应用数学和力学, 第 21 卷 第 1 期(2000 年 1 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 01_0061_06

两同心旋转球间流动的弱解的存在唯一性*

封 卫兵[1], 李开泰[2]

(1. 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072; 2. 西安交通大学 理学院软件所, 西安 710049)

(黄永念推荐)

摘要: 研究了两个同心旋转球间的轴对称不可压缩的粘性流动. 该流动广泛应用于大气物理和地球物理等学科中, 为了得到该流动的流函数_速度形式的 Navier_Stokes 方程的弱解的存在性和唯一性, 首先发现了该方程中非线性项之间的关系, 并引入一个有限维的辅助问题, 通过紧性而得到了结论.

关 键 词: Navier_Stokes 方程; 流函数; Gelerkin 方法
中图分类号: O241.82 文献标识码: A

引 言

在本文中, 我们研究了两个同心旋转球之间的轴对称不可压缩粘性流动. 两个同心旋转球之间的流动又称为球 Couette 流动. 作为一个简单的模型, 研究它能够为揭示流动失稳转捩至湍流这一重大理论课题的规律提供线索; 同时, 由于球 Couette 流动更象全球大气流动, 研究它也能为研究大气物理提供一个粗略的模型, 为这一方面的研究提供一些理论指导.

Khlebution[1] 通过实验发现, 在低 Reynolds 数下的球 Conette 流是轴对称和关于赤道反射对称的, 当内外球之间的间隙 η 介于(0.12, 0.24)时(这里的间隙是指: 通过量纲一化而使内球半径化为 1 后, 内外球之间的距离), 球 Cuette 流在 (r, θ) 子午面上存在三种形式, 即 0_涡, 1_涡和 2_Taylor 涡. Marcus 和 Tuckerman[2,3] 利用拟谱方法和配置法验证了前面的实验结果, 并得到: 当 $\eta = 0.18$ 时, $Re_{c_1} = 645 \pm 0.05$, $Re_{c_1} = 740 \pm 0.05$, 即当 $Re \leqslant Re_{c_1}$ 时, 没有 Teylor 涡出现, 而当 Re 介于 Re_{c_1} 和 Re_{c_2} 之间时, 出现 1_Taylor 涡, 而当 $Re \geqslant Re_{c_2}$ 时, 出现 2_Taylor 涡.

从以上的介绍中可以看出, 此前对两同心旋转球间流动的研究一直还停留在实验和数值模拟上, 并未对描述两同心旋转球间流动的流函数_速度形式的 Navier_Stokes 方程解的存在和唯一性等问题进行证明. 这一来是因为, 该问题虽是轴对称的但它毕竟还是一个三维问题; 二来是在球坐标系下的 Navier_Stokes 方程非常繁杂, 使得讨论它的存在性与唯一性极为困难.

在本文中, 我们从原始的 Navier_Stokes 方程出发, 利用张量的方法推导得描述不定常的轴对称的同心旋转球间的不可压缩流体流动方程的流函数_速度形式. 然后系统地探讨了该方

* 收稿日期: 1997_08_11; 修订日期: 1999_07_13
基金项目: 自然科学基金(19671067)和攀登计划资助
作者简介: 封卫兵(1962~), 男, 讲师, 博士后, 研究方向: 偏微分方程的计算方法, 已发表论文 10 余篇.

程弱解的存在性和唯一性•

1　Navier_Stokes 方程及其流函数_速度形式

设两同心旋转球的内外球半径分别为 R_1 和 R_2, 其旋转角速度分别为 ω_1 和 ω_2, 这样的两同心旋转球间的常密度流体的流动的Navier_Stokes 方程和边界条件为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\nabla p-\lambda\nabla^2\boldsymbol{u}=0,\\&\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0,\\&\boldsymbol{u}\,|_{r=1}=\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi,\ \boldsymbol{u}\,|_{r=\eta}=\omega\eta\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi,\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

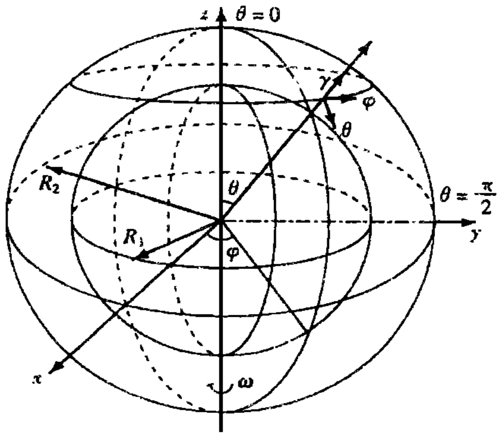

图 1　两同心旋转球及其球坐标

这里我们均用量纲一的量, $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\phi, \boldsymbol{e}_\theta)$ 是球形坐标的局部坐标架, $\boldsymbol{u}$ 为速度, p 为压力, $\omega=\omega_1/\omega_2$, $\eta=R_1/R_2$•

利用张量将上述方程化为如下的流函数_速度形式

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\lambda L^2U+J_1(U+u_\phi^*,\psi)-J_2(U+u_\phi^*,\psi)=0,\tag{2}$$

$$\frac{\partial(L^2\psi)}{\partial t}-\lambda L^4\psi+J_1(L^2\psi,\psi)+2J_2(U+u_\phi^*,U+u_\phi^*)+J_2(L^2\psi,\psi)=0,\tag{3}$$

其中子午面上的流函数 ψ 与速度$\boldsymbol{u}$ 在子午面上的投影满足下面的关系

$$u_r=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\psi),\ u_\theta=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\psi),$$

算子 L^2 的定义为

$$L^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\,\cdot)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,\cdot)\right),$$

而 $u_\phi^*=\left(\dfrac{(\eta^3\omega-1)r}{\eta^3-1}+\dfrac{\eta^3(1-\omega)}{(\eta^3-1)r^2}\right)\sin\theta$ 是定常情形下的Stokes 问题的解的速度的 ϕ_分量, 而 $U+u_\phi^*$ 表示的是方位角速度, 而其中的 J_1 和 J_2 由下式给出

$$J_1(u,v)=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(u,r\sin\theta v)}{\partial(r,\theta)},\ J_2(u,v)=u\left(\frac{\cos\theta}{r\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)\text{•}$$

该方程的边界条件为

$$U\,|_{r=1}=U\,|_{r=\eta}=0,\ \psi\,|_{r=1}=\frac{\partial\psi}{\partial r}\,|_{r=1}=\frac{\partial\psi}{\partial r}\,|_{r=1}=\psi\,|_{r=\eta}=\frac{\partial\psi}{\partial r}\,|_{r=\eta}=0,\tag{4}$$

初始条件为

$$U(0)=U_0,\ \psi(0)=\psi_0,\tag{5}$$

其中 U_0 和 ψ_0 是某些给定的函数•

我们令微分算子和向量函数为

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}I&0\\0&-L^2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-L^2&0\\0&L^4\end{pmatrix},\ \Psi(r,\theta)=\begin{pmatrix}U(r,\theta)\\\psi(r,\theta)\end{pmatrix},$$

则方程(2)~(3)可以写为

$$\partial(\boldsymbol{R}\Psi)/\partial t+\lambda\boldsymbol{A}\Psi+J(\Psi,\Psi)+D(\Psi)=\boldsymbol{f},\tag{6}$$

记 $\boldsymbol{u}=(u,\phi)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}=(v,\xi)^{\mathrm{T}}$, 则上式中的 $J(\cdot,\cdot)$ 和 $D(\cdot)$ 可表示为

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\begin{pmatrix}J_1(u,\xi)-J_2(v,\phi)\\-J_1(L^2\xi,\phi)-J_2(u,v)-J_2(v,u)-J_2(L^2\xi,\phi)\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}(u)=\begin{pmatrix}J_1(u_\phi^*,\phi)-J_2(u_\phi^*,\phi)\\-2J_2(u,u_\phi^*)-2J_2(u_\phi^*,u)\end{pmatrix},\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}0\\2J_2(u_\phi^*,u_\phi^*)\end{pmatrix}.$$

2 方程的弱形式

我们在这里通篇采用的是球坐标, 则积分的体积元是 $r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$. 但由于这里所有的函数均是轴对称的, 因而积分变为二维的, 即只须考虑任一子午面上的面元 $r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$. 在本文中, 所有的空间、内积和范数的权均为 $r^2\sin\theta$. Sobolev 空间 $W^{s,p}(\Omega)$ 和 $W_0^{s,p}(\Omega)$ 的定义和性质可以在[4]或[5]中找到, 我们记 $\|\cdot\|_{s,p,\Omega}$ 为 $W^{s,p}(\Omega)$ 的范数, 若 $p=2$, 我们记这些空间为 $H^s(\Omega)$ 和 $H_0^s(\Omega)$. 显然, 对任意的 $u,v\in L^2(\Omega)$,

$$(u,v)=\int_\Omega uvr^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,\ \|u\|_{0,\Omega}^2=(u,u).$$

这些记号也可用于向量空间 $(W^{s,p}(\Omega))^n$ 和 $(H^s(\Omega))^n$.

在方程(6)的弱形式中, 我们将要用到内积

$$a_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{Ru},\boldsymbol{v})=(u,v)+(-L^2\phi,\xi)=(u,v)+(L\phi,L\xi),$$

其中 $\boldsymbol{u}=(u,\phi)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}=(v,\xi)^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{L}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot),\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cdot)\right)^{\mathrm{T}}.\tag{7}$$

可以验证 $a_1(\cdot,\cdot)$ 能够作为 $(C_0^\infty(\Omega))^2$ 中的内积, 因此它可以诱导出范数

$$|\boldsymbol{u}|^2=(u,u)+(L\phi,L\phi),$$

那么, 我们可以定义一个空间

$$X=(C_0^\infty(\Omega))^2 \text{ 关于范数 } |\cdot| \text{ 的闭包},$$

而且对任意的 $\boldsymbol{u}\in(C_0^\infty(\Omega))^2$, 满足

$$\|u\|_{0,\Omega}^2+\|\phi\|_{1,\Omega}^2\leqslant|\boldsymbol{u}|^2,$$

从而, 空间 $X\subset L^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$. 同理可证

$$a_2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{Au},\boldsymbol{v})=(-L^2u,v)+(L^4\phi,\xi)=(Lu,Lv)+(L^2\phi,L^2\xi),$$

也能够作为 $(C_0^\infty(\Omega))^2$ 中的内积, 因此它也可以诱导出范数

$$\|\boldsymbol{u}\|^2=(Lu,Lu)+(L^2\phi,L^2\phi),$$

那么, 我们也可以定义一个空间

$$Y=(C_0^\infty(\Omega))^2 \text{ 关于范数 } \|\cdot\| \text{ 的闭包},$$

而且对任意 $\boldsymbol{u}\in(C_0^\infty(\Omega))^2$, 满足

$$\|u\|_{1,\Omega}^2+\|\phi\|_{2,\Omega}^2\leqslant\|\boldsymbol{u}\|^2,$$

从而, 空间 $Y\subset H_0^0(\Omega)\times H_0^2(\Omega)$.

方程(6)的弱解是函数 $\Psi\in L^2(0,T;Y)$, 使得

$$a_1\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}, \Phi\right) + \lambda a_2(\Psi, \Phi) + b(\Psi, \Psi, \Phi) + d(\Psi, \Phi) = (\boldsymbol{f}, \Phi), (\forall \Phi \in Y), \tag{8}$$

$$\Psi(0) = \Psi_0. \tag{9}$$

其中 $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (J(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}),\ d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (D(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v})$.

我们发现上述的三线性形式满足下列的反对称关系式:

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = -b(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}). \tag{10}$$

引理 2.1 对任意的 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in Y$, 我们有

$$|b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| \leqslant C|\boldsymbol{u}|^{\frac14}\|\boldsymbol{u}\|^{\frac34}\|\boldsymbol{v}\||\boldsymbol{w}|^{\frac14}\|w\|^{\frac34},\ |d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \leqslant C|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|, \tag{11}$$

其中 C 为只依赖于 Ω 的正常数.

3 弱解的存在性

在本节, 我们将证明(8)~(9)的弱解的存在性. 首先, 我们考虑一个辅助的半离散的问题和它的解, 然后我们用紧性来达到目的.

我们现在考虑辅助问题. 注意到 Y 的定义, 我们知 $Y \subset H_0^1(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$, 由于 $H_0^1(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ 是可分的, 因此空间 Y 也是可分的, 从而存在一组基函数$\{e_i\}$, 它们在 Y 中线性独立并稠密. 设 N 为任意的正整数, 且记 Y_N 为由 $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2, \cdots, N$ 张成的有限维空间. 对任意的 N, 我们定义(8)~(9)的半离散逼近解为 $\Psi^N(t) = \sum_{k=1}^{N} \Psi_k(t)\boldsymbol{e}_k \in C^1(0, T; Y_N)$, 满足

$$\left.\begin{aligned} & a_1\left(\frac{\partial}{\partial t}\Psi^N, \Phi\right) + \lambda a_2(\Psi^N, \Phi) + b(\Psi^N, \Psi^N, \Phi) + \\ & \qquad d(\Psi^N, \Phi) = (\boldsymbol{f}, \Phi), \qquad (\forall \Phi \in Y_n) \\ & \Psi^N(0, r, \theta) = \Psi_0^N, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

其中 $\Psi_0^N \in Y_N$ 且 $\|\Psi_0^N\| \leqslant \|\Psi_0\|$, $\|\Psi_0 - \Psi_0^N\| \to 0$, 当 $N \to \infty$.

引理 3.1 若 $\Psi^N(t)$ 是(12)在区间 I 上的解, 则

a) 若 $I = [0, T')$ 或 $[0, T']$, $0 < T' \leqslant T$, 其中 T' 依赖于 N, 则

$$\sup_{t\in I}|\Psi^N|^2 \leqslant C|\Psi_0^N|^2 + C\|\boldsymbol{f}\|^2_{L^2(0, T; Y')}. \tag{13}$$

b) 若 $I = [0, T']$, $0 < T' \leqslant T$, 则

$$\lambda\|\psi^N\|^2_{L^2(0, T'; Y)} \leqslant C|\Psi_0^N|^2 + C\|\boldsymbol{f}\|^2_{L^2(0, T; Y')}. \tag{14}$$

其中 C 为依赖于 λ 和 Ω 的一个正常数.

在(12)中取 $\Phi = \Psi^N$, 并利用三线性形式 $b(\cdot, \cdot, \cdot)$ 的反对称性即该引理可得证.

定理 3.1 若 $\boldsymbol{f} \in L^2(0, T; Y')$, $\Psi_0 \in Y$, 则(8)~(9)在 $L^\infty(0, T; X) \cap L^2(0, T, Y)$ 中至少有一组解 Ψ, 并满足

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\Psi(t)|^2 \leqslant C|\Psi_0|^2 + C\|\boldsymbol{f}\|^2_{L^2(0, T; Y')},$$

$$\lambda\|\Psi(t)\|^2_{L^2(0, T; Y)} \leqslant C|\Psi_0|^2 + C\|\boldsymbol{f}\|^2_{L^2(0, T; Y')}.$$

证明 我们分三步来证明.

i) 假设 $f \in L^2(0, T; Y')$, $\Psi_0 \in Y$, 此外 f 还从 $[0, T]$ 弱连续地映到 Y'. 在这种情况下, 我们可以断言(12)有唯一一组解. 事实上, 设 $\Psi_0^N = \sum_{k=1}^{N} \Psi_k^0\boldsymbol{e}_k$, 在(12)中取 $\Phi = \boldsymbol{e}_i$, 并将相应的矩阵取逆, 我们就得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi_i(t)=\sum_{p=1}^{N}\boldsymbol{A}_{i,p}\Psi_p(t)+\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}\boldsymbol{A}_{i,p,q}\Psi_p\Psi_q(t)+\\&\quad\sum_{p=1}^{N}\boldsymbol{B}_{i,p}\boldsymbol{F}_p(t),\qquad(i=1,\cdots,N),\\&\Psi_i(0)=\Psi_i^0\qquad(i=1,\cdots,N),\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{i,p}, \boldsymbol{A}_{i,p,q}, \boldsymbol{B}_{i,p}\in R^1$, $F_p(t)=\langle f, \boldsymbol{e}_p\rangle L(Y', Y)$· 易知, (15) 在最大的区间$[0, T']$上有唯一一组解· 根据引理 3.1, 该解可以延拓到$[0, T]$· 事实上, 若 $T'<T$, 则存在 $T^*>T'$, 使得该解可以延拓到$[0, T^*]$· 这与$[0, T']$是最大的区间相矛质, 因此 $T'=T$·

ii) 利用引理 3.1 的结果和紧性, $\{\Psi^N\}$存在子序列$\{\Psi^{N_k}\}$, 以及函数 $\Psi\in L^\infty(0, T; X)\cap L^2(0, T; Y)$, 使得

$$\Psi^{N_k}\to\Psi \text{ 在 } L^2(0, T; Y), \text{ 中弱收敛(当 } k\to\infty); \tag{16}$$

$$\Psi^{N_k}\to\Psi \text{ 在 } L^\infty(0, T; X), \text{ 中弱}^* \text{ 收敛(当 } k\to\infty); \tag{17}$$

利用 Fourier 变换的方法, 我们可以证明$\{\Psi^{N_k}\}$是$H^r(0, T; X)$, $0<r<1/4$ 中的有界集· 由于 $Y\subset H_0^1(\Omega)\times H_0^2(\Omega)$ 嵌入 X 是紧的, 因而 $L^2(0, T; Y)\cap H^r(0, T; X)$ 嵌入 $L^2(0, T; Y)$ 也是紧的· 这个事实与(16) 和(17) 一起导出

$$\Psi^{N_k}\to\Psi \text{ 在 } L^2(0, T; Y) \text{ 中强收敛(当 } k\to\infty)\cdot$$

由上面的论证确保了对任意的 $\Phi\in C^1([0, T]\times\Omega)^2$, 下列的极限过程成立

$$\int_0^T b(\Psi^{N_k}(t), \Psi^{N_k}(t), \Phi(t))\mathrm{d}t\to\int_0^T b(\Psi(t), \Psi(t), \Phi(t))\mathrm{d}t\qquad(\text{当 } k\to\infty)\cdot$$

iii) 设 $z(t)\in C^1[0, T]$, 且 $z(T)=0$· 我们在(12) 中取 $\Phi=\boldsymbol{e}_i$, 并用 $z(t)$ 乘以(12), 并对得到的方程进行分部积分, 并令 $N\to\infty$, 从第二步的结果及$\{\boldsymbol{e}_i\}$在 Y 中的稠密性, 我们有

$$\begin{aligned}a_1(\Psi_0, \Phi)z(0)=&-\int_0^T a_1(\Psi(t), z'(t)\Psi)\mathrm{d}t+\lambda\int_0^T a_2(\Psi, z(t)\Phi)\mathrm{d}t+\\&\int_0^T b(\Psi(t), \Psi(t), z(t)\Phi)\mathrm{d}t+\int_0^T d(\Psi(t), z(t)\Phi)\mathrm{d}t-\\&\int_0^T\langle\boldsymbol{f}, z(t)\Phi\rangle\mathrm{d}t\qquad(\forall x\in Y),\end{aligned}\tag{18}$$

特别地, 它对任意的 $z\in C_0^\infty[0, T]$ 仍然成立, 这蕴含着 Ψ 在分布意义下满足(8) ~ (9)·

现在, 我们用 $z(t)$ 乘以方程(12) 的第一个方程, 并进行分部积分, 再与(18) 进行比较, 我们则可以看出

$$a_1((\Psi(0)-\Psi_0), \Phi)(0)=0\qquad(\forall\Phi\in Y)\cdot$$

通过取具有 $z(0)=1$ 的 $z(t)$, 及稠密性, 我们知上面的方程对任意的 $\Phi\in X$ 仍然成立· 这样, 利用 Poincar 不等式可得(9)·

4 弱解的唯一性

定理 4.1 在定理 2.1 的条件下, (8) ~ (9) 的弱解是唯一的·

证明 设 Ψ_1 和 Ψ_2 是(8) ~ (9) 的两组解, 则令 $\Psi=\Psi_1-\Psi_2$, 那么我们有 $\Psi(0)=0$, 且它们满足

$$\begin{aligned}&a_1\left(\partial\Psi/\partial t, \Phi\right)+\lambda a_2(\Psi, \Phi)+b(\Psi_1, \Psi, \Phi)+\\&\quad b(\Psi, \Psi_2, \Phi)+d(\Psi, \Phi)=0\quad(\forall\Phi\in Y),\end{aligned}\tag{19}$$

现在，在(19)中取 $\Phi=\Psi$，并注意到 b 的反对称性，则可得

$$0.5(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)|\Psi|^2+\lambda\|\Psi\|^2=-b(\Psi_1,\Psi,\Psi)-d(\Psi,\Psi), \tag{20}$$

我们下面就利用引理 2.1 及引理 3.1 的结果来估计上式的右端各项·

$$|b(\Psi_1,\Psi,\Psi)|\leqslant C|\Psi_1|^{\frac{1}{4}}\|\Psi_1\|^{\frac{3}{4}}|\Psi|^{\frac{1}{4}}\|\Psi\|^{\frac{3}{4}}\leqslant \lambda/2\|\Psi\|^2+C|\Psi|^2, \tag{21}$$

$$|d(\Psi,\Psi)|\leqslant C|\Psi|^2· \tag{22}$$

将(21)、(22)与(20)结合起来，我们有

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)|\Psi|^2+\lambda\|\Psi\|^2\leqslant C|\Psi|^2,$$

利用 Gronwall 不等式，即得

$$|\Psi|^2+\lambda\int_0^t\|\Psi\|^2\mathrm{d}s\leqslant 0,\ (\forall t\in[0,T])·$$

由 Poincaré 不等式可得 $\Psi=\mathbf{0}$，即(8)～(9)只有唯一一组解·

[参 考 文 献]

[1] Khlebutin G N. Stability of fluid motion between a rotating and a stationary concentric sphere[J]. Fluid Dynamics, 1986, **3**: 31～34.

[2] Marcus P S, Tuckerman L S. Simulation of flow between two concentric rotating spheres, Part 1, Steady states[J]. J Fluid Mech, 1987, **185**: 1～30.

[3] Marcus P S, Tuckerman L S. Simulation of flow between two concentric rotating spheres, Part 2, Transition[J]. J Fluid Mech, 1987, **185**: 31～66.

[4] Teman R. Navier_Stokes Equation[M]. Amsterdam, New York: North_Holland, 1984.

[5] 李开泰, 马逸尘. 数理方程 Hilbert 空间方法[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1992.

[6] Glowinski R. Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems[M]. New York: Springer, 1984.

[7] Tuckerman L S. Formation of taylor vortices in spherical conette flow[D]. Ph. D. Thesis. Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, 1983.

The Existence and Uniqueness of Weak Solution of the Flow Between Two Concentric Rotating Spheres

Feng Weibing[1], Li Kaitai[2]

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, P R China;
2. Science School of Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P R China)

Abstract: The unsteady axisymmetric incompressible flow between two concentric spheres was discussed in this paper. It is useful to most astrophysical, geophysical and engineering applications. In order to get the existence and uniqueness of weak solution of this flow with the stream_velocity form, firstly, the relations among the nonlinear terms in this equation is found; then, the existence is proved by an auxiliary semi_discrete scheme and a compactness argument.

Key words: Navier_Stokes equations; stream function; Galerkin method