应用数学和力学, 第 21 卷 第 1 期(2000 年 1 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 01_0087_07

集中载荷作用下层合厚圆板的轴对称弯曲*

盛宏玉, 范家让

(合肥工业大学 建筑工程系, 合肥 230009)

(沈惠申推荐)

摘要: 从三维弹性力学基本方程出发, 建立了横观各向同性层合圆板轴对称弯曲问题的状态方程, 并将板面的集中载荷展成付里叶贝塞尔级数, 从而给出问题的解析解• 此解满足弹性力学全部方程, 计及了所有独立的弹性常数, 并满足层间连续性条件•

关 键 词: 层合圆板; 状态方程; 集中载荷; 轴对称弯曲

中图分类号: O343.8 文献标识码: A

目前, 叠层复合材料结构广泛应用于各个工程领域, 叠层构件的研究及其应用越来越受到人们的重视• 现行的一些板壳理论都基于某种假设[1, 2], 随着厚度的增加, 所引起的误差将剧增• 文献[3] 用高阶理论研究了叠层复合材料矩形厚板, 文献[4, 5] 解决了圆板的非线性弯曲问题, 同时, 很多学者还讨论了叠层圆板的自由振动问题[6, 7]• 不过, 到目前为止, 任意厚度叠层圆板的静力问题则很少见到报道•

文献[8, 9] 抛弃任何有关位移或应力模式的人为假定, 以三角函数作为基本解函数, 并引入状态空间理论, 建立了一般边界条件下任意厚度层合板和圆柱壳的状态方程• 给出的解满足全部弹性力学方程和层合板的层间连续条件, 但未涉及圆板的静力解• 本文从三维弹性力学基本方程出发, 在柱坐标系下建立横观各向同性层合圆板的状态方程• 为得到状态方程的解, 以贝塞尔函数作为基本解函数, 并将板面集中载荷展成付里叶贝塞尔级数• 算例与有关近似理论对比, 结果令人满意, 并得出一些有意义的结论•

1 状态方程的建立及其求解

考察一横观各向同性圆板, 坐标轴沿弹性主方向, 坐标原点位于上表面板心处, z 轴沿厚度方向铅垂向下, 命 U 和 W 分别表示圆板沿径向 r 和 z 方向的位移, 则圆板的物理方程可用下式表为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial U/\partial r \\ U/r \\ \partial W/\partial z \\ \partial W/\partial r + \partial U/\partial z \end{Bmatrix}, \tag{1}$$

* 收稿日期: 1998_06_02; 修订日期: 1999_08_16
作者简介: 盛宏玉(1957~), 硕士, 副教授, 研究方向: 计算力学. 发表论文 20 余篇.

记 $\alpha = \partial/\partial r$, $C_1 = -C_{13}/C_{33}$, $C_2 = C_{11} - C_{13}^2/C_{33}$, $C_3 = C_{12} - C_{13}^2/C_{33}$, $C_4 = 1/C_{33}$, $C_5 = 1/C_{44}$, $R = \tau_{rz}$, $Z = \sigma_z$, 从方程(1) 中消去 σ_r 和 σ_θ 得[8]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2\alpha + C_3/r & -C_1 \\ C_3\alpha + C_2/r & -C_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ Z \end{Bmatrix}. \tag{2}$$

将(2) 式代入平衡方程和方程(1), 可以得到下列偏微分形式的状态方程

$$\frac{\partial}{\partial z}\begin{Bmatrix} U \\ W \\ R \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & C_5 & 0 \\ C_1(\alpha + 1/r) & 0 & 0 & C_4 \\ -C_2\alpha(\alpha + 1/r) & 0 & 0 & C_1\alpha \\ 0 & 0 & -(\alpha + 1/r) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ W \\ R \\ Z \end{Bmatrix}. \tag{3}$$

设解

$$\left.\begin{aligned} &U = \sum_m U_m(z)\mathrm{J}_1(\xi_m r) + f(r)U(z), \quad W = \sum_m W_m(z)\mathrm{J}_0(\xi_m r), \\ &R = \sum_m R_m(z)\mathrm{J}_1(\xi_m r), \quad Z = \sum_m Z_m(z)\mathrm{J}_0(\xi_m r), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中 $U(z)$ 为 z 的待定函数, $f(r)$ 为 r 的某一设定函数且满足 $f(0) = 0$, $\xi_m = K_m/b$, b 为圆板的半径, 而 $K_m(m = 1, 2, \ldots\ldots)$ 为零阶贝塞尔函数的零点. 由(4) 式可以看出, 对轴对称弯曲问题, 板心处的位移 U 等于零的条件已得到满足. 在边界条件中, 对周边固支或周边简支的圆板, (4) 式已满足边界上的挠度为零, 剩下的边界条件为

1) 周边固支圆板, $U|_{r=b} = 0$, 由(4) 式得

$$\sum_m U_m(z)\mathrm{J}_1(K_m) + f(b)U(z) = 0. \tag{5}$$

2) 周边简支圆板, $\sigma_r|_{r=b} = 0$, 将(4) 式代入(2) 式, 并利用贝塞尔函数的性质化简得

$$\sum_m U_m(z)\mathrm{J}_1(K_m) + \frac{C_3 f(b) + C_2 b f'(b)}{C_3 - C_2} U(z) = 0. \tag{6}$$

待定函数 $U(z)$ 可由(5) 式或(6) 式确定. 为建立常微分形式的状态方程, 作如下级数展开

$$f(r) = \sum_m A_m \mathrm{J}_1(\xi_m r), \quad \left(\alpha + \frac{1}{r}\right) f(r) = \sum_m B_m \mathrm{J}_0(\xi_m r), \tag{7}$$

系数 A_m 和 B_m 可由有关级数展开公式求得, 当 $f(r) = r/b$ 时, 有

$$A_m = \frac{4}{K_m^2 \mathrm{J}_1(K_m)}, \quad B_m = \frac{4}{bK_m J_1(K_m)}. \tag{8}$$

将(4) 式和(7) 式代入方程(3), 利用贝塞尔函数的性质, 对于每一 m 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\boldsymbol{S}(z) = \boldsymbol{D}\boldsymbol{S}(z) + \boldsymbol{B}(z), \tag{9}$$

称之为常系数非齐次状态方程, 其中

$$\boldsymbol{S}(z) = \begin{bmatrix} U_m(z) & W_m(z) & R_m(z) & Z_m(z) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & \xi_m & C_5 & 0 \\ C_1\xi_m & 0 & 0 & C_4 \\ C_2\xi_m^2 & 0 & 0 & -C_1\xi_m \\ 0 & 0 & -\xi_m & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}(z) = \begin{Bmatrix} -A_m U'_m(z) \\ C_1 B_m U_m(z) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{11}$$

方程(9) 的解为[8]

$$\boldsymbol{S}(z) = \boldsymbol{G}(z)\boldsymbol{S}(0) + \boldsymbol{C}(z), \tag{12}$$

$$\boldsymbol{C}(z) = \int_0^z \mathrm{e}^{\boldsymbol{D}(z-\tau)} \boldsymbol{B}(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{13}$$

设 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 为矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的特征值, $\boldsymbol{P}$ 为相应的特征向量矩阵, 根据线性代数知识, 有

$$\boldsymbol{G}(z) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{D}z} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 z} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{e}^{\lambda_4 z} \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}. \tag{14}$$

2 层合圆板的解

设一 p 层的层合圆板, 每层均为横观各向同性材料, 第 j 层的厚度为 h_j. 将第 j 层分成 K_j 个薄层, 其厚为 $d_j = h_j/K_j$. 只要薄层足够薄, 有理由认为待定函数 $U(z)$ 在薄层内沿 z 方向是线性分布的[8,9], 即

$$U_{ji}(z) = E_{ji}\left(1 - \frac{z}{d_j}\right) + E_{j,i+1}\frac{z}{d_j} \qquad (z \in [0, d_j],\ i = 1, 2, \cdots, K_j), \tag{15}$$

其中 E_{ji} 和 $E_{j,i+1}$ 为线性函数的端点值, 下标 ji 表示层合板 j 层中的第 i 薄层. 若层合板的每层都是很薄, 可不必再分薄层, 若某些层较厚, 划分的薄层数视精度要求而定. 逐渐增加 K_j, 当发现分成 $K_j\,(j = 1, 2, \cdots, p)$ 个薄层时要求保留的有效数字几乎不变, 此时的结果即为满足精度要求意义下的精确值. 可见, 线性分布假设(15) 所引起的误差是可控的.

根据(9) 式和(15) 式, 任一薄层的状态方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\boldsymbol{S}_{ji}(z) = \boldsymbol{D}_j\boldsymbol{S}_{ji}(z) + \boldsymbol{B}_{ji}(z), \tag{16}$$

$$\boldsymbol{B}_{ji}(z) = \left[A_m\frac{E_{ji} - E_{j,i+1}}{d_j} \quad C_1B_mU_{ji}(z) \quad 0 \quad 0\right]^{\mathrm{T}}. \tag{17}$$

由(12) ~ (14) 式, 方程(16) 的解为

$$\boldsymbol{S}_{ji}(z) = \boldsymbol{G}_j(z)\boldsymbol{S}_{ji}(0) + \boldsymbol{C}_{ji}(z). \tag{18}$$

在上式中取 $z = d_j$ 并令 $i = 1, 2$, 得

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{S}_{j1}(d_j) &= \boldsymbol{G}_j(d_j)\boldsymbol{S}_{j1}(0) + \boldsymbol{C}_{j1}(d_j), \\ \boldsymbol{S}_{j2}(d_j) &= \boldsymbol{G}_j(d_j)\boldsymbol{S}_{j2}(0) + \boldsymbol{C}_{j2}(d_j). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

引入层间连续性条件 $\boldsymbol{S}_{j2}(0) = \boldsymbol{S}_{j1}(d_j)$, 上式变为

$$\boldsymbol{S}_{j2}(d_j) = [\boldsymbol{G}_j(d_j)]^2\boldsymbol{S}_{j1}(0) + \boldsymbol{G}_j(d_j)\boldsymbol{C}_{j1}(d_j) + \boldsymbol{C}_{j2}(d_j). \tag{20}$$

依次类推, 可将第 K_j 个薄层下表面与第一个薄层上表面的力学量用下式联系起来

$$\boldsymbol{S}_{jK_j}(d_j) = \boldsymbol{H}_{jK_j}\boldsymbol{S}_{j1}(0) + \boldsymbol{H}_{jK_j} = [\boldsymbol{G}_j(d_j)]^{K_j}\boldsymbol{S}_{j1}(0) + \boldsymbol{H}_{jK_j}, \tag{21}$$

$$\boldsymbol{H}_{jK_j} = [\boldsymbol{G}_j(d_j)]^{K_j-1}\boldsymbol{C}_{j1}(d_j) + \cdots + \boldsymbol{G}_j(d_j)\boldsymbol{C}_{j,K_j-1}(d_j) + \boldsymbol{C}_{jK_j}(d_j). \tag{22}$$

实际上, (21) 式对层合板的每一层都成立, 当 $j = 1, 2$ 时, 分别有

$$\boldsymbol{S}_{1K_1}(d_1) = \boldsymbol{H}_{1K_1}\boldsymbol{S}_{11}(0) + \boldsymbol{H}_{1K_1}, \qquad \boldsymbol{S}_{2K_2} = \boldsymbol{H}_{2K_2}\boldsymbol{S}_{21}(0) + \boldsymbol{H}_{2K_2}. \tag{23}$$

根据层间连续性条件 $\boldsymbol{S}_{21}(0) = \boldsymbol{S}_{1K_1}(d_1)$, 由方程(23) 得到

$$\boldsymbol{S}_{2K_2}(d_2) = \boldsymbol{H}_{2K_2}\boldsymbol{H}_{1K_1}\boldsymbol{S}_{11}(0) + \boldsymbol{H}_{2K_2}\boldsymbol{H}_{1K_1} + \boldsymbol{H}_{2K_2}. \tag{24}$$

逐层类推, 可将层合板上下表面的力学量表达为

$$\boldsymbol{S}_{pK_p} = \Pi\boldsymbol{S}_{11}(0) + \Pi = \boldsymbol{H}_{pK_p}\cdots\boldsymbol{H}_{2K_2}\boldsymbol{H}_{1K_1}\boldsymbol{S}_{11}(0) + \Pi, \tag{25}$$

$$\Pi = \boldsymbol{H}_{pK_p}\cdots\boldsymbol{H}_{2K_2}\boldsymbol{H}_{1K_1} + \boldsymbol{H}_{pK_p}\cdots\boldsymbol{H}_{3K_3}\boldsymbol{H}_{2K_2} + \cdots + \boldsymbol{H}_{pK_p}\boldsymbol{H}_{p-1,K_{p-1}} + \boldsymbol{H}_{pK_p}. \tag{26}$$

(25) 式中的 $\boldsymbol{S}_{11}(0)$ 为层合板上表面的力学量, 称为初始值. 在矩阵方程(25) 中取出三、四两

行, 解得

$$\begin{Bmatrix} U_m(0) \\ W_m(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{31} & \pi_{32} \\ \pi_{41} & \pi_{42} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{Bmatrix} R_m(d_p) \\ Z_m(d_p) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \pi_{33} & \pi_{34} \\ \pi_{43} & \pi_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_m(0) \\ Z_m(0) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \pi_3 \\ \pi_4 \end{Bmatrix} \right). \tag{27}$$

若板仅在上表面板心处受集中力 P 的作用, 有 $R_m(0) = R_m(d_p) = Z_m(d_p) = 0$. 为了求出 $Z_m(0)$, 需要将集中力 P 展成付里叶贝塞尔级数, 为此我们构造辅助函数.

$$\sigma_z(r, 0, \varepsilon) = \begin{cases} 0 & (\text{当 } r > \varepsilon), \\ -\dfrac{P}{\pi\varepsilon^2} & (\text{当 } r \leqslant \varepsilon). \end{cases} \tag{28}$$

而上表面 σ_z 的真实分布为

$$\sigma_z(r, 0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sigma_z(r, 0, \varepsilon). \tag{29}$$

将 σ_z 展成付里叶贝塞尔级数, 得

$$\sigma_z(r, 0, \varepsilon) = \sum_m C_m(\varepsilon) J_0(\xi_m r), \quad C_m(\varepsilon) = -2\frac{P J_1(\xi_m \varepsilon)}{\pi b^2 \xi_m \varepsilon J_1^2(K_m)}. \tag{30}$$

比较(30) 式和(4) 式, 可以得到

$$Z_m(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} C_m(\varepsilon) = -\frac{P}{\pi b^2 J_1^2(K_m)}. \tag{31}$$

由(27) 式解出 $\boldsymbol{S}_{11}(0)$ 后, 根据(21) 式和(25) 式的推导过程, 很容易用下式表示层合板 j 层中任一薄层 i 内的力学量

$$\boldsymbol{S}_{ji}(z) = \Pi_{ji}(z) \boldsymbol{S}_{11}(0) + \Pi_{ji}(z). \tag{32}$$

而矩阵 $\Pi_{ji}(z)$ 和向量 $\Pi_{ji}(z)$ 也不难求出其具体表达式. 在此需要说明的是, (27) 式和(32) 式中均包含有待定常数 $E_{ji}(i = 1, 2, \cdots, K_j + 1, j = 1, 2, \cdots, p)$, 考虑到层间位移 $U(z)$ 的连续性, 应有

$$E_{j+1,1} = E_{j, K_j+1} \quad (j = 1, 2, \cdots, p-1). \tag{33}$$

所以共有 $K_1 + K_2 + \cdots + K_p + 1$ 个待定常数. 为了便于用(5) 式或(6) 式定解这些常数, (32) 式中的坐标 z 也要取 K_j 个值, 例如 $z = d_j, 2d_j, \cdots, h_j$, 并分别计算相应的力学量, 将 $[U_m(z)]_{ji}$ 代入(5) 式或(6) 式, 命 $j = 1, 2, \cdots, p$ 并考虑初始值 $\boldsymbol{S}_{11}(0)$, 一共得到 $K_1 + K_2 + \cdots + K_p + 1$ 个代数方程, 用以求解相同数目的待定数. 这样, 初始值 $\boldsymbol{S}_{11}(0)$ 由(27) 式确定, 进而整个层合板可解.

3 数值结果

算例 1 为检验上述方法的有效性, 便于和薄板理论比较, 计算周边固定的各向同性圆板, 取 $m = 1, 2, \cdots, 200$. 计算结果见表 1, 其中 K 为分层数, P 为上表面板心处的集中力, E 为弹性模量.

算例 2 周边固支的横观各向同性层合圆板, $p = 3$. 第一层和第三层的材料相同, 每层都有相同的弹性常数比: $C_{12}/C_{11} = 0.246269$, $C_{13}/C_{11} = 0.831715$, $C_{33}/C_{11} = 0.530172$, $C_{44}/C_{11} = 0.266810$, $C_{11}^{(1)}/C_{11}^{(2)} = 5$, 其中 $C_{11}^{(1)}$ 和 $C_{11}^{(2)}$ 分别为第一层和第二层的 C_{11} 值. 层合板的几何参数为 $h_1 = h_3 = 0.1h$, $h_2 = 0.8h$, h 为层合板的厚度. 计算结果见表 2, 表中的 K_1, K_2 和 K_3 分别为各层被划分的薄层数.

4 结 论

通过上面的算例可以得出以下几点结论

1) 在集中载荷作用下，薄板理论与本文的数值解存在较大误差，且这种误差随着板厚的增加而剧增•

2) 上表面板心附近产生了较大的局部变形• 这种局部变形随着板厚的增加越来越大，且影响范围不断向外和向下扩展•

3) 局部变形的存在使板上表面板心附近出现局部受拉区，从而对应力分布产生重大影响•

4) 由表 2 可以看出，本文给出的层间位移和应力满足层合板的层间连续条件•

5) 本文的结果可用来检查其它近似理论的精确程度•

表 1　　周边固支各向同性圆板的应力和挠度 ($\nu = 0.3$)

h/b	K		WEh/P	$\sigma_r h^2/p$				
			$r = 0.0$	$r = 0.2b$	$r = 0.4b$	$r = 0.6b$	$r = 0.8b$	$r = b$
0.05	6	上表面	96.589 (86.899)	−0.470 2 (−0.521 5)	−0.075 8 (−0.091 3)	0.167 3 (0.160 4)	0.342 6 (0.339 0)	0.595 7 (0.477 5)
		中　面	86.789 (88.899)	−0.001 6 (0.000 0)	−0.000 5 (0.000 0)	−0.000 3 (0.000 0)	−0.000 2 (0.000 0)	−0.000 1 (0.000 0)
		下表面	88.155 (86.899)	0.518 9 (0.521 5)	0.090 0 (0.091 3)	−0.161 7 (−0.160 4)	−0.340 6 (−0.339 0)	−0.597 6 (−0.477 5)
0.1	10	上表面	40.388 (21.725)	−0.316 5 (−0.521 5)	−0.031 5 (−0.091 3)	0.184 9 (0.160 4)	0.349 0 (0.339 0)	0.686 5 (0.477 5)
		中　面	23.412 (21.725)	−0.005 9 (0.000 0)	−0.001 9 (0.000 0)	−0.001 1 (0.000 0)	−0.000 8 (0.000 0)	−0.000 6 (0.000 0)
		下表面	22.842 (21.725)	0.514 1 (0.521 5)	0.088 4 (0.091 3)	−0.162 7 (−0.160 4)	−0.341 5 (−0.339 0)	−0.693 4 (0.477 5)
0.2	14	上表面	42.108 (5.431)	0.327 0 (−0.521 5)	0.143 7 (−0.091 3)	0.254 5 (0.160 4)	0.373 1 (0.339 0)	0.776 0 (0.477 5)
		中　面	6.845 (5.431)	−0.055 0 (0.000 0)	−0.007 7 (0.000 0)	−0.004 5 (0.000 0)	−0.003 3 (0.000 0)	−0.002 4 (0.000 0)
		下表面	6.340 (5.431)	0.526 4 (0.521 5)	0.083 2 (0.091 3)	−0.165 3 (−0.160 4)	−0.343 1 (−0.339 0)	−0.799 6 (−0.477 5)
0.4	18	上表面	74.251 (1.358)	3.152 8 (−0.521 5)	0.875 1 (−0.091 3)	0.531 0 (0.160 4)	0.466 4 (0.339 0)	0.866 7 (0.477 5)
		中　面	2.480 (1.358)	−0.188 6 (0.000 0)	−0.055 0 (0.000 0)	−0.019 2 (0.000 0)	−0.013 3 (0.000 0)	−0.010 2 (0.000 0)
		下表面	2.041 (1.358)	0.666 1 (0.521 5)	0.095 1 (0.091 3)	−0.173 2 (−0.160 4)	−0.345 9 (−0.339 0)	−0.948 4 (−0.477 5)
0.6	22	上表面	109.80 (0.603)	7.839 7 (−0.521 5)	2.188 8 (−0.091 3)	1.021 0 (0.160 4)	0.630 3 (0.339 0)	0.861 2 (0.477 5)
		中　面	1.240 (0.603)	−0.174 7 (0.000 0)	−0.148 2 (0.000 0)	−0.064 9 (0.000 0)	−0.032 2 (0.000 0)	−0.023 6 (0.000 0)
		下表面	1.150 (0.603)	0.684 6 (0.521 5)	0.171 5 (0.091 3)	−0.1553 (−0.160 4)	−0.350 5 (−0.339 0)	−1.046 8 (−0.477 5)

注：表中括号里的结果是按薄板理论计算的•

表 2 三层圆板的应力和挠度

	$\frac{WC_{11}^{(2)}h}{P}$	$\frac{\sigma_r h^2}{P}$			$\frac{\tau_{rZ}h^2}{P}$	$\frac{\sigma_\theta h^2}{P}$
	$r=0.0$	$r=0.2b$	$r=0.6b$	$r=b$	$r=b$	$r=b$
$h/b=0.1, K_1=K_3=2, K_2=8$						
上层上表面	19.233 6	−0.486 9	0.333 8	1.051 2	0.000 0	0.248 4
上层交接面	14.264 5	−0.671 4	0.233 9	0.518 5	−0.010 1	0.122 5
中层上交接面	14.264 5	−0.134 1	0.046 8	0.103 7	−0.010 1	0.024 5
中层下交接面	10.090 7	0.132 4	−0.047 4	−0.104 4	−0.009 8	−0.024 7
下层交接面	10.090 7	0.661 6	−0.236 9	−0.522 2	−0.009 8	−0.123 4
下层下表面	10.075 2	0.767 7	−0.302 5	−1.067 9	0.000 0	−0.252 3
$h/b=0.2, K_1=K_3=3, K_2=10$						
上层上表面	19.569 3	0.639 7	0.439 9	1.245 7	0.000 0	0.294 4
上层交接面	7.715 8	−0.707 5	0.222 8	0.384 3	−0.022 4	0.090 8
中层上交接面	7.715 8	−0.141 0	0.044 5	0.076 9	−0.022 4	0.0182
中层下交接面	3.522 8	0.151 5	−0.046 4	−0.078 2	−0.021 8	−0.018 5
下层交接面	3.522 8	0.756 8	−0.232 0	−0.391 1	−0.021 8	−0.092 4
下层上表面	3.751 8	0.838 9	−0.314 9	−1.298 0	0.000 0	−0.306 7
$h/b=0.4, K_1=K_3=4, K_2=12$						
上层上表面	31.411 1	5.973 3	0.890 8	1.546 6	0.000 0	0.365 5
上层交接面	5.753 7	−1.933 0	0.198 9	0.1120	−0.048 1	0.026 5
中层上交接面	5.753 7	−0.392 7	0.039 9	0.022 4	−0.048 1	0.005 3
中层下交接面	1.5608	0.130 0	−0.038 1	−0.025 9	−0.047 5	−0.006 1
下层交接面	1.560 8	0.666 7	−0.191 1	−0.129 4	−0.047 5	−0.030 6
下层下表面	1.551 7	1.181 0	−0.337 1	−1.669 1	0.000 0	−0.394 4

[参 考 文 献]

[1] Timoshenko S, Woinowsky_Krieger S. Theory of Plates and Shells[M]. Second edition, New YorkL McGraw_Hill Book Company, Inc, 1959.

[2] Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates[J]. J Appl Mech, 1945, **12**(1): 69~77.

[3] Reddy J N. A simple higher_order theory for laminated composite plates[J]. J Appl Mech, 1984, **51**(4): 745~752.

[4] Yeh Kaiyuan, Zhang Xiaojing, Zhou Youhe. An analytical formula of the exact solution to Von Karman's equations of a circular plate under a concentrated load[J]. Int J Non_Linear Mech, 1989, **24**(6): 551~560.

[5] Nath Y. Large amplitude response of circular plates on elastic foundations[J]. Int J Non_Linear Mech, 1982, **17**(4): 285~296.

[6] Prathap G, Varadan T K. Axisymmetric vibrations of polar orthotropic circular plates[J]. AIAA J, 1976, **14**(11): 1639~1646.

[7] Reddy J N, Huang C L, Singh I R. Large deflections and large amplitude vibrations of axisymmetric circular plates[J]. Int J Numer Methods Engrg, 1981, **17**(4): 527~ 541.
[8] 范家让. 强厚度叠层板壳的精确理论[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
[9] 盛宏玉, 范家让. 非平面应变状态下的叠层厚壁筒[J]. 应用力学学报, 1997, **14**(2): 64~ 71.

Axisymmetric Bending for Thick Laminated Circular Plate Under a Concentrated Load

Sheng Hongyu, Fan Jiarang
(Department of Architectural Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, P R China)

Abstract: Based upon the fundamental equations of three dimensional elasticity, the state equation for axisymmetric bending of laminated transversely isotropic circular plate is established and the concentrated force on plate surface is expanded into Fourier_Bessel's series, therefore, an analytical solution for the problem is presented. Every fundamental equation of three dimensional elasticity can be exactly satisfied by the solution and all the independent elastic constants can be taken into account fully, furthermore, the continuity conditions between plies can also be satisfied.

Key words: laminated circular plate; state equation; concentrated load; axisymmetric bending