

文章编号: 1000-0887(2000) 01-0080-07

# 回转对称结构应力分析新方法<sup>\*</sup>

唐国安, 俞俊, 徐小峰

(复旦大学 应用力学系, 上海 200433)

(戴世强推荐)

**摘要:** 提出了回转对称结构在任意荷载作用下的应力分析新方法。先利用离散 Fourier 变换, 将整个回转对称结构的分析等价地分解为一系列带有复数约束条件的单个扇区分析。然后又再构造了由两个完全相同扇区构成的虚拟结构, 并证明了只要在虚拟结构上施加适当的外力和实数约束条件, 那么虚拟结构的位移结果与原来单个扇区在复数约束条件的解答是完全一致的。虚拟结构在实数约束条件下的应力分析几乎所有的通用有限元程序都可以解决。因此采用该新方法, 现成的有限元程序无需进行任何修改就能用于回转对称结构的应力分析。

**关键词:** 回转对称结构; 有限元; 应力分析

**中图分类号:** O175.14      **文献标识码:** A

## 引 言

许多工程结构虽然不是轴对称的, 但却具有回转对称的特性。如齿轮、涡轮盘片组件、带有腿的电站冷却塔等, 它们都是由  $N$  个几何形状和材料特性完全相同的扇区所组成。当这种结构绕其对称轴  $z$  轴转  $\alpha = 2\pi/N$  的整数倍角度后将与原来的结构完全重合。我们可以用  $N$  张半无限平面将一个回转对称结构切割成  $N$  个相同的扇区。

回转对称结构的模态分析问题 Thomas<sup>[1]</sup> 已作过研究, 而且 ANSYS<sup>[2]</sup> 也可以直接用于回转对称结构的模态分析。本文将研究回转对称结构的应力分析方法。

为了利用结构的回转对称性, 我们在每个扇区上建立各自的直角坐标系  $O_r x_r y_r z_r$  ( $r = 1, 2, \dots, N$ ), 它是由  $O_1 x_1 y_1 z_1$  逆时针旋转  $(r-1)\alpha$  后得到的, 如图 1 所示。规定所有扇区上的位移和荷载向量都参照它们各自的坐标系, 由于每个扇区的几何形状和材料特性都是相同的, 那么整个结构的刚度矩阵将可以表示成

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & 0 & \dots & \mathbf{K}_{11}^T \\ \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{12} & 0 & 0 & \dots & \mathbf{K}_{11} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中  $\mathbf{K}_{11}$  和  $\mathbf{K}_{12}$  是  $n$  阶矩阵,  $n$  是每个扇区内的自由度数目, 且  $\mathbf{K}_{11}$  是对称正定的。我们也可

\* 收稿日期: 1998\_01\_14; 修订日期: 1999\_06\_20

作者简介: 唐国安(1962~), 男, 教授。

以将位移向量和荷载向量写成分块形式

$$\begin{aligned} D &= \left\{ D_1^T \quad D_2^T \quad \dots \quad D_N^T \right\}^T, \\ P &= \left\{ P_1^T \quad P_2^T \quad \dots \quad P_N^T \right\}^T, \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $D_r$  和  $P_r$  分别是扇区  $r$  上参照坐标系  $O_r x_r y_r z_r$  的  $n$  阶位移和荷载向量。如果一个回转对称结构的扇区数目  $N$  超过 100 个, 而每个扇区内的自由度数目  $n$  也多达数千个, 那么矩阵  $K$  的阶数  $N \times n$  将达数十万, 这时求解下列平衡方程将是非常困难的

$$KD = P \quad (3)$$

如果作用在结构上荷载也是回转对称的, Mechnik<sup>[3]</sup> 曾经提出一种方法, 只要在扇区连接面的每对节点上施加位移约束方程, 就可以通过单个扇区的计算得到整个结构的应力分析结果。但是当结构上的荷载不满足回转对称条件时 Mechnik 的方法便无法采用。Lai<sup>[4]</sup> 用离散 Fourier 变换技术对轴对称结构在任意外

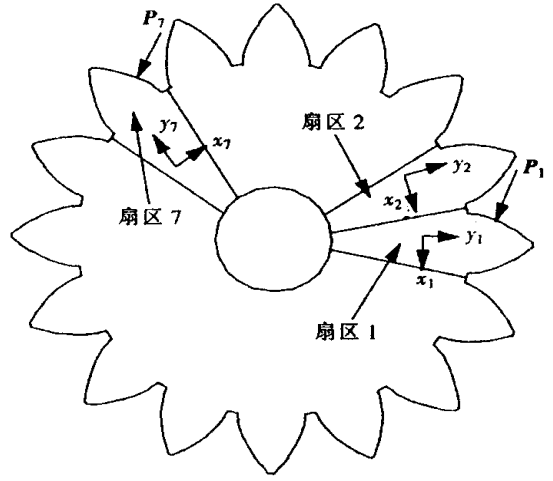


图 1

力作用下的问题作用分析, 但 Lai 的方法局限于轴对称结构, 而不是回转对称结构。

本文提出了一种新的方法, 将离散 Fourier 变换技术与常规的有限元程序结合起来, 实现了对任意荷载作用下回转对称结构的应力分析。

用离散 Fourier 变换技术可以将  $N \times n$  阶方程(3) 分解为  $N$  个  $n$  阶复系数方程, 而  $n$  阶复系数方程又可以等价于  $2n$  阶实系数方程, 这样计算效率将大大提高。新的方法在时间上具有明显的优点。

然而现有的有限元分析程序通常没有离散 Fourier 变换的特殊功能。为此, 本文作者又构造了一个虚拟的结构, 它是由两个完全重叠的扇区构成。可以证明在虚拟结构上施加一组特定的线性约束条件及荷载后, 这个虚拟结构的平衡方程与前面所述的  $2n$  阶实系数方程完全相等。于是受任意荷载作用的回转对称结构的应力分析可以通过对  $N$  个虚拟结构分析来实现, 而虚拟结构在线性约束条件下的应力分析可以用常规的有限元程序完成。因此, 新的方法也具有特别重要的实用意义, 它扩展了现成有限元程序的使用价值。

## 1 离散 Fourier 变换

给定由  $N$  个实数或复数构成的数列  $f_1, f_2, \dots, f_N$ , 离散 Fourier 变换定义为<sup>[5]</sup>

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N f_k e^{-i(j-1)(k-1)\alpha},$$

其中  $j = 1, 2, \dots, N$ 。逆变换是

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \phi e^{i(j-1)(k-1)\alpha},$$

其中  $k = 1, 2, \dots, N$ 。将离散 Fourier 变换应用到由  $N$  个扇区位移向量构成的数列  $D_1, D_2, \dots, D_n$ , 可得

$$\xi_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N D_k e^{-i(j-1)(k-1)\alpha}$$

根据逆变换表达式又有

$$D_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \xi_j e^{i(j-1)(k-1)\alpha}, \quad (4)$$

于是整个结构的位移向量为

$$D = V\delta, \quad (5)$$

其中

$$V = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} I & I & \dots & I \\ I & Ie^{i\alpha} & \dots & Ie^{i(N-1)\alpha} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I & Ie^{i(N-1)\alpha} & \dots & I^{i(N-1)(N-1)\alpha} \end{bmatrix}, \quad \delta = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_N \end{Bmatrix},$$

而  $I$  是  $n \times n$  阶单位矩阵。将表达式(5)代入方程(3),再在方程(3)的两端乘以  $V^*$  ( $V$  的共轭转置),将可导出

$$K\delta = \rho, \quad (6)$$

其中

$$K = V^* K V = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \dots & K_{NN} \end{bmatrix}, \quad \rho = V^* P = \begin{Bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_N \end{Bmatrix},$$

式中  $K_{rs}$  是  $n \times n$  阶复矩阵,  $\rho_r$  是  $n$  阶复向量,且分别可以展开为

$$K_{rs} = \frac{1}{N} \left( \sum_{j=0}^{N-1} e^{i(r-s)j\alpha} \right) K_{11} + \frac{1}{N} \left( \sum_{j=0}^{N-1} e^{i(r-s)j\alpha} \right) K_{12} e^{i(s-1)\alpha} + \frac{1}{N} \left( \sum_{j=0}^{N-1} e^{i(r-s)j\alpha} \right) K_{12}^T e^{-i(r-1)\alpha}, \quad (7)$$

$$\rho_r = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} P_{j+1} e^{-i(r-1)j\alpha},$$

易知公式(7)中  $K_{11}$ ,  $K_{12}$  和  $K_{12}^T$  的系数都是公比为  $e^{i(s-r)\alpha}$  的几何级数,于是

$$\sum_{j=0}^{N-1} e^{i(s-r)j\alpha} = \begin{cases} N & (\text{当 } r = s \text{ 时}), \\ \frac{1 - e^{i(s-r)\alpha N}}{1 - e^{i(s-r)\alpha}} = 0 & (\text{当 } r \neq s \text{ 时}), \end{cases}$$

因此,复数矩阵  $K$  中的每一个非对角块矩阵都是零,而对角块是

$$K_{rr} = K_{11} + e^{i(r-1)\alpha} K_{12} + e^{-i(r-1)\alpha} K_{12}^T, \quad (8)$$

这样方程(6)变成

$$K_{rr} \delta_r = \rho_r \quad (r = 1, 2, \dots, N), \quad (9)$$

这意味着  $N \times n$  阶方程(6)可以被  $N$  组  $n$  阶复系数方程所取代。

我们还可以从式(7)和式(8)得到

$$K_{N-r+1, N-r+1} = K_{r+1, r+1}, \quad (10)$$

$$\rho_{N-r+1} = \rho_{r+1},$$

其中  $r = 1, 2, \dots, N_f$ ,

$$N_f = \begin{cases} N/2 & (\text{当 } N \text{ 是偶数时}), \\ (N-1)/2 & (\text{当 } N \text{ 是奇数时}). \end{cases}$$

从关系(10)可知,只需从  $r = 1, 2, \dots, N_f + 1$  计算  $\delta_r$ , 其余的可以从下式得到

$$\delta_{N-r+1} = \delta_{r+1} \quad (r = 1, 2, \dots, N_f - 1), \quad (11)$$

求出全部的  $\delta$  以后,我们就可以利用变换关系(4)及式(11)得到任意一个扇区上物理位移

$$D_{ik} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} \left( \delta_{1+} + \sum_{r=1}^{N_f-1} 2\text{Re}(\delta_{r+1} e^{ir(k-1)\alpha}) \right) & (\text{当 } N \text{ 是偶数时}), \\ \frac{1}{\sqrt{N}} \left( \delta_{1+} + \sum_{r=1}^{N_f-1} 2\text{Re}(\delta_{r+1} e^{ir(k-1)\alpha}) \right) + (-1)^{k+1} \delta_{N_f+1} & (\text{当 } N \text{ 是奇数时}), \end{cases} \quad (12)$$

分离复系数方程(9)中的实部和虚部,将导出实系数方程组

$$\begin{bmatrix} \text{Re } K_{rr} & -\text{Im } k_{rr} \\ \text{Im } K_{rr} & \text{Re } k_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \text{Re } \delta_r \\ \text{Im } \delta_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{Re } \rho_r \\ \text{Im } \rho_r \end{Bmatrix}, \quad (13)$$

从(8)可知  $K_{rr}^* = K_{rr}$ , 这就可以验证方程(13)的系数矩阵是对称的。

## 2 有限元计算

考虑一个典型扇区(如图2所示),设  $d_1, d_3$  是扇区连接面上的位移,  $d_2$  是扇区内部的位移,约定  $d_1, d_2$  参照该扇区自身的坐标系,而  $d_3$  参照与其相连的下一个扇区坐标系。这个典型扇区的刚度矩阵为

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}.$$

由于整个回转对称结构是由  $N$  个这样典型的扇区构成的,因此存在以下关系

$$\left. \begin{aligned} K_{11} &= \begin{bmatrix} k_{11} + k_{33} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}, \\ K_{12} &= \begin{bmatrix} k_{13} & 0 \\ k_{31} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

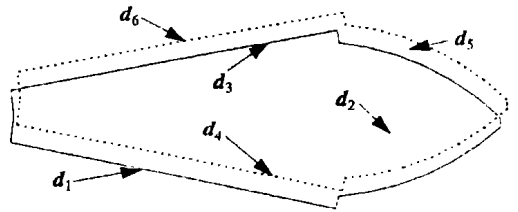


图 2

现在我们构造另一个与以上扇区完全重叠的扇区(在图2中用虚线表示),相应的位移向量分别记为  $d_4, d_5, d_6$ 。由这两个重叠扇区构成的虚拟结构的刚度矩阵及位移向量应当是

$$k = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}, \quad d = \left\{ d_1^T \quad d_2^T \quad d_3^T \quad d_4^T \quad d_5^T \quad d_6^T \right\}^T. \quad (15)$$

在这个虚拟结构上施加一组约束条件

$$\begin{Bmatrix} d_3 \\ d_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I \cos(r-1)\alpha & -I \sin(r-1)\alpha \\ I \sin(r-1)\alpha & I \cos(r-1)\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_4 \end{Bmatrix}. \quad (16)$$

我们可得

$$d = T_r d_r, \quad (17)$$

其中

$$T_r = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cos(r-1)\alpha I & \mathbf{0} & -\sin(r-1)\alpha I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \\ \sin(r-1)\alpha I & \mathbf{0} & \cos(r-1)\alpha I & \mathbf{0} \end{bmatrix}, d_r = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix}. \quad (18)$$

经过变换(17), 虚拟结构的刚度矩阵变成为<sup>[7]</sup>

$$k_r = T_r^T k T_r. \quad (19)$$

将(15)和(18b)代入(19), 并利用关系(14), 可以证明

$$k_r = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} K_{rr} & -\operatorname{Im} K_{rr} \\ \operatorname{Im} K_{rr} & \operatorname{Re} K_{rr} \end{bmatrix},$$

这表明矩阵  $k_r$  与方程(13)中的系数矩阵是完全相同的。

如果将下列荷载施加到虚拟结构上

$$p_r = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \begin{Bmatrix} P_k \cos(r-1)(k-1)\alpha \\ -P_k \sin(r-1)(k-1)\alpha \end{Bmatrix}. \quad (20)$$

可以验证

$$p_r = \begin{Bmatrix} \operatorname{Re} \rho_r \\ \operatorname{Im} \rho_r \end{Bmatrix},$$

这恰好是方程(13)的右端项。于是我们可以得出结论, 方程

$$k d_r = p_r, \quad (21)$$

具有与方程(13)相同的解, 即

$$d_r = \begin{Bmatrix} \operatorname{Re} \delta_r \\ \operatorname{Im} \delta_r \end{Bmatrix}. \quad (22)$$

注意到方程(21)是虚拟结构受到荷载(20)及约束条件(16)下的平衡方程, 常规的有限元程序都可以求解。如 SAP5 中的罚单元及 ADINA 中的约束方程都可以分析这一类问题。

### 3 计算实例

考虑一个由 16 个扇区构成的齿轮, 在第 1 和第 7 个扇区上分别作用集中力  $P_1$  和  $P_2$ , 如图 1 所示。 $P_1$  和  $P_2$  均垂直于齿轮表面, 力的大小都是 5218N。典型扇区的有限元网格如图 3(a), 图 3(b)中的虚线是重叠的扇区。图 3 中还标出了部分节点编号。

在平面应力状态下, 每个节点只有  $X$  和  $Y$  上方向的位移分量。按照第 3 节中约定的位移分块方式, 连接面上的位移是

$$d_1 = \left\{ d^{(112)T} \quad d^{(113)T} \quad \dots \quad d^{(123)T} \right\}^T, \quad d_3 = \left\{ d^{(67)T} \quad d^{(68)T} \quad \dots \quad d^{(78)T} \right\}^T \\ d_4 = \left\{ d^{(256)T} \quad d^{(257)T} \quad \dots \quad d^{(277)T} \right\}^T, \quad d_6 = \left\{ d^{(211)T} \quad d^{(212)T} \quad \dots \quad d^{(222)T} \right\}^T$$

其中  $d^{(k)} = \{u^{(k)} \quad v^{(k)}\}^T$  是节点位移, 上标( $k$ )是节点编号。位移  $d_2$  和  $d_5$  分别是两个重叠扇区其余部分的位移。本例中, 约束方程(16)可以写成

$$\left. \begin{aligned} d^{(k)} &= d^{(m)} \cos(r-1)\alpha - d^{(n)} \sin(r-1)\alpha \\ d^{(l)} &= d^{(m)} \sin(r-1)\alpha + d^{(n)} \cos(r-1)\alpha \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

其中  $k = 67, 68, \dots, 78; l = 211, 212, \dots, 222; m = 112, 113, \dots, 123$  而  $n = 256, 257, \dots, 277$ 。总

共有 48 个约束方程。

由于

$$P_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -1901.8 \\ -4872.8 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1901.8 \\ 4872.8 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 95 \text{ 行} \\ \leftarrow 96 \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow 49 \text{ 行} \\ \leftarrow 50 \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$P_7 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -1901.8 \\ 4872.8 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 49 \text{ 行} \\ \leftarrow 50 \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

于是, 根据 (20) 施加在虚拟结构上的荷载是

$$p_r = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} P_1 + P_7 \cos \frac{3(r-1)\pi}{4} \\ -P_7 \sin \frac{3(r-1)\pi}{4} \\ 0 \\ \vdots \\ -1901.8 \cos 3(r-1)\pi/4 \\ 4872.8 \cos 3(r-1)\pi/4 \\ \vdots \\ -1901.9 \\ -4872.8 \\ \vdots \\ 1901.8 \sin 3(r-1)\pi/4 \\ -4872.8 \sin 3(r-1)\pi/4 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{matrix} \leftarrow 49 \text{ 行} \\ \leftarrow 50 \text{ 行} \\ \leftarrow 95 \text{ 行} \\ \leftarrow 96 \text{ 行} \\ \leftarrow 337 \text{ 行} \\ \leftarrow 338 \text{ 行} \end{matrix}$$

总共有 576 行。

给定材料数据及其它几何参数后, 我们选择了 ADINA 进行计算。ADINA<sup>[5]</sup> 提供的约束方程功能可以处理例中约束条件(23)。对于  $r = 1, 2, \dots, 9$ , 我们可以依次求出方程(21) 的结果  $d_1, d_2, \dots, d_9$ , 然后根据(22) 求出复数位移  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_9$ , 最后再用逆变换(12) 求出整个齿轮的物理位移  $D_1, D_2, \dots, D_{16}$ 。应力也可以用相同的方式计算, Von Mises 当量应力计算结果如图4 所示。

为了验证本文提出的方法, 我们也对整个齿轮作了直接的计算, 部分结果的比较列入表 1。从表中可见两者之间的差异是非常小的。造成这种差异的原因有两方面。i) 计算方程

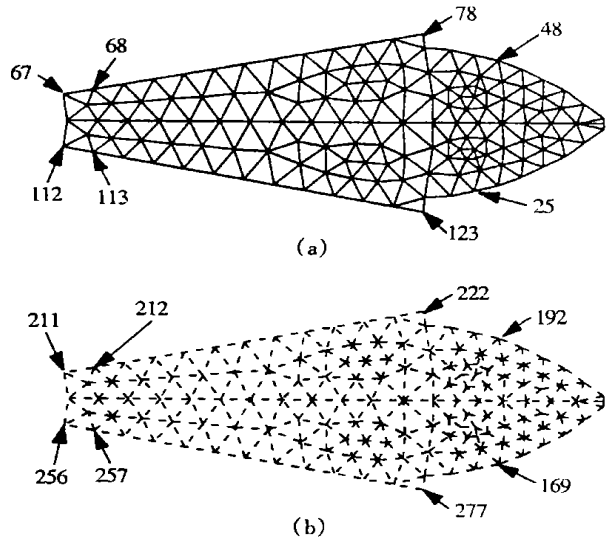


图 3

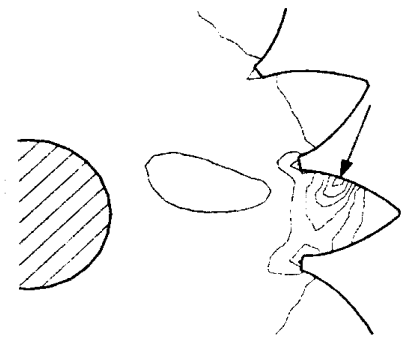


图 4

(20) 中三角函数时舍入误差(ADINA 浮点数输入只有 10 位有效数字), ii) 求解大型方程(3)时的累计误差。我们从表中也可以知道新方法所花费的时间只有整体计算时间的 1/6.4, 而存储量只有整体计算时的 1/8。

表 1 部分位移计算结果比较

节点号	新方法计算的位移结果		整体计算的位移结果	
	$u$	$v$	$u$	$v$
1	- 0.240 829	- 0.399 916	- 0.142 071	- 0.401 571
2	- 0.135 444	- 0.382 753	- 0.136 117	- 0.383 341
3	- 0.083 559 4	- 0.368 222	- 0.084 505 9	- 0.369 749
4	- 0.097 245 8	- 0.365 545	- 0.098 271 9	- 0.367 042
5	- 0.120 916	- 0.361 501	- 0.121 669	- 0.362 989
6	- 0.255 480	- 0.355 361	- 0.255 669	- 0.356 834

### [参 考 文 献]

- [1] Thomas D L. Dynamics of rotationally periodic structures[J]. Internat J fr Numer Methods Engrg, 1979, **14**(1): 81~ 102.
- [2] ANSYS User' s Manual, Revision 5.0(Z), Vol. IV. Swanson Analysis System, Inc, 1994.
- [3] Mechnik P. Consideration of constraints within the finite element method by means of matrix operators[J]. Internat J Numer Methons Engrg, 1991, **31**(5): 909~ 926.
- [4] Lai. Application of discrete fourier series to the stress analysis of axisymmetric solids[J]. Internat J Numer Methods Engrg, 1991, **31**(4): 619~ 647.
- [5] Joseph Weaver. Theory of Discrete and Continuous Fourier Analysis [M]. John Wiley & Sons Inc, 1987, 235~ 267.
- [6] Bathe J. ADINA \_Finite Element Program for Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis [R]. Report AE81\_1, MIT, September 1981.
- [7] Cook R D. Concepts and Applications of Finite Element Analysis [M]. second edition, John Wiley & Sons, 1981.

## A New Method for Stress Analysis of a Cyclically Symmetric Structure

Tang Guoan, Ding Jun, Xu Xiaofeng

( Department of Applied Mechanics, Fudan University, Shanghai 200433, P R China )

**Abstract:** In this paper, a computational method for finite element stress analysis of a cyclically symmetric structure subjected to arbitrary loads is provided. At first, using discrete Fourier transformation technique, the complete structure is analyzed by considering only one sector with appropriate complex constraints on its boundary with the adjacent sectors. Next, an imaginary structure which is composed of two identically overlapping sectors is constructed, and that the complex constraints mentioned above can be equivalently replaced by a set of real constraints on this imaginary structure is proved. Therefore, the stress analysis of a cyclically symmetric structure can be solved conveniently by most of finite element programs.

**Key words:** cyclically symmetric structure; finite element method; stress analysis