

文章编号: 1000-0887(2000) 02_01 19_07

加热弹性杆的热过屈曲分析*

李世荣¹, 程昌钧^{2,3}

(1. 甘肃工业大学 基础科学系, 兰州 730050; 2. 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;
3. 上海大学 力学系, 上海 200072)

摘要: 基于轴线可伸长细杆的过屈曲变形几何理论, 建立了两端轴向不可移的均匀加热直杆热弹性过屈曲行为的精确数学模型。这是一个包含杆轴线弧长在内的多未知函数的强非线性一阶常微分方程两点边值问题。采用打靶法和解析延拓法直接数值求解上述非线性边值问题, 分别获得了两端横向简支和夹紧杆的热过屈曲状态解, 给出了具有不同细长比杆的热过屈曲平衡路径。

关键词: 弹性直杆; 热过屈曲; 精确模型; 打靶法; 数值解
中图分类号: O343 **文献标识码:** A

引 言

受约束的弹性杆件在升温场内会产生轴向压应力, 当这种压力超过一定极限时杆将会发生超出原直线平衡状态的热屈曲。因此, 杆件热弹性稳定性问题的研究对处于变温环境工作的结构以及某些热敏弹性元件的设计是十分必要的。自从 Euler 和 Lagrange 研究压杆的弹性线(*elastica*) 开始, 已有大量研究机械载荷作用下弹性杆过屈曲问题的论文发表。但是, 这些工作大都是在杆轴线不可伸长假设下完成的^[1~4]。然而, 杆的热弹性屈曲是由于其轴线的热膨胀伸长引起的。因此, 在分析杆的热膨胀屈曲时必须考虑杆的轴线伸长。此时由于 $ds \neq dx$, 即弹性线的弧长元素与变形前的杆轴线元素不相等。这样, 弹性线弧长或轴线的伸长率就成为基本未知量之一。所以, 热屈曲问题的分析和求解在数学上会存在更大难度, 无法获得精确的解析解。有关弹性直杆热弹性稳定性线性问题的论述可见文献[5]。文[6]中采用简化了的几何和平衡方程推导出了两端简支直杆椭圆形式的热膨胀屈曲解。文[7]中通过引入弹性线弧长 $s(x)$ 并作为独立未知函数之一, 基于轴线可伸长杆的精确数学模型, 采用打靶法分析和讨论了压杆过屈曲分析中轴线不可伸长假设的合理性。本文拟在此基础上建立弹性直杆热过屈曲精确模型, 采用常微分方程两点边值问题的打靶法和解的解析延拓法, 获得随温度载荷变化的杆的热过屈曲状态解, 给出相应的平衡路径。

1 问题的数学模型

考虑一长为 l 的等截面弹性细杆, 分别考虑两端不可移简支和两端完全夹紧两种边界条

* 收稿日期: 1998_12_29; 修订日期: 1999_08_12

基金项目: 机械工业部教育司科研基金

作者简介: 李世荣(1957~), 男, 甘肃永登人, 系主任, 教授, 硕士, 主要研究方向为弹性结构稳定性及非线性振动。

件, 设杆从自然状态起的均匀升温为 T 。现分析当 T 超过临界值后杆的热屈曲状态。记杆轴线上一点在屈曲前的坐标为 (x, y) , 且 $x \in [0, l]$, $y \equiv 0$ 。当杆进入热屈曲状态后, 物质点 $(x, 0)$ 移到点 $(x + u, w)$, 其中 $u(x)$ 、 $w(x)$ 分别为点 $(x, 0)$ 在 x 和 y 方向的位移 (见图 1)。这里假设变形后杆的轴线仍在 $x-y$ 平面内, 且关于中点对称。由轴线可伸长杆的大变形理论^[4,7], 可得下列基本方程:

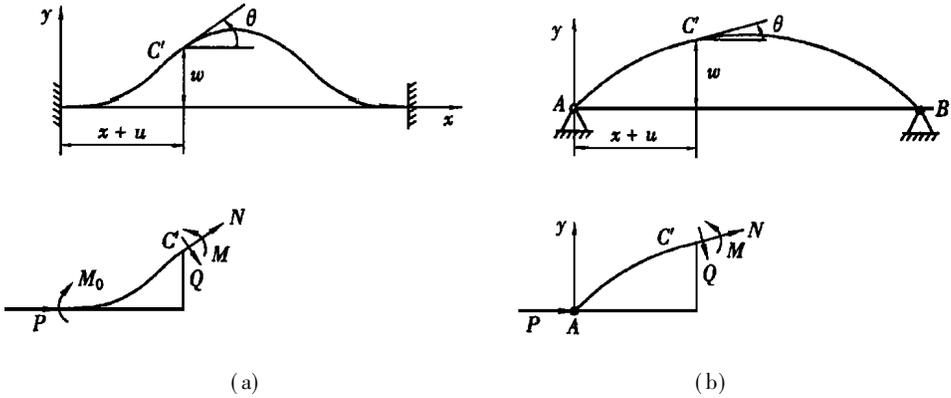


图 1 构件及其变形示意图

几何方程

$$\frac{ds}{dx} = R, \quad \frac{du}{dx} = R \cos \theta - 1, \quad \frac{dw}{dx} = R \sin \theta, \quad (1)$$

$$\varepsilon = R - 1, \quad \kappa = \frac{1}{R} \frac{d\theta}{dx}, \quad (2)$$

物理方程

$$N = EA(\varepsilon - \alpha T), \quad M = EI\kappa; \quad (3)$$

平衡方程

$$N + P \cos \theta = 0, \quad M + Pw = M_0; \quad (4)$$

其中 $s(x)$ 为挠曲线弧长, $R(x)$ 为轴线伸长率, $\theta(x)$ 为杆的横截面转角, $\varepsilon(x)$ 为轴线应变, $\kappa(x)$ 为挠曲线曲率, $N(x)$ 为轴向内力, $M(x)$ 为弯曲内力, P 为杆端水平反力, M_0 为杆端约束力矩, E 、 α 为弹性模量和热膨胀系数, A 、 I 分别为横截面面积和惯性矩。

由(2)~(4)式可得下列方程

$$R = -\frac{P}{EA} \cos \theta + \alpha T + 1, \quad (5)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{R}{EI} (-Pw + M_0). \quad (6)$$

采用量纲一化的变换

$$\left. \begin{aligned} (\xi, S, U, W) &= \frac{1}{l}(x, s, u, w), \quad \tau = \lambda^2 \alpha T, \\ \lambda &= l \left[\frac{A}{I} \right]^{1/2}, \quad p = \frac{Pl^2}{EI}, \quad m = \frac{M_0 l}{EI}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

可得下列量纲为一的控制方程

$$\frac{dS}{d\xi} = R, \quad \frac{dU}{d\xi} = R \cos \theta - 1, \quad (8)$$

$$\frac{dW}{d\xi} = R \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{d\xi} = R(m - pW), \quad (9)$$

其中

$$R = (-p \cos \theta + \tau) / \lambda^2 + 1 \quad (10)$$

考虑到屈曲构形的对称性, 只考虑 $\xi \in [0, 1/2]$, 于是可提出下列边界条件

$$S(0) = 0, U(0) = 0, W(0) = 0, \theta(0) = \beta, \quad (11)$$

$$U\left[\frac{1}{2}\right] = 0, \theta\left[\frac{1}{2}\right] = 0, \quad (12)$$

其中 β 为两端简支杆的杆端横截面转角, 对于两端夹紧杆 $\beta = 0$ 。这样, 杆的热过屈曲问题就归结为在边界条件(11)~(12)下, 求解非线性常微分方程(8)~(9)。这是一个包含4个未知函数 $S(\xi)$, $U(\xi)$, $W(\xi)$, $\theta(\xi)$ 和两个未知载荷参数 τ 和 p 的强非线性两点边值问题。 β 和 m 分别作为简支和夹紧条件下杆的热过屈曲控制参数。方程(8)~(12)是Kirchhoff直法线假设下弹性直杆热过屈曲问题的精确数学模型。由于引入了轴线伸长率 $R(\xi)$, 将弧长 $S(\xi)$ 作为基本未知函数, 这就使得问题的求解区域仍为变形前的杆长。然而, 这时问题的非线性程度却大大增强了。许多关于机械载荷作用下杆的过屈曲分析均是在 $R \equiv 1$ 的假设下完成的^[1~4]。若在(10)中令 $\tau = 0$, 并取消(11)中的第二个约束条件, 则(8)~(12)变为轴线可伸长压杆的过屈曲控制方程^[7]。文[6]的分析中采用了如下近似

$$u = 0, \frac{dx}{ds} = \cos \theta, \varepsilon = R - 1 \approx \frac{1}{2} \left[\frac{dw}{dx} \right]^2, N + P = 0, \quad (13)$$

这样杆的轴线总伸长可表示为

$$\Delta l = \int_0^1 (R - 1) dx \approx \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{dw}{dx} \right]^2 dx, \quad (14)$$

由此可使问题的非线性程度大为降低, 未知量减少。但是, 当考虑大变形时, 水平位移 u 不应该忽略, 而杆轴线伸长率的精确表达式应为(5)或者为

$$R = \frac{ds}{dx} = \left[\left[1 + \frac{du}{dx} \right]^2 + \left[\frac{dw}{dx} \right]^2 \right]^{1/2}. \quad (15)$$

2 边值问题(8)~(12)的打靶法

由于方程(8)~(12)的强非线性, 其解析解难以求得, 因此, 采用打靶法求其数值解。为表述方便起见, 将(8)~(12)式记为标准形式

$$\frac{d\mathbf{Y}}{d\xi} = \mathbf{H}(\xi, \mathbf{Y}; m) \quad (0 < \xi < 1/2), \quad (16a)$$

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{Y}(0) = \{0 \ 0 \ 0 \ \beta\}^T, \quad \mathbf{B}_2 \mathbf{Y}(1/2) = \{0 \ 0\}^T, \quad (16b, c)$$

其中

$$\mathbf{Y} = \{y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4 \ y_5 \ y_6\}^T = \{S \ U \ W \ \theta \ \tau \ p\}^T,$$

$$\mathbf{H} = \left\{ R \ R \cos y_4 - 1 \ R \sin y_4 \ R(m - y_3 y_6) \ 0 \ 0 \right\}^T,$$

$$R = (-y_6 \cos y_4 + y_5) / \lambda^2 + 1,$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

这里把参数 τ, p 统一作为未知函数处理是为了便于建立多参数非线性边值问题自动求解的标准过程。显然, 方程(16)与方程(8)~(12)等价。

考察与(16)相应的初值问题

$$\frac{dZ}{d\xi} = H(\xi, Z; m) \quad (\xi > 0), \quad Z(0) = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ d_1 \ d_2\}^T, \quad (17)$$

其中 $Z = \{z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4 \ z_5 \ z_6\}^T$; $D = \{d_1 \ d_2\}^T$ 为使初值问题(17)有意义的任意初始参数向量。对于确定的杆端转角 β 和约束力矩 m (其中一个常数为零), 设初值问题(17)的解在形式上可记为

$$Z(\xi; \beta, m, D) = Z(0) + \int_0^\xi H(\eta, Z) d\eta \quad (18)$$

则由常微分方程的理论可知, 如果存在 $D = D^* = \{d_1^* \ d_2^*\}$, 使得 $Z(\xi; \beta, m, D^*)$ 满足边界条件(16c), 亦即

$$B_2 Z \left[\frac{1}{2}; \beta, m, D^* \right] = \{0 \ 0\}^T, \quad (19)$$

则边值问题(16)的解为

$$Y(\xi) = Z(\xi; \beta, m, D^*) \quad (20)$$

3 数值方法及结果

由于问题(16)的强非线性, 初值问题(17)关于参数 D 的闭合解仍无法求得, 因此, 代数方程(19)的形式是未知的。这里, 采用将 Runge_Kutta 积分格式与 Newton_Raphson 迭代方法有机结合的打靶法^[8], 建立联立求解初值问题(17)与代数方程(19)的数值计算过程。由此可得边值问题(16)的解。

从问题的物理意义可知, 非线性边值问题(16)的线性化问题的最小特征值 $\tau_{cr} = \min(y_5) = \min(d_1^*)$, 即为杆热弹性失稳的临界温度。当 $\tau < \tau_{cr}$ 时, 杆处于未屈曲状态, 则有 $R \equiv 1$, $\theta \equiv 0$ 。由(10)式可知 $p = \tau$ 。当 $\tau > \tau_{cr}$ 时, 杆进入热过屈曲状态。方程(16)连续依赖于变形控制参数 β 或 m 的解 $Y(\xi)$, 可以通过从其线性化问题(控制参数为无限小)的解开始, 让控制参数小步递增的解析延拓法(analytical continuation)获得^[7]。从而可得杆的热过屈曲状态全局解。由此可得下列形式的平衡路径

$$\beta = \beta(d_1^*) = \beta(\tau), \quad (21)$$

$$m = m(d_1^*) = m(\tau), \quad (22)$$

$$f = W \left[\frac{1}{2} \right] = z_3 \left[\frac{1}{2}; D^*, \beta, m \right] = f(\tau), \quad (23)$$

$$\delta = 2S \left[\frac{1}{2} \right] - 1 = 2z_1 \left[\frac{1}{2}; \beta, m, D^* \right] - 1 = \delta(\tau), \quad (24)$$

其中 f 为杆中点的量纲为一的挠度, δ 为杆轴线的量纲为一的伸长。

表 1 两端不可移筒支杆的热过屈曲特性数据 ($\lambda = 120$)

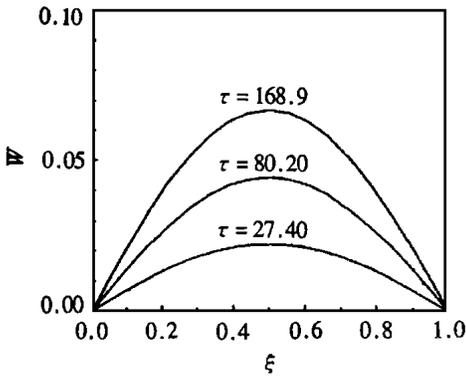
β	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°
$f \times 10^{-2}$	1.110 7	2.222 7	3.337 0	4.454 9	5.577 6	6.706 3	7.842 3	8.986 9	10.141	11.307
τ/τ_{cr}	1.443 8	2.776 4	5.001 9	8.126 5	12.159	17.113	23.001	29.842	37.656	46.468
p/p_{cr}	0.999 5	0.998 2	0.995 9	0.992 7	0.988 6	0.983 6	0.977 7	0.971 0	0.963 4	0.954 9

数值计算过程中, 相对误差控制限取 10^{-5} 。由(10)可知热过屈曲变形与杆的细长比 λ 有关。表1和表2中分别给出了 $\lambda = 120$ 的两端简支杆($m = 0$) 和 $\lambda = 160$ 的两端夹紧杆($\beta = 0$) 的热过屈曲特性数据。

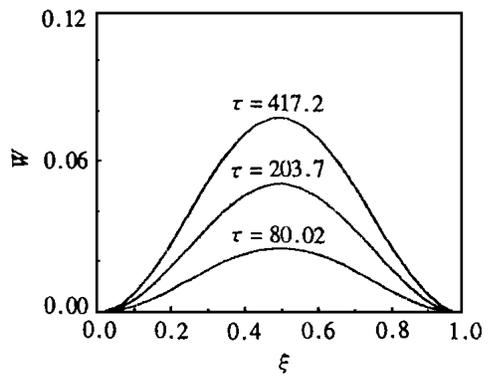
表2 两端不可移夹紧杆热过屈曲特性数据 ($\lambda = 160$)

m	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$f \times 10^{-2}$	1.012 6	2.027 5	3.047 1	4.073 7	5.110 0	6.158 6	7.222 3	8.304 4	9.408 4	10.538
τ/τ_{cr}	1.163 8	1.656 3	2.481 6	3.646 4	5.160 4	7.036 5	9.291 4	11.946	15.024	18.560
p/p_{cr}	0.999 6	0.998 5	0.996 5	0.993 9	0.990 4	0.986 2	0.981 0	0.975 1	0.968 3	0.960 5

随着量纲为一的温度的增加, 中点挠度 f 和杆端转角 β 呈单调增加趋势。但是, 杆端轴向反力 p 的值却从最大值 $p = p_{cr} = \tau_{cr}$ 开始逐渐减少。



(a) 简支杆 ($\lambda = 120, m = 0$)



(b) 夹紧杆 ($\lambda = 160, \beta = 0$)

图2 不同温度参数 τ 对应的热屈曲构形

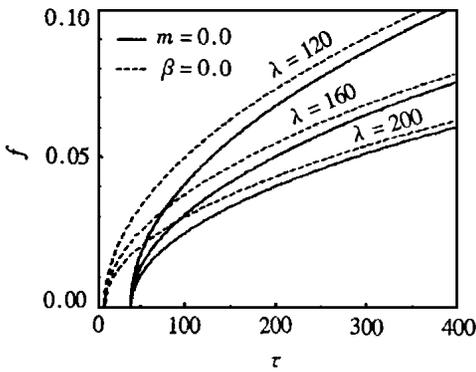


图3 不同参数 λ 对应的 $f \sim \tau$ 曲线

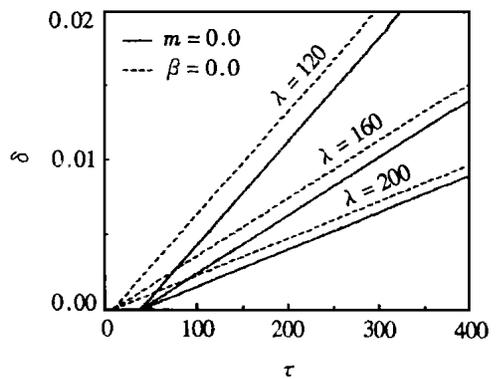


图4 不同参数 λ 对应的 $\delta \sim \tau$ 曲线

图2分别给出了两种约束的杆在不同温度载荷下的热过屈曲构形。图3~图6分别给出了在(21)~(24)式意义下的特征关系曲线。它们均是量纲为一的升温 τ 的单调增函数。其中曲线与 τ 轴的交点坐标即为杆的热屈曲临界温度。对两端简支杆 $\tau_{cr} = 9.8696 \approx \pi^2$; 对于两端夹紧杆 $\tau_{cr} = 39.478 \approx 4\pi^2$ 。显然, 临界温度与细长比无关。这是因为杆的临界失稳状态

仅反映过屈曲变形的无限小状态, 这是线性理论所反映的特征。由于杆的热过屈曲是由轴线方向的热膨胀引起的, 其整体变形程度与轴线伸长量有关, 因此, 热过屈曲变形与杆的细长比有关。与机械载荷作用下杆的过屈曲不同, 杆的热屈曲的产生和发展过程是一个较缓慢的单调增加过程。

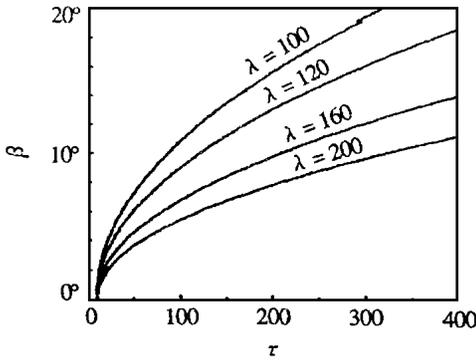


图 5 不同参数 λ 对应的 $\beta \sim \tau$ 曲线

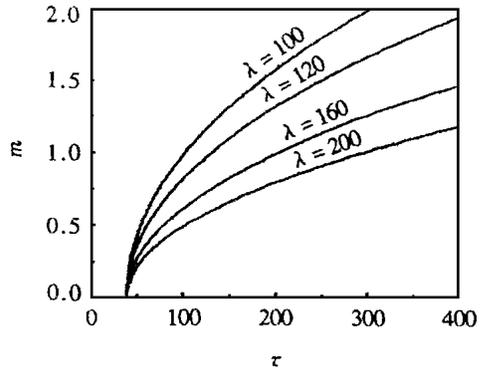


图 6 不同参数 λ 对应的 $m \sim \tau$ 曲线

4 结 论

(1) 文中建立的弹性直杆的热过屈曲数学模型是 Kirchhoff 直法线假设下的精确模型。其中描述和计及了轴线位移对变形和平衡状态的完整影响。特别是通过引入轴线的弧长 $s(x)$ 为基本未知量, 精确的考虑了杆的轴线的伸长。同时, 也使控制方程的求解区域仍然为杆的原始长度。

(2) 采用打靶法和解析延拓法获得了均匀加热的两端不可移弹性直杆热过屈精确解(数值意义上的)。结果表明, 杆的热屈曲是由其轴线方向的热膨胀引起的, 其整体变形程度与轴线伸长量密切相关。与机械载荷作用下杆的过屈曲不同, 杆的热过屈曲是一个缓慢变化和单调递增的过程。

[参 考 文 献]

- [1] Timoshenko S P, Gere J M. Theory of Elastic Stability [M]. 2nd Ed. New York: MacGraw_Hill, 1961, 76~ 82.
- [2] Tauchert T R, Lu W Y. Large deformation and post_buckling behavior of an initially deformed rod[J]. Int J Non_Linear Mech, 1987, 22(6): 511~ 520.
- [3] Wang C Y. Post_buckling of a champed_simply supported elastic[J]. Int J Non_Linear Mech, 1997, 32(6): 1115~ 1122.
- [4] 程昌钧, 朱正佑. 结构的分叉与屈曲[M]. 兰州: 兰州大学出版社, 1991, 83~ 88.
- [5] Nowinski J L. Theory of Thermal Elasticity With Applications [M]. Alphen aan den Rijn: Sijhoff and Noordhoff, 1978, 547~ 564.
- [6] 陈建康, 王汝鹏. 弹性杆热膨胀屈曲分析[J]. 力学与实践, 1994, 16(3): 23~ 26.
- [7] 李世荣. 压杆过屈曲分析中轴线不可伸假设的定量讨论[J]. 兰州大学学报, 1997, 33(4): 43~ 46.
- [8] William H P, Brain P F, San A T. Numerical Recipes ——the Art of Scientific Computing [M]. London: Cambridge University Press, 1986, 578~ 614.
- [9] Li Shirong, Yong Jingning. Thermal post_buckling of heated elastic rods with immovably clamped

ends [A]. In: Chien Weizang Ed. Proceedings of the International Conference on Non-Linear Mechanics [C]. Shanghai: Shanghai University Press, 1998, 282~ 285.

Analysis of Thermal Post-Buckling of Heated Elastic Rods

Li Shirong¹, Cheng Changjun^{2,3}

(1. Department of Basic Science, Gansu University of Technology, Lanzhou 730050, P R China;

2. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, P R China;

3. Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P R China)

Abstract: Based on the non-linear geometric theory of extensible rods, an exact mathematical model of thermal post-buckling behavior of uniformly heated elastic rods with axially immovable ends is developed, in which the arc length $s(x)$ of axial line and the longitudinal displacement $u(x)$ are taken as the basic unknown functions. This is a two point boundary value problem of first order ordinary differential equations with strong non-linearity. By using shooting method and analytical continuation, the nonlinear boundary value problems are numerically solved. The thermal post-buckled states of the rods with transversely simply supported and clamped ends are obtained respectively and the corresponding numerical data tables and characteristic curves are also given.

Key words: elastic straight rod; thermal post-buckling; non-linear mathematical model; shooting method; numerical solution