant -(\| z(t) \|, \| z(t-h) \|)U\begin{pmatrix} \| z(t) \| \\ \| z(t-h) \| \end{pmatrix} < 0.$$

由于:

$$U = \begin{pmatrix} \lambda_{\min}(Q) - 2\beta_0 \| P \| - \alpha & -(\mathrm{e}^{h\beta} \| PA_1 \| + \mathrm{e}^{h\beta}\beta_1 \| P \|) \\ -(\mathrm{e}^{h\beta} \| PA_1 \| + \mathrm{e}^{h\beta}\beta_1 \| P \|) & \alpha \end{pmatrix},$$

故定理 1.5 得证.

推论 1.6 若条件

$$\beta_0 + \mathrm{e}^{h\beta}\beta_1 < \frac{\lambda_{\min}(Q) - 2\mathrm{e}^{h\beta} \| PA_1 \|}{2 \| P \|}$$

满足,则系统(1)稳定且具有稳定度 β.

证 设

$$\alpha = \frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q) - \beta_0 \| P \|,$$

由定理 1.5 可直接推出该结论.

注 2 Shyu 和 Yan[10](1993)给出的系统(2.1)具有稳定度 β 的稳定条件为

$$\beta_0 + \gamma\mathrm{e}^{h\beta}\beta_1 < \frac{\lambda_{\min}(Q) - 2\gamma\mathrm{e}^{h\beta} \| PA_1 \|}{2 \| P \|}.$$

与注 1 类似,我们可知推论 1.6 包含了 Shyu 和 Yan[10](1993)的结论.

考虑时滞系统(3),由定理 1.5 我们可得下面定理:

定理 1.7 若存在正定矩阵 P 和 $\alpha > 0$,使得矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\min}(Q) - \alpha & -\mathrm{e}^{h\beta} \| PA_1 \| \\ -\mathrm{e}^{h\beta} \| PA_1 \| & \alpha \end{pmatrix}$$

正定,则系统(3)稳定并且具有稳定度 β(这里$(A_0 + \beta I)^{\mathrm{T}}P + P(A_0 + \beta I) = -Q$).

推论 1.8 若条件

$$\lambda_{\min}(Q) > 2\mathrm{e}^{h\beta} \| PA_1 \|$$

满足,则系统(3)稳定且具有稳定度 β.

证 设

$$\alpha = \frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q),$$

由定理 1.7 可直接推出该结论.

2 例 子

例 2.1 考虑不确定时滞系统

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + f_0(x(t),t) + f_1(x(t-h),t),$$

这里:

$$A = \begin{pmatrix} -1.0 & -1.2 \\ 0.8 & -1.1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix};\ \beta_0 = 0.2;\ \beta_1 = 0.25.$$

设: $Q = 2I$,经计算:

$$P = \begin{pmatrix} 0.903\,837 & -0.120\,203 \\ -0.120\,203 & 1.040\,222 \end{pmatrix},\ \|P\| = 1.110\,2,\ \|PA_1\| = 0.478\,1,$$

$$\beta_0\|P\| + \beta_1\|P\| + \|PA_1\| = 1.955\,4 < 2,$$

由推论 1.2 可知该系统稳定.

例 2.2 考虑时滞系统

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h),$$

这里:

$$A_0 = \begin{pmatrix} -2 & -1.2 \\ -0.2 & -2.1 \end{pmatrix};\ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1.2 \\ 1 & 1.1 \end{pmatrix}.$$

经计算:

$$\mu(A_0) = -1.348\,2;\ \|A_1\| = 1.788\,9,$$

$$\mu(ZA_1) = 1.779\,8,\ \forall\ |Z| = 1,\ Z = \cos(W) + i\sin(W);$$

$$\forall W \in [0,2\pi].$$

显然,Mori 等[1](1983)和 Hmamed[4](1986)的结论都不适用于此例,因为:

$$\mu(A_0) + \|A_1\| = 0.440\,7 > 0,$$

$$\mu(A_0) + \|ZA_1\| = 0.431\,6 > 0.$$

若取 $Q = 2I$,则:

$$P = \begin{pmatrix} 0.518\,0 & -0179\,8 \\ -0.179\,8 & 0.579\,0 \end{pmatrix};\ \alpha = 1.412\,9;\ \|PA_1\| = 0.728\,4,$$

$$2 - 2\alpha\|PA_1\| = -0.037\,4 < 0.$$

用 K.K.Shyu 和 J.J.Yan[10](1993)的结论也不能判断该系统是否稳定,但由于

$$2 > 2\|PA_1\| = 1.456\,8,$$

由本文的推论 1.4 可知该系统稳定.

[参 考 文 献]

[1] Mori T, Noldus E, Kuwahara M. A way to stabilize linear systems with delayed state[J]. *Automatica*, 1983, **19**(5):571~573.

[2] Mori T. Criteria for asymptotic stability of linear time-delay systems[J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1985, **30**(2):158~161.

[3] Mori T, Kokame H. Stability of $\dot{X}(t) = AX(t) + BX(t-\tau)$ [J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1989, **34**(4):460~462.

[4] Hmamed A. On the stability of time delay systems: new result[J]. *International Journal of Control*, 1986, **43**(1):321~324.

[5] Wang S S, Chen B S, Lin T P. Robust stability of uncertain time-delay systems[J]. *International Journal of Control*, 1987, **46**(3):963~976.

[6] Thowsen A. Stabilization of a class of linear time delay systems[J]. *International Journal of Systems Science*, 1981, **12**(12):1485~1492.

[7] Wang S S, Lin T P. Robust stabilization of uncertain time-delay systems with sampled feedback[J].

International Journal of Systems Science, 1988, 19(3): 399 ~ 404.

[8] Cheres E, Gutman S, Palmor Z J. Robust stabilization of uncertain dynamic systems including state delay[J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1989, 34(11): 1199 ~ 1203.

[9] Cheres E, Palmor Z J, Gutman S. Quantitative measures of robustness for systems including delayed perturbations[J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1989, 34(11): 1203 ~ 1204.

[10] Shyu K K, Yan J J. Robust stability of uncertain time-delay systems and its stabilization by variable structure control[J]. *International Journal of Control*, 1993, 57(1): 237 ~ 246.

Robust Stability for a Type of Uncertain Time-Delay Systems

Nian Xiaohong

(*College of Information Engineering*, *Changsha Railway University*, *Changsha* 410075, *P R China*)

Abstract: Some new results for stability of uncertain time-delay systems are derived and the stability degree is also discussed. Some previous results for stability and robust stability of time-delay systems are improved. Lastly, examples are included to illustrate our results.

Key words: uncertain time-delay system; robust stability; stability degree