应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 01_0001_10

_伪压缩型映象的具误差的 Ishikawa 和 Mann 迭代程序的收敛性问题

张石生

(四川大学 数学系, 成都 610064)

摘要: 引入 _伪压缩型映象的概念, 并研究了此类映象的具误差的 Ishikawa 和 Mann 迭代程序的收敛性问题 本文结果改进和发展了许多人的最新结果

关 键 词: _伪压缩型映象; 增生映象; 伪压缩映象; _强增生映象; _半压缩映象; 具误差的 Ishikawa 迭代程序; 具误差的 Mann 迭代程序

中图分类号: O177 91 文献标识码: A

1 引言及预备知识

本文中处处设 E 是一实 Banach 空间, E^* 是 E 的共轭空间, , 表 E 和 E^* 间的配对 如果 D 是 E 之一非空集, 我们用 2^D 表 D 的一切非空子集的族 映象 $J: E \quad 2^{E^*}$ 是由下式定义的正规对偶映象:

$$J(x) = \left\{ f \quad E^*: \ x, f \ = \ f \quad x \ , \ f \ = \ x \right\}, x \quad E$$

定义 1 设 D 是 E 之一非空集, $T: D \quad 2^E$ 是一多值映象 T 称为 _伪压缩型映象, 如果存在一点 $x^* \quad D$ 及一严格增的函数 $:[0, \ ) \quad [0, \ )$, $(0) = 0$, 使得对每一 $x \quad D$, 存在 $j(x - x^*) \quad J(x - x^*)$ 满足

$$- x^*, j(x - x^*) \qquad x - x^* \quad ^2 - \quad (\quad x - x^* \quad) \qquad Tx \tag{1}$$

应该指出: _伪压缩型映象是一类比较广泛的非线性型映象, 它包含许多重要的非线性单值和多值映象为特例

1) 取 $(s) = (1 - k)s^2$, $s \quad 0$, $0 < k < 1$, 则定义 1 等价于: 存在 $x^* \quad D$, 使得对任一 $x \quad D$, 存在 $j(x - x^*) \quad J(x - x^*)$ 满足

$$- x^*, j(x - x^*) \qquad k \quad x - x^* \quad ^2, \qquad Tx \tag{2}$$

这类映象称为单调型映象, 它首先由 Dunn[1] 在 Hilbert 空间的框架下引入和研究 以后在 Chidume[2] 及 Chang_Tan[3] 在 Banach 空间的框架下作了进一步的研究

2) 如果 $T: D \quad E$ 是一单值映象且 $F(T)$ (其中 $F(T)$ 表 T 在 D 中的不动点全体的集合) 取 $(s) = \quad (s) \quad s$, 其中 $:[0, \ ) \quad [0, \ )$ 是一严格增的函数, $(0) = 0$, 则定义 1 等价于对任一 $x \quad D$ 及任一 $x^* \quad F(T)$, 存在 $j(x - x^*) \quad J(x - x^*)$ 使得

收稿日期: 1998_08_07; 修订日期: 1999_06_09
基金项目: 国家自然科学基金资助课题(19971058)
作者简介: 张石生(1934~), 男, 教授, 已发表论文 290 余篇, 获省部级奖 6 项.

$$Tx - x^*, j(x - x^*) \quad x - x^* \quad ^2 - (\quad x - x^* \quad) \quad x - x^* \tag{3}$$

这类映象称为 _半压缩映象, 它首先由Osilike[4]引入和研究

3) 特别, 如果 $T: D \quad E$ 是一单值映象满足条件: 存在一严格增的函数 $:[0, \quad) \quad [0, \quad), \quad (0) = 0$, 使得 $x, y \quad D$, 存在 $j(x - y)$ 满足

$$Tx - Ty, j(x - y) \quad x - y \quad ^2 - (\quad x - y \quad) \quad x - y \tag{4}$$

则称 T 为 _严格伪压缩映象 这类映象首先在Osilike[4] 中引入和研究 显然, 如果 $F(T)$, 则 _严格伪压缩映象必是 _半压缩映象

4) 特别在(4) 中取 $(s) = (1 - \quad) s, 0 < \quad < 1$, 于是 $x, y \quad D$, 存在 $j(x - y) \quad J(x - y)$ 使得

$$Tx - Ty, j(x - y) \quad x - y \quad ^2 \tag{5}$$

这类映象 T 称为强(或严格) 伪压缩映象(见[11])

当 $= 1$ 时, 满足(5) 的映象 T 称为伪压缩映象

5) 如果 $I - T: D \quad E$ (其中 I 是恒等映象) 为强伪压缩映象(或伪压缩映象), 则称 T 为强增生映象(或增生映象), 于是由4), $x, y \quad D$, 存在 $j(x - y) \quad J(x - y)$ 使得

$$(I - T)x - (I - T)y, j(x - y) \quad x - y \quad ^2, 0 < \quad < 1,$$

(或 $(I - T)x - (I - T)y, j(x - y) \quad x - y \quad ^2$)

从而有

$$Tx - Ty, j(x - y) \quad (1 - \quad) \quad x - y \quad ^2, \tag{6}$$

$$(\text{或 } Tx - Ty, j(x - y) \quad 0) \tag{7}$$

关于增生映象的概念首先由Browder[5]及Kato[6]于 1967 年独立引入 这一类映象的引入与研究Banach 空间中的非线性发展方程解的存在性问题紧密相关 关于增生映象理论, Browder 证明了如下的结果: 设 T 是 E 上 的局部Lipschitz 的增生映象, 则初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + Tu(t) = 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

是可解的

定义 2 设 D 是 E 之一非空集, $T: D \quad 2^E$ 是一多值映象, $x_0 \quad D$ 是一给定的点, 如果由下式定义的序列 $\{x_n\}, \{y_n\} \quad D$:

$$\left.\begin{array}{l} x_{n+1} \quad (1 - \quad _n) x_n + \quad _n T y_n, \\ y_n \quad (1 - \quad _n) x_n + \quad _n T x_n, \end{array} (n = 0, 1, 2, \quad)\right\} \tag{8}$$

则称 $\{x_n\}$ 为 T 的Ishikawa迭代序列[7], 其中 $\{ \quad _n\}, \{ \quad _n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的满足某些条件的实数列

如果 $_n = 0, n = 0, 1, 2, \quad$, 即

$$x_{n+1} \quad (1 - \quad _n) x_n + \quad _n T x_n, n = 0, 1, 2, \tag{9}$$

称为 T 的Mann 迭代序列

定义 3 设 D 是 E 之一非空集, $T: D \quad 2^E$ 是一多值映象, $x_0 \quad D$ 是一给定的点 如果由下式定义的序列 $\{x_n\}, \{y_n\} \quad D$:

$$\left.\begin{array}{l} x_{n+1} \quad _n x_n + \quad _n T y_n + \quad _n u_n, \\ y_n \quad \hat{}_n x_n + \hat{}_n T x_n + \hat{}_n v_n \end{array} \quad n \quad 0, \right\} \tag{10}$$

称为 T 的具误差的Ishikawa 迭代序列, 其中 $\{u_n\}, \{v_n\}$ 是 E 中的两个序列, $\{ \quad _n\}, \{ \quad _n\}, \{ \quad _n\}$,

$\{\hat{\ }_n\}$, $\{\hat{\ }_n\}$ 和 $\{\hat{\ }_n\}$ 均为 $[0, 1]$ 中的满足下述条件:

$$_n + \ _n + \ _n = \hat{\ }_n + \hat{\ }_n + \hat{\ }_n = 1 (n = 0, 1, 2, \ ),$$

及其他条件的实数序列 特别, 如果 $\hat{\ }_n = \hat{\ }_n = 0, n = 0, 1, 2,$, 则由下式定义的序列 $\{x_n\}$ D:

$$x_{n+1} \quad _n x_n + \ _n T x_n + \ _n u_n \quad (n = 0, 1, 2, \ ), \tag{11}$$

称为 T 的具误差的Mann 迭代序列, 其中 $\{u_n\}$ 是 E 中的序列, 而 $\{\ _n\}$, $\{\ _n\}$, $\{\ _n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的序列, 且满足 $_n + \ _n + \ _n = 1, n \quad 0$

注 由定义 3 易知, Mann 迭代序列, Ishikawa 迭代序列都是具误差的 Ishikwaw 迭代序列的特例

关于强增生映象、强伪压缩映象、单调型映象、 _强增生映象及 _半压缩映象方程的解及其不动点的 Ishikawa 和 Mann 迭代程序的逼近问题, 近年来已被许多人讨论过(见, 例如[1~4, 9~22])

本文的目的是引入 _伪压缩型映象的概念, 并研究单值和多值 _伪压缩型映象不动点的具误差的 Ishikawa 和 Mann 迭代程序的逼近问题, 而映象不必满足 Lipschitz 条件 本文结果是引文[1~4, 9~23] 中相应结果的改进和推广

下面的引理在本文中起到重要的作用

引理 1 1[9] 对任意的 $x, y \quad E$ 有

$$\| x + y \|^2 \quad \| x \|^2 + 2 \ y, j(x + y) \ , \quad j(x + y) \quad J(x + y),$$

其中 J 是 $E \quad 2^{E^*}$ 的正规对偶映象

引理 1 2[23] 设 $\{a_n\}_{n=0}$, $\{b_n\}_{n=0}$, $\{c_n\}_{n=0}$ 是三个非负实数列满足条件: 存在正整数 n_0, 当 $n \quad n_0$ 时

$$a_{n+1} \quad (1 - t_n) a_n + b_n + c_n,$$

其中 $\{t_n\}_{n=0}$ 是 $[0, 1]$ 中的序列, $\sum_{n=0} t_n = \ $, $b_n = 0(t_n)$ 且 $\sum_{n=0} c_n <$ 则 $\lim_n a_n = 0$

引理 1 3 设 E 是实的光滑的 Banach 空间, 则正规对偶映象 $T: E \quad E^*$ 是单值的

2 具误差的 Ishikawa 迭代程序的收敛性

定理 2 1 设 E 是一实的光滑的Banach 空间, D 为 E 中之一非空集, $T: D \quad 2^E$ 是一 _伪压缩型映象, 即存在一点 $x^* \quad D$ 和一严格增的函数 $: [0, \ ) \quad [0, \ ), \ (0) = 0$, 使得 $x \quad D$ 有

$$- \ x^*, J(x - x^*) \quad \| x - x^* \|^2 - \ (\| x - x^* \|), \quad Tx \tag{12}$$

1 如果 $q \quad D$ 是 T 的任一不动点, 则 $q = x^*$, 故 T 在 D 中至多有一不动点

2 如果 $T(D) = \bigcup_{x \ D} Tx$ 是 E 中的有界集且存在 $x_0 \quad D$ 使得由下式定义的具误差的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ D:

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= \ _n x_n + \ _n \ _n + \ _n u_n, \quad _n \quad T y_n, \\ y_n &= \hat{\ }_n x_n + \hat{\ }_n \ _n + \hat{\ }_n v_n, \quad _n \quad T x_n, \end{aligned}\right\} n \quad 0, \tag{13}$$

其中 $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ 是 E 中的两个有界序列, $\{\ _n\}$, $\{\ _n\}$, $\{\ _n\}$, $\{\hat{\ }_n\}$, $\{\hat{\ }_n\}$, $\{\hat{\ }_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的满足下列条件的序列:

( ) $_n + \ _n + \ _n = \hat{\ }_n + \hat{\ }_n + \hat{\ }_n = 1, n = 0, 1, 2, \ ;$

( ) $_n$ $0(n$ $);$

( ) $\sum_{n=0} {}_n =$, $\sum_{n=0} {}_n <$;

如果(13) 中出现的序列$\{\ _n\},\{\ _n\}$满足条件:

$$_n - \ _{n+1} \quad 0 \quad (n \quad), \tag{14}$$

而且 $$= \inf_{n \ N_1} \frac{(\ x_{n+1} - x^* \ )}{x_{n+1} - x^* \ ^2} > 0, \tag{15}$$

其中 $N_1 = \{n \quad N($非负整数全体的集合$): x_{n+1} \quad x^*\}$ 则具误差的 Ishikawa 迭代程序 $\{x_n\}$强收敛于x^* 特别如果 q 是T 在D 中的不动点(因而 $q = x^*$), 则$\{x_n\}$强收敛于q

证 1) 如果 q D 是T 的不动点, 即 q Tq, 于是由(12)

$$q - x^*, J(q - x^*) \qquad q - x^* \ ^2 - \ (\ q - x^* \ ),$$

即, $$q - x^* \ ^2 \qquad q - x^* \ ^2 - \ (\ q - x^* \ )$$

因而有 $q = x^*$, 故 T 在D 中至多有一不动点

2) 由定理的假设, $T(D)$ 及$\{u_n\},\{v_n\}$是E 中的有界集和有界序列, 故存在常数 M 使得

$$M = \max\left\{\begin{matrix}\sup\{\ - x^* \ : \ Tx, x \ D\} + \ x_0 - x^* \ , \\ \sup\{\ u_n - x^* \ , \ v_n - x^* \ : n = 0, 1, 2,\end{matrix}\right\} < \ , \tag{16}$$

下证 $$x_{n+1} - x^* \qquad M, \quad n \quad 0 \tag{17}$$

事实上, 当 $n = 0$ 时有

$$x_1 - x^* = \ _0(x_0 - x^*) + \ _0(\ _0 - x^*) + \ _0(u_0 - x^*)$$

$$_0 \ x_0 - x^* \ + \ _0 + G_0 - x^* + + C_0 + u_0 - x^* + [\ M\#$$

设当 $n = k - 1, k \setminus 1$ 时(17) 成立, 下证(17) 当 $n = k$ 时也成立# 事实上

$$+ x_{k+1} - x^* + = + A_k(x_k - x^*) + B_k(G_k - x^*) + C_k(u_k - x^*) + [$$

$$A_k + x_k - x^* + + B_k + G_k - x^* + + C_k + u_k - x^* + [\ M\#$$

故(17) 成立, 从而有

$$\max_{n \setminus 0}\{+ A_n(x_n - x^*) + B_n(G_n - x^*) + C_n(u_n - x^*) +\} [\ M,$$

$$\max_{n \setminus 0}\{+ A_n(x_n - x^*) + B_n(N_n - x^*) + C_n(v_n - x^*) +\} [\ M\#$$

因 E 是光滑的 Banach 空间, 故 J 是单值映象, 于是由(13), (12) 及引理 1.1,

$$+ x_{n+1} - x^* + ^2 = + A_n(x_n - x^*) + B_n(G_n - x^*) + C_n(u_n - x^*) + ^2 [$$

$$A_n^2 + x_n - x^* + ^2 + 2B_n 3 \ G_n - x^*, J(x_{n+1} - x^*) 4 +$$

$$2C_n 3 \ u_n - x^*, J(x_{n+1} - x^*) 4 =$$

$$A_n^2 + x_n - x^* + ^2 + 2B_n 3 \ G_n - N_{n+1}, J(x_{n+1} - x^*) 4 +$$

$$2B_n 3 \ N_{n+1} - x^*, J(x_{n+1} - x^*) 4 + 2C_n 3 \ u_n - x^*, J(x_{n+1} - x^*) 4 [$$

$$A_n^2 + x_n - x^* + ^2 + 2B_n \# \ B_n + 2B_n\{+ x_{n+1} - x^* + ^2 - 5(+ x_{n+1} - x^*) +\} +$$

$$2C_n \# + u_n - x^* + \# + x_{n+1} - x^* +, \tag{18}$$

其中 $B_n = + G_n - N_{n+1} + \# + x_{n+1} - x^* + \#$ 由条件(14) 及(17) 知$B_n \ y \ 0(n \ y \ ])\#$ 另由(16) 和(17) 知

$$+ u_n - x^* + \# + x_{n+1} - x^* + [\ M^2\#$$

因 $B_n \ y \ 0(n \ y \ ])$, 故存在 n_0, 当 $n \setminus n_0$ 时 $2B_n < 1$, 于是由(18) 得知, 当 $n \setminus n_0$ 时有

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1}-x^*\| \le\ & \frac{\alpha_n^2}{1-2\beta_n}\|x_n-x^*\|^2+\frac{2\beta_n\cdot B_n}{1-2\beta_n}-\\
& \frac{2\beta_n}{1-2\beta_n}\varphi(\|x_{n+1}-x^*\|)+2\gamma_n\cdot M^2/(1-2\beta_n)\le\\
& \frac{(1-\beta_n)^2}{1-2\beta_n}\|x_n-x^*\|^2+\frac{1}{1-2\beta_n}\cdot 2\beta_n\cdot B_n-\\
& \frac{2\beta_n}{1-2\beta_n}\varphi(\|x_{n+1}-x^*\|)+\frac{2\gamma_n M^2}{1-2\beta_n}.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

现定义两个集合 $N_1=\left\{n\in N:\|x_{n+1}-x^*\|\neq 0\right\}$, $N_2=\left\{n\in N:\|x_{n+1}-x^*\|=0\right\}$. 于是由(19)当 $n\in N_1$ 且 $n\ge n_0$ 时有

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1}-x^*\|^2\le\ & \frac{(1-\beta_n)^2}{1-2\beta_n}\|x_n-x^*\|^2+\frac{1}{1-2\beta_n}\cdot 2\beta_n\cdot B_n-\\
& \left(\frac{2\beta_n}{1-2\beta_n}\frac{\varphi(\|x_{n+1}-x^*\|)}{\|x_{n+1}-x^*\|^2}\right)\cdot\|x_{n+1}-x^*\|^2+\frac{2\gamma_n M^2}{1-2\beta_n}\le\\
& \frac{(1-\beta_n)^2}{1-2\beta_n}\|x_n-x^*\|^2+\frac{1}{1-2\beta_n}\cdot 2\beta_n\cdot B_n-\\
& \frac{2R\beta_n}{1-2\beta_n}\cdot\|x_{n+1}-x^*\|^2+\frac{1}{1-2\beta_n}\cdot 2\gamma_n M^2,
\end{aligned}
\tag{20}
$$

(其中 R 由(15)定义, 不妨设 $R<1$). 由条件(15)知 $R>0$. 又当 $n\ge n_0$ 时, $2\beta_n<1$; 故当 $n\ge n_0$ 时, $1-2\beta_n(1-R)>R$. 于是当 $n\in N_1$ 且当 $n\ge n_0$ 时, 由(20)化简可得

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1}-x^*\|^2\le\ & \frac{1}{1-2\beta_n(1-R)}\left\{((1-\beta_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\beta_n\cdot B_n+2\gamma_n M^2\right\}\le\\
& (1-R\beta_n)\|x_n-x^*\|^2+\frac{2\beta_n\cdot B_n}{R}+\frac{2\gamma_n M^2}{R}.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

在引理1.2中取 $a_n=\|x_n-x^*\|^2$, $t_n=R\beta_n$, $b_n=\frac{2\beta_n\cdot B_n}{R}$, $c_n=\frac{1}{R}2\gamma_n M^2$. 于是由引理1.2知 $a_n\to 0\ (n\to\infty,\ n\in N_1)$, 即 $x_n\to x^*\ (n\to\infty,\ n\in N_1)$. 于是由(11)知 $x_{n+1}\to x^*\ (n\to\infty,\ n\in N_1)$. 又当 $n\in N\setminus N_1$ 时, $x_{n+1}=x^*$. 于是知 $x_n\to x^*\ (n\to\infty)$. 定理2.1证毕.

注 在定理2.1中, 如果 $T:D\to E$ 是单值映象, 从而 $\xi_n=Ty_n$, $\eta_n=Tx_n$, $n=0,1,2,\cdots$, 于是由定理2.1可得下面的定理2.2.

定理2.2 设 E 是一实的光滑的Banach空间, D 是 E 之一非空凸集, $T:D\to D$ 是一单值的一致连续的 φ_伪压缩型映象, 即存在 $x^*\in D$ 和一严格增的函数 $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\varphi(0)=0$, 使得 $\forall x\in D$ 有

$$\langle Tx-x^*, J(x-x^*)\rangle\le\|x-x^*\|^2-\varphi(\|x-x^*\|).$$

1) 如果 $q\in D$ 是 T 的任一不动点, 则 $q=x^*$;

2) 如果 $T(D)$ 是 E 中的有界集, $x_0\in D$ 是任一点, 定义序列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 如下:

$$
\left.\begin{aligned}
x_{n+1}&=\alpha_n x_n+\beta_n Ty_n+\gamma_n u_n,\\
y_n&=\alpha'_n x_n+\beta'_n Tx_n+\gamma'_n v_n,
\end{aligned}\right\}\ (n=0,1,2,\cdots),
\tag{22}
$$

其中 $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ 是 D 中的有界序列, $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{\alpha'_n\}$, $\{\beta'_n\}$, $\{\gamma'_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的满足定理2.1中的条件( ), ( ), ( ) 且 $\beta'_n\to 0$, $\gamma'_n\to 0$ 的实数列, 如果

$$= \inf_{n I N_1} \frac{5(+ x_{n+1} - x^* +)}{+ x_{n+1} - x^* +^2} > 0$$

则具误差的 Ishikawa 迭代程序 $\{x_n\}$ 强收敛于 x^* # 特别, 如果 $q\ I\ D$ 是 T 的不动点, 则 $x_n\ y\ q$#

证　我们只要证明定理 211 中的条件(14) 满足即可# 事实上, 由(22) 有

$$y_n - x_{n+1} = (\hat{A}_n - A_n) x_n + \hat{B}_n T x_n - B_n T y_n + \hat{C}_n v_n - C_n u_n \#$$

故由定理的条件知 $B_n\ y\ 0$, $\hat{B}_n\ y\ 0$, $C_n\ y\ 0$, $\hat{C}_n\ y\ 0$, 故 $\hat{A}_n - A_n\ y\ 0$, 从而 $y_n - x_{n+1}\ y\ 0 (n\ y\ ])$# 由 T 的一致连续性, 从而有 $Ty_n - Tx_{n+1}\ y\ 0(n\ y\ ])$# 故定理 211 中的条件(14) 满足# 定理证毕#

3　5_伪压缩型映象的 Ishikawa 迭代序列的收敛性

在本节中我们进一步研究, 5_伪压缩型映象的 Ishikawa 迭代序列的收敛性#

定理 311　设 E 是一实的光滑的 Banach 空间, D 是 E 中之一非空集, $T: D\ y\ 2^E$ 是一 5_伪压缩映象#

1) 如果 $q\ I\ D$ 是 T 的任一不动点, 则 $q = x^*$, 其中 x^* 是(12) 中出现的点#

2) 如果 $T(D)$ 是 E 中的有界集, 且存在 $x_0\ I\ D$ 使得由下式定义的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}, \{y_n\} < D$:

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= A_n x_n + B_n G_n,\ G_n\ I\ Ty_n \\ y_n &= \hat{A}_n x_n + \hat{B}_n N_n,\ N_n\ I\ Tx_n \end{aligned}\right\} (n \setminus 0), \qquad (23)$$

其中 $\{A_n\}, \{B_n\}, \{\hat{A}_n\}, \{\hat{B}_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的实数列且满足条件:

( ) $A_n + B_n = \hat{A}_n + \hat{B}_n = 1, n = 0, 1, 2, , ;$

( ) $B_n\ y\ 0(n\ y\ ]),\ \mathop{E}\limits_{n=0}^{]} B_n =]$;

且(23) 中出现的 $\{N_n\}, \{G_n\}$ 满足

$$+ G_n - N_{n+1} +\ y\ 0(n\ y\ ])\# \qquad (24)$$

则 $\{x_n\}$ 强收敛于 x^* # 如果 $q\ I\ D$ 是 T 的不动点, 则 $\{x_n\}$ 强收敛于这一不动点#

证　在定理 211 中取 $C_n = \hat{C}_n = 0, n = 0, 1, 2, , ,$ 当

$$R = \inf_{n I N_1} \frac{5(+ x_{n+1} - x^* +)}{+ x_{n+1} - x^* +^2} > 0$$

时, 则定理 311 的结论由定理 211 直接可得#

下证: 在定理 311 的条件下, 当 $R = 0$ 时, 定理 311 的结论仍成立#

事实上, 当 $R = 0$ 时, 由 5 的严格增性, 存在子序列 $\{x_{n_j+1}\}_{n_j I N_1} < \{x_n\}$ 使得

$$+ x_{n_j+1} - x^* +\ y\ 0 \quad (n_j\ y\ ],\ n_j\ I\ N_1)\# \qquad (25)$$

由于 $B_n\ y\ 0$ 及 $B_n := + G_n - N_{n+1} + \# + x_{n+1} - x^* +\ y\ 0$# 于是对任给的 $E > 0$, 存在 $n_{j0}\ I\ N_1$, 使得

$$+ x_{n_{j0}+1} - x^* + < E \qquad (26)$$

且当 $n \setminus n_{j0}$ 时

$$B_n < \frac{5(E)}{M^2}, \quad B_n < \frac{5(E)}{2}, \qquad (27)$$

其中 M 是由(16) 定义的常数#

下证 $\forall k, k = 1, 2, \cdots$,
$$\|x_{n_{j_0}+k} - x^*\| \le \varepsilon, \tag{28}$$
先证
$$\|x_{n_{j_0}+2} - x^*\| \le \varepsilon, \tag{29}$$
设相反, $\|x_{n_{j_0}+2} - x^*\| > \varepsilon$. 由 φ 的严格增性, 即有 $\varphi(\|x_{n_{j_0}+2} - x^*\|) > \varphi(\varepsilon)$. 于是由(19)(其中 $\gamma_n = 0$) 即得

$$\|x_{n_{j_0}+2} - x^*\| \le \frac{(1-\beta_{n_{j_0}+1})^2}{1-2\beta_{n_{j_0}+1}}\|x_{n_{j_0}+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{1-2\beta_{n_{j_0}+1}} 2\beta_{n_{j_0}+1}\cdot\beta_{n_{j_0}+1} -$$
$$\frac{2\beta_{n_{j_0}+1}}{1-2\beta_{n_{j_0}+1}}\cdot\varphi(\varepsilon) = \|x_{n_{j_0}+1} - x^*\|^2 + \frac{\beta^2_{n_{j_0}+1}}{1-2\beta_{n_{j_0}+1}}\|x_{n_{j_0}+1} - x^*\|^2 +$$
$$\frac{1}{1-2\beta_{n_{j_0}+1}}\cdot\beta_{n_{j_0}+1}\cdot\varphi(\varepsilon) - \frac{2\beta_{n_{j_0}+1}}{1-2\beta_{n_{j_0}+1}}\cdot\varphi(\varepsilon) \le$$
$$\|x_{n_{j_0}+1} - x^*\|^2 + \frac{\beta_{n_{j_0}+1}}{1-2\beta_{n_{j_0}+1}}\left\{\beta_{n_{j_0}+1}\cdot M^2 - \varphi(\varepsilon)\right\}(\text{由}(27)\text{知}) \le$$
$$\|x_{n_{j_0}+1} - x^*\|^2(\text{由}(26)\text{知}) < \varepsilon,$$

这与假设相矛盾. 故(27) 成立, 类似可证(28) 对一切 $k \ge 1$ 成立. 由 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 得知 $x_n \to x^*\ (n \to \infty)$. 证毕

由定理 3.1 可得下面的结果

定理 3.2 设 E 是一实的光滑的 Banach 空间, D 是 E 之一非空凸集, $T: D \to D$ 是一单值的一致连续的 φ-伪压缩型映象.

1) 如果 $q \in D$ 是 T 的任一不动点, 则 $q = x^*$, 其中 x^* 是(12) 中出现的点;

2) 如果 $T(D)$ 是 E 中的有界集, $x_0 \in D$ 是任一点, 定义序列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 如下:

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= \alpha_n x_n + \beta_n T y_n, \\ y_n &= \alpha'_n x_n + \beta'_n T x_n, \end{aligned}\right\}(n \ge 0), \tag{30}$$

其中 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\alpha'_n\}$, $\{\beta'_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中满足下述条件的序列:

(i) $\alpha_n + \beta_n = \alpha'_n + \beta'_n = 1, n \ge 0$;

(ii) $\beta_n \to 0, \beta'_n \to 0 (n \to \infty)$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n = \infty$.

则 $\{x_n\}$ 强收敛于 x^*. 如果 $q \in D$ 是 T 的不动点, 则 $\{x_n\}$ 强收敛于 q.

证 因 $T: D \to D$ 是单值的, 故 $\xi_n = Tx_n$, $\eta_n = Ty_n$. 为了证明定理 3.2, 我们只要证明定理 3.1 中的条件(24) 成立, 事实上, 由(30) 有
$$y_n - x_{n+1} = (\alpha'_n - \alpha_n)x_n + \beta'_n T x_n - \beta_n T y_n.$$
因 $T(D)$ 有界, 由(16), (17) 易知 $\{x_n\}$, $\{Tx_n\}$, $\{Ty_n\}$ 均为 D 中的有界列. 于是由 $\beta_n \to 0$, $\beta'_n \to 0 (n \to \infty)$ 知 $\alpha'_n - \alpha_n \to 0 (n \to \infty)$, 故 $y_n - x_{n+1} \to 0 (n \to \infty)$. 由 T 的一致连续性得知
$$\|Ty_n - Tx_{n+1}\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$
故定理 3.2 的结论由定理 3.1 得知.

注 1) 因 p-一致光滑 Banach 空间, $p > 1$, 必是光滑的 Banach 空间, 而 Lipschitz U-半压缩映象必是一致连续的 φ-伪压缩型映象, 又在 Osilike[4, 定理 2] 的条件下 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 必是 D 中的有界列, 因而定理 3.2 是[4, 定理 2] 的改进和推广.

2) 因具有不动点的强伪压缩映象是 5_伪压缩型映象的特例, 从而定理311和定理312以及定理211, 定理212 是 Chidume[11, 定理2], [12, 定理4], [13, 定理4], [2, 定理1]; Deng_Ding[16, 定理1], Tan_Xu[21, 定理312, 定理412], Dunn[1, 定理1], Liu[23, 定理2] 以及 Chang 等[9, 10] 和 Reich[19, 20] 中相应结果多方面的改进和推广#

3) 定理211, 212 及定理311 和定理312 也是 Osilike[17], Chidume_Osilike[14] 及 Zhou[22] 中相应结果的改进和推广#

4 5_伪压缩型映象的 Mann 迭代程序的收敛性

在本节中我们研究 5_伪压缩型映象的具误差的 Mann 迭代程序及 Mann 迭代程序的收敛性, 我们有下面的结果#

定理411 设 $E, D, T: D$ y 2^E 满足定理211中的条件# 如果 $T(D)$ 是 E 中的有界集且存在 x_0 I D 使得由下式定义的具误差的 Mann 迭代序列 $\{x_n\}$ < D:

$$x_{n+1} = A_n x_n + B_n N_n + C_n u_n,\ N_n \ I\ Tx_n,\ n \ \backslash\ 0, \qquad (31)$$

其中 $\{u_n\}$ 是 E 中的有界列, $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, $\{C_n\}$ 是[0, 1] 中的满足下述条件的序列:

( ) $A_n + B_n + C_n = 1,\ n = 0, 1, 2, ,\ ;$

( ) B_n y $0,\ \sum_{n=0}^{]} B_n =],\ \sum_{n=0}^{]} C_n <],$

如果(31) 中出现的序列 $\{N_n\}$ 满足条件

$$+ N_n - N_{n+1} + \ y\ 0 \quad (n\ y\ ]),$$

而且

$$R = \inf_{n I N_1} \frac{5(+ x_{n+1} - x^* +)}{+ x_{n+1} - x^* +^2} > 0,$$

其中 $N_1 = \{n\ I\ N: x_{n+1}\ X\ x^*\}$, 则 x_n y x^*, 特别如果 q I D 是 T 在 D 中的不动点, 因而 $q = x^*$, 则 x_n y q#

定理412 设 E, D 与定理212中的相同, $T: D$ y D 是一单值的一致连续的 5_伪压缩型映象# 如果 $T(D)$ 是 E 中之一有界集, x_0 I D 是任一点, 定义序列 $\{x_n\}$ 如下:

$$x_{n+1} = A_n x_n + B_n T x_n + C_n u_n,\ n \ \backslash\ 0, \qquad (32)$$

其中 $\{u_n\}$ 是 D 中的有界列, 而 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, $\{C_n\}$ 是[0, 1] 中的满足下述条件的序列:

( ) $A_n + B_n + C_n = 1,\ n \ \backslash\ 0;$

( ) B_n y $0,\ \sum_{n=0}^{]} B_n =],\ \sum_{n=0}^{]} C_n <]$#

如果

$$R = \inf_{n I N_1} \frac{5(+ x_{n+1} - x^* +)}{+ x_{n+1} - x^* +^2} > 0,$$

则具误差的 Mann 迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 x^*, 如果 q I D 是 T 的不动点, 则 x_n y q#

证 在定理211 和定理212 中取 $B_n = C_n = 0,\ n \ \backslash\ 0$# 于是定理411和定理412的结论分别由定理211和定理212 直接可得#

定理413 设 $E, D, T: D$ y 2^E 与定理311中所满足的条件相同# 设存在 x_0 I D 使得由下式定义的 Mann 迭代序列 $\{x_n\}$ < D:

$$x_{n+1} = A_n x_n + B_n N_n,\quad N_n \ I\ Tx_n,\ n \ \backslash\ 0, \qquad (33)$$

其中 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ 是[0, 1] 中满足下述条件的序列:

( ) $A_n + B_n = 1, n = 0, 1, 2, ,$;

( ) $B_n y 0(n y]), \sum_{n=0}^{]} B_n =]$ #

如果 $+ N_n - N_{n+1} + y 0(n y])$, 则 $x_n y x^*$, 特别, 如果 $q I D$ 是 T 的不动点则 $x_n y q$#

证 在定理 311 中取 $B_n = 0, n \setminus 0$# 则结论由定理 311 直接可得#

定理 414 设 E, D 与定理 312 中的相同, $T: D y D$ 是一单值的一致连续的 5_伪压缩型映象# 如果 $T(D)$ 是 E 中的有界集, x_0 是 D 中任一点, 定义 Mann 迭代序列 $\{x_n\}$ 如下:

$$x_{n+1} = A_n x_n + B_n T x_n, \quad n \setminus 0, \tag{34}$$

其中 $\{A_n\}, \{B_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中满足下述条件的序列:

( ) $A_n + B_n = 1, n \setminus 0$;

( ) $B_n y 0, \sum_{n=0}^{]} B_n =]$,

则 $\{x_n\}$ 强收敛于 x^*# 如果 $q I D$ 是 T 的不动点, 则 $x_n y q$#

证 在定理 312 中取 $B_n = 0, P n \setminus 0$# 则定理 414 的结论由定理 312 直接可得#

注 定理 412 是 Osilike[18] 中结果的改进和推广#

[参 考 文 献]

[1] Dunn J C. Iterative construction of fixed points for multivalued operators of the monotone type[J]. J Functi Anal, 1978, 27, 38~ 50.

[2] Chidume C E. Iterative construction of fixed points for multivalued operators of the monotone type [J]. Appl Anal, 1996, 23: 209~ 218.

[3] Chang S S, Tan K K. Iteration processes of fixed point for operators of monotone type in Banach spaces[J]. Bull Austral Math Soc, 1998, 57: 433~ 445.

[4] Osilike M O. Iterative solution of nonlinear equations of the U_strongly accretive type[J]. J Math Anal Appl, 1996, 200: 259~ 271.

[5] Browder F E. Nonlinear mappings of nonexpansive and accretive type in Banach spaces[J]. Bull Amer Math Soc, 1967, 73: 875~ 882.

[6] Kato T. Nonlinear semi_groups and evolution equations[J]. J Math Soc Japan, 1964, 19: 508~ 520.

[7] Ishikawa S. Fixed point by a new iteration method[J]. Proc Amer Math Soc, 1974, 14(1): 147~ 150.

[8] Mann W R. Mean value methods in iteration[J]. Proc Amer Math Soc, 1953, 4: 506~ 510.

[9] Chang S S. On Chidume. s open questions and approximate solutions of multivalued strongly accretive mappings equations in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, 216: 94~ 111.

[10] Chang S S. Some problems and results in the study of nonlinear analysis [J]. Nonlinear Anal, 1997, 30(7): 4197~ 4208.

[11] Chidume C E. Approzimation of fixed points of strongly pseudo_contractive mappings[J]. Proc Amer Math Soc, 1994, 120(2): 545~ 551.

[12] Chidume C E. Steepest descent approximations for accretive operator equations[J]. Nonlinear Anal, 1996, 26: 299~ 311.

[13] Chidume C E. Iterative solution of nonlinear equations with strongly accretive operators[J]. J Math Anal Appl, 1993, 192: 502~ 518.

[14] Chidume C E, Osilike M O. Ishikawa process for nonlinear Lipschitz strongly accretive mappings [J]. J Math Anal Appl, 1995, 192: 727~ 741.

15] Deng Lei. On Chidume. s open questions[J]. J Math Anal Appl, 1993, 174(2): 441~ 449.

[16] Deng Lei, Ding Xieping. Iterative approximation of Lipschitz striongly pseudo_contractive mappings in uniformly smooth Banach spaces[J]. Nonlinear Anal, 1995, 24: 981~ 987.

[17] Osilike M O. Stable iteration procedures of strong pseudo_contractions and nonlinear operator equations of the accretive type[J]. J Math Anal Appl, 1996, 204: 677~ 692.

[18] Osilike M O. Iterative construction of fixed points of multi_valued operators of the accretive type[J]. Soochow J Math, 1996, 22(4): 485~ 494.

[19] Reich S. An iterative procedure for constructing zeros of accretive sets in Banach spaces[J]. Nonlinear Anal, 1978, 2: 85~ 92.

[20] Reich S. Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces[J]. Math Anal Appl, 1980, 85: 287~ 292.

[21] Tan K K, Xu H K. Iterative solutions to nonlinear equations of strongly accretive operators in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1993, 178: 9~ 21.

[22] Zhou H Y. Remarks on Ishikawa iteration[J]. Chinese Sci Bull, 1977, 42: 126~ 128.

[23] Liu L S. Ishikawa and Mann iterative process with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1995, 194: 114~ 125.

[24] Zeidler E. Nonlinear Functional Analysis and Its Applications[M]. Part II, Monotone Operators, New York/ Berlin: Springer_Verlag, 1985.

On the Convergence Problems of Ishikawa and Mann Iterative Processes With Error for 5 _Pseudo Contractive Type Mappings

Zhang Shisheng

(Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P R China)

Abstract: The purpose of this paper is to introduce the concept of 5 _pseudo contractive type mapping and to study the convergence problem of Ishikawa and Mann iterative processes with error for this kind of mappings. The results presented in this paper improve and extend many authors. recent results.

Key words: 5 _pseudo contractive type mapping; accretive mapping; pseudo_contractive mapping; 5 _strongly accretive mapping; 5 _hemi_contractive mapping; Ishikawa iterative processes with error; Mann iterative process with error