应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 11_1143_06

微分方程递归算子的一种推广

陈玉福[1,2],　张鸿庆[1]

(1　大连理工大学 数学研究所, 辽宁大连 116024; 2　锦州师范学院数学系, 辽宁锦州 121003)

摘要:　微分方程的多数重要的递归算子都是积微分算子　在试图获得整个对称族时人们常常遇到困难　有时甚至由于缺乏精确性而导致伪对称　本文给出递归算子一种推广, 其在某种程度上消除了这些问题　文中还给出了若干重要例子说明这种推广及其重要性

关　键　词:　对称;　递归算子;　延拓
中图分类号:　O29; O175 3　　　文献标识码:　A

引　　言

递归算子对于构造微分方程对称及相关问题是非常有用的　它的一般形式首先由 Olver (1977) 给出, 尽管在此之前许多人对于递归性质, 特别是关于发展方程, 已经作了很多的研究 (参看[1~ 3])　根据 Olver(1986[4]) , 递归算子是微分函数代数上的特殊线性算子, 微分方程的每一个对称都可以理解成所说的微分代数中的一个元素(称为该对称的特征)　递归算子把微分方程的对称的特征映射成该方程的特征

大多数重要的递归算子是所谓的积微分算子, 而且它们的逆有时被用来构造更多的非局部对称族(参看[5, 6, 7])　但是逆微分算子也产生一个问题对此我们知之甚少　例如, $R = D_x^2 + 2u/3 + u_x D_x^{-1}/3$ 是 KdV 方程 $u_t = u_{xxx} + u u_x$ 的递归算子, 积分算子 D_x^{-1} 只能对那些全导数函数有定义　也就是说 $D_x^{-1}(Q)$ 意味着存在某个微分函数 P 使得 $Q = D_x(P)$　这会使我们在获取方程的整个对称族 $R^k(Q)$, $k = 1, 2,$　, 时遇到困难　另一方面, 这样的微分函数 P 不是唯一确定的, 而这种不唯一有时会导致伪对称　通过引入依赖非局部变量的微分函数(称为势) 人们可以用递归算子产生非局部对称(参看[6, 8])　这种方法的实质是 Wahlquist_Estabrook 延拓思想 (参看[9]) 在无穷维射流丛上的扩展 (参看[10])　本文中我们将利用 Wahlquist_Estabrook 延拓推广递归算子的概念　在我们的定义中, 原来的逆微分算子被一组微分方程所代替　由递归算子产生的微分函数保证是该方程广义对称的特征　特别地, 递归算子的逆可以象算子本身一样对待和处理

1　例　　子

为了以后叙述方便, 我们直接称广义对称的特征为广义对称, 并且把微分方程组　$[u] =$

收稿日期:　1998_05_22;　修订日期:　1999_05_22
基金项目:　辽宁省教委资助课题
作者简介:　陈玉福(1958~) , 男, 副教授, 研究方向: 微分方程, 已发表论文 20 余篇.

0 的线性化算子记为 $\boldsymbol{D}$ 如果 $[u] = 0$ 是 m 个方程

$$^{l}(x, u^{(n)}) = 0 \qquad (l = 1, 2, \quad , m), \tag{1}$$

p 个独立变量 $x^1, \quad , x^p$ 和 q 个因变量 $u^1, \quad , u^q$ 的方程组, 则 $\boldsymbol{D}$ 是一个 $m \quad q$ 矩阵, 其元素为

$$(\boldsymbol{D} \ )^{l} = \sum_{|J| \quad 0} \frac{l}{u_J} D_J \qquad (\quad = 1, \quad , q;\ l = 1, \quad , r), \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{D}_J = \boldsymbol{D}^{j}_{x^1} \quad \boldsymbol{D}^{j}_{x^p}, J = (j_1, \quad , j_p)$ 按照 Olver[4], 微分函数 $Q(u)$ 是微分方程(1) 的广义对称当且仅当

$$\boldsymbol{D} \ (Q) = 0(\mathrm{mod} \quad), \tag{3}$$

而递归算子通常是一个线性算子 $R: F^q \quad F^q$(q_重微分代数), 使得只要 Q 是方程(1) 的广义对称, 则 $R(Q)$ 也是 R 是递归算子的一个充分条件是: 存在另一个线性算子 $S: F^q \quad F^q$, 使得

$$\boldsymbol{D} \ R = \boldsymbol{SD} \ (\mathrm{mod} \quad) \tag{4}$$

考虑 mKdV 方程

$$0 = \quad [u] = u_t + u_{xxx} - 6u^2 u_x, \tag{5}$$

及其递归算子

$$R = D_x^2 - 4u^2 - 4u_x D_x^{-1} \quad u \tag{6}$$

因为 u_x 是 mKdV 的广义对称, 而且

$$R(u_x) = D_x^2(u_x) - 4u^2 u_x - 4u_x D_x^{-1}(uu_x) = - \ u_t - 4u_x f(t),$$

关于 mKdV 方程的所有解成立, 人们通常选取 $f(t) = \mathrm{const}$ 以使 $R(u_x)$ 仍是 mKdV 方程的对称 这种选法是 自然 的 另一方面, 方程(5) 可以通过坐标变换化成

$$su_s + s^4 u_{yyy} - 6s^2 u^2 u_y + yu_y = 0 \tag{7}$$

方程(7) 有广义对称 su_y, 而且积微分算子

$$R = s^2 D_y^2 - 4u^2 - 4u_y D_y^{-1} \quad u, \tag{8}$$

一度被认为是它的递归算子 显然, $R(su_y) = - \ u_s - s^{-1} yu_y - 4u_y g(s)$, 其中 $g(s)$ 是经 $D_y^{-1}(suu_y) = \dfrac{1}{2}su^2 + g(s)$ 引入的 按惯例人们可能要取 $g(s) = \mathrm{const}$ 然而直接验证可知 $- \ u_s - s^{-1}yu_y - 4u_y g(s)$ 是方程(7) 的对称当且仅当 $g(s) = as$(对于任意的常数 a) 这个例子告诉我们 自然 选法不总是对的

2 方程的延拓

如果纯量微分方程可以写成保守形式

$$D_{x_1} f_1(x, u^{(n)}) + D_{x_2} f_2(x, u^{(n)}) = 0,$$

则可以引进新的因变量 v(称为势) 满足

$$\frac{v}{x_1} = - f_2, \qquad \frac{v}{x_2} = f_1,$$

原方程因而被延拓 通过研究延拓方程可以获得有关原方程非局部对称的信息(参看[11])

Wahlquist_Estabrook 延拓推广了上述延拓概念([9])

对于微分方程(1) 我们引进新的因变量 $v^1, \quad , v^r$(称为伪势) 及微分函数 $f_i^k(x, u^{(n-1)}, v)$ 使得

$$\frac{v^k}{x^i}=f_i^k(x,u^{(n-1)},v)\quad(i=1,\ \ ,p;k=1,\ \ ,r),\tag{9}$$

如果每个f_i^k 都满足所谓的可积性条件

$$\left(D_{x^j}f_i^k-D_{x^i}f_j^k-\sum_{l=1}^{r}\left(f_i^l\frac{f_j^k}{v^l}-f_j^l\frac{f_i^k}{v^l}\right)\right)(x,u^{(n)},v)=0(\mathrm{mod}\quad),\tag{10}$$

则由(1)和(9)共同组成的方程组称为原方程组的 Wahlquist_Estabrook 延拓, 记为

$$(x,u^{(n)},v)=0\tag{11}$$

因为 依赖于 x, u, v 及u 关于x 的偏导数, 此时全导数D_{x^i} 自然被延拓为D_{x^i}, 其中

$$D_{x^i}=D_{x^i}+\sum_{k=1}^{r}f_i^k\frac{}{v^k},\tag{12}$$

如果记 $V^i=\sum_{k=1}^{r}f_i^k\frac{}{v^k}$, 则可积性条件(10) 可写成

$$[D_{x^i},V^j]+[V^i,D_{x^j}]+[V^i,V^j]=0(\mathrm{mod}\quad)\tag{13}$$

或者简写为$[D_{x^i},D_{x^j}]=0(\mathrm{mod}\quad)$ 利用 Wahlquist_Estabrook 延拓结构可将$(x,u^{(n)})$ 上的 q_重微分函数代数F^q 延拓为$(x,u^{(n)},v)$ 上的q_重微分函数代数F^q, 而且F^q 上的算子被延拓成F^q 上的算子, 这里把每次出现的D_{x^i} 换成D_{x^i}

定义 1 对于微分方程(1)及其 Wahlquist_Estabrook 延拓(11), 如果 q_重微分函数$Q(x,u^{(n)},v)$ 满足$D\ (Q)=0(\mathrm{mod}\quad)$, 则称$Q$ 是一个广义对称 当Q 真依赖于势时则说是非局部的

考虑 KdV 方程 $u_t=u_{xxx}+uu_x$ 的递归算子$R=D_x^2+\frac{2}{3}u+\frac{1}{3}u_xD_x^{-1}$ 对于广义对称 Q, 为了确定函数$D_x^{-1}(Q)$ 需要令

$$D_x(P)=Q,\tag{14}$$

但是可积性条件要求$D_tD_x(P)=D_xD_t(P)$ 考虑到方程的线性化算子$D\ \ =D_t-D_x^3-uD_x-u_x$ 我们推得

$$D_t(P)=(D_x^2-u)(Q),\tag{15}$$

容易验证当Q 是广义对称, 而且(14), (15) 都成立时, $R(Q)=\left(D_x^2+\frac{2}{3}u\right)(Q)+\frac{1}{3}u_xP$ 一定是广义对称 这启发我们修正递归算子的定义及如何确定 参函数 , 如此例中的P

已知微分方程(1)及其 Wahlquist_Estabrook 延拓(11), 考虑两组矩阵: $s\quad s$ 矩阵$\boldsymbol{A}_i$, 其元素属于F, $s\quad q$ 矩阵$\boldsymbol{B}_j$, 其元素是F 上的微分算子, $i,j=1,\ \ ,p$ 如果这些矩阵满足

$$D_{x^i}(\boldsymbol{A}_j)-D_{x^j}(\boldsymbol{A}_i)=\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j-\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{A}_i(\mathrm{mod}\quad),\tag{16}$$

$$D_{x^i}(\boldsymbol{B}_j)-D_{x^j}(\boldsymbol{B}_i)=\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{B}_j-\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{B}_i(\mathrm{mod}\quad,D\quad),\tag{17}$$

则称$(\{\boldsymbol{A}_i\},\{\boldsymbol{B}_j\})$ 是延拓方程(11) 的一个协调对, 而关于P 和Q 的方程

$$D_{x^i}(P)=\boldsymbol{A}_iP+\boldsymbol{B}_i(Q)\quad(i=1,\ \ ,p),\tag{18}$$

称为协调方程(组)

定义 2 已知微分方程(2 1)及其 Wahlquist_Estabrook 延拓(11), 我们说F 上的微分算子矩阵对$(\boldsymbol{C}_{q\quad s},\boldsymbol{D}_{q\quad q})$ 是由协调对$(\{A_i\},\{B_j\})$ 诱导的递归算子, 如果$Q\ =\boldsymbol{C}(P)+\boldsymbol{D}(Q)$ 仍是广义对称, 只要Q 是广义对称, 而且(P,Q) 是协调方程(18) 的解

注: 一般情况下, s 是 参函数 的个数

命题 如果 Q 是方程(1) 的广义对称,则协调方程(18) 的解满足如下等式

$$D_{x^i}(D_{x^j}(P)) = D_{x^j}(D_{x^i}(P))(\mathrm{mod}\quad) \tag{19}$$

$i, j = 1, \quad , p$,即 P 是可积的

3 应 用

首先考虑 Burgers 方程(参看[12])

$$u_t = uu_x + u_{xx}, \tag{20}$$

的递归算子

$$R = 2D_x + u + u_x D_x^{-1}, \tag{21}$$

由于它是积微分算子,我们引进 Wahlquist_Estabrook 延拓如下

$$\frac{v}{x} = u, \qquad \frac{v}{t} = \frac{1}{2}u^2 + u_x \tag{22}$$

此时全导数 D_x, D_t 被延拓为D_x, D_t

$$D_x = D_x + u \frac{}{v}, \qquad D_t = D_t + \left(\frac{1}{2}u^2 + u_x\right)\frac{}{v} \tag{23}$$

对于广义对称 Q,令

$$D_x(P) = Q, \tag{24}$$

P 的可积性意味着

$$D_t(P) = (u + D_x)(Q), \tag{25}$$

其中 $D = D_t - uD_x - u_x - D_x^2$ 是$\boldsymbol{D}$ 的延拓形式,而且 $= u_t - uu_x - u_{xx}$ 我们看到 R 被延拓成 R: $R(Q) = u_xP + (u + 2D_x)(Q)$ 直接验证可知算子 $R = (u_x, u + 2D_x)$ 是 Burgers 方程的,由协调对$(\left\{A_x, A_t\right\}, \left\{B_x, B_t\right\})$ 诱导的递归算子,其中 $A_x = A_t = 0$, $B_x = 1$, $B_t = u + D_x$ 如果 Q 是与v 无关的,则 $R(Q) = u_xP + (u + 2D_x)(Q)$,而 参函数 P 满足

$$D_x(P) = Q, \quad D_t(P) = (u + D_x)(Q), \tag{26}$$

其次,考虑第一节提到的 mKdV 方程(5) 的广义对称(6) 类似地,R 可以写成

$$R(Q) = D_x \quad (D_x \quad u^{-1}D_x - 4u)(P)。 \tag{27}$$

而

$$D_x(P) = uQ, \quad D_t(P) = (-uD_x^2 + u_xD_x - u_{xx} + 6u^3)(Q), \tag{28}$$

相应的协调对为 $(\left\{A_x, A_t\right\}, \left\{B_x, B_t\right\})$,其中

$$A_x = A_t = 0, \quad B_x = u, \quad B_t = -uD_x^2 + u_xD_x - u_{xx} + 6u^3$$

递归算子概念的推广为用已知递归算子构造新的递归算子提供了可能性 考虑第二个例子,令 $Q = R(Q)$, $S = D_x \quad u^{-1}D_x - 4u$,我们有 $Q = D_x \quad S \quad D_x^{-1}(uQ)$,而且 $Q = u^{-1}D_x$ $S^{-1} \quad D_x^{-1}(Q\ )$ 引进参函数 F,使得

$$D_x(F) = Q\ , \quad D_t(F) = (-D_x^2 + 6u^2)(Q\ ) \tag{29}$$

注意到 $D = D_t + D_x^3 - 6u^2D_x - 12uu_x$,可知 F 是可积的,即 $D_xD_t(F) = D_xD_t(F)(\mathrm{mod}\quad)$ 因为 $Q = u^{-1}D_xS^{-1}(F)$,所以有必要引进另外的参函数 E,使得

$$(D_x \quad u^{-1}D_x - 4u)(E) = S(E) = F, \tag{30}$$

这个方程可以写成更漂亮的形式

$$[(u^{-1}D_x)^2-4](E)=u^{-1}F \tag{31}$$

显然 $S(e^{2v})=S(e^{-2v})=0$, 其中 $v=\ d\,dx$ 引进伪势 v 及mKdV 方程的Wahlquist_Estabrook 延拓: $\frac{v}{x}=u$, $\frac{v}{y}=-u_{xx}+2u^3$, 全导数延拓成

$$D_x=D_x+u\frac{}{v},\quad D_t=D_t+(-u_{xx}+2u^3)\frac{}{v} \tag{32}$$

在这上延拓结构下, 方程(31)的解是

$$E=-\frac{1}{4}e^{-2v}G+\frac{1}{4}e^{2v}H,$$

其中 G,H 由

$$\left.\begin{aligned}&D_x(G)=e^{2v}F,\quad D_t(G)=e^{2v}[-(D_x-2u)(Q\ )-2(u_x-u^2)F],\\&D_x(H)=e^{-2v}F,\quad D_t(H)=e^{-2v}[-(D_x+2u)(Q\ )+2(u_x+u^2)F],\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

确定 直接计算可以证明 $Q=u^{-1}D_x(E)=\frac{1}{2}e^{-2v}G+\frac{1}{2}e^{2v}H$ 是mKdV 方程的广义对称, 只要方程(29), (33) 和 $D\ (Q\ )=0(\mathrm{mod}\ \ )$ 全被满足 至此我们得到新的递归算子

$$\boldsymbol{R}=\left(\left(0\quad\frac{1}{2}e^{-2v}\quad\frac{1}{2}e^{2v}\right),0\right)$$

其由协调对 $(\{A_x,A_t\},\{B_x,B_t\})$:

$$\boldsymbol{A}_x=\begin{pmatrix}0&0&0\\e^{2v}&0&0\\e^{-2v}&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\-2e^{2v}(u_x-u^2)&0&0\\2e^{-2v}(u_x+u^2)&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_t=\begin{pmatrix}-D_x^2+6u^2\\-e^{2v}(D_x-2u)\\-e^{-2v}(D_x+2u)\end{pmatrix},$$

所诱导, 参函数为 F, G, H

[参 考 文 献]

[1] Ablowits M J, Kaup D J, Newell A C, et al. The inverse scaterse scattering transform Fourier analysis for nonlinear problems[J]. Stud Appl Math, 1974, **53**(4): 249~315.

[2] Miura R M, Gardner C S, Kruskal M D. Korteweg_de Vries equation and generalizations , [J]. J Math Phys, 1968, **9**(8): 1202~1209.

[3] Magri F. A simple model of the integrable Hamiltonian equations[J]. J Math Phys, 1978, **19**(5): 1156~1162.

[4] Olver P J. Applications of Lie Groups to Differential Equations [M]. New York: Springer_Verlag, 1986.

[5] Olver P J. Evolution equations possessing infinitely many symmetries[J]. J Math Phys, 1997, **18**(6): 1212~1215.

[6] Krasil shchik I S, Vinogradov A M. Nonlocal treads in the geometry of differential equations, symmetries, conservation laws, and Backlund transformations[J]. Acta Appl Math, 1989, **15**(2): 161~209.

[7] Ayse Karasu, Jordan KdV systems and painleve property[J]. Int J Theo Phys, 1997, **36**(3): 705~713.

[8] Khor kova N G. Conservation laws and nonlocal symmetries[J]. Math Notes, 1989, **44**(4): 562~568.

[9] Wahlquist H D, Estabrook F B. Prolongation structures of nonlinear evolution equations[J]. J Math

Phys , 1975, **16**(1): 1~ 7.

[10] Dodd R K. The general prolongation formulae for nonlocal symmetries[J]. Phys Lett , 1994, A**195**: 125~ 127.

[11] Bluman G W, Kumei S. Symmetries and Differential Equations [M]. New York: Springer_Verlag, 1989.

[12] Krasil shchik I S, Kersten P H M. Deformations and recursion operators for evolution equation[A]. Geometry in Partial Differential Equations [C]. World Scientific Publishing Co. 1994, 114~ 155.

[13] 张鸿庆. 弹性力学方程组一般解的统一理论[J]. 大连理工大学学报, 1978, **17**(3): 23~ 27.

[14] 张鸿庆. 力学的代数化、机械化、辛化与几何化[A]. 见: 在第七届现代力学与数学会议(MMM_)上的报告[C], 1997, 20~ 25.

A Generalization of Recursion Operators of Differential Equations

Chen Yufu[1, 2], Zhang Hongqing[1]

(1 Institute of Mathematics Science, Dalian University of Technology, Dalian 116024, P R China;
2 Department of Mathematics, Jinzhou Normal College, Jinzhou, Liaoning 121003, P R China)

Abstract: Most important recursion operators of differential equations are integro_differential operators. One often runs into difficulties in trying to obtain a full hierarchy of symmetries. The lack of precision sometimes leads to bogus symmetries. In the present paper, a generalization of recursion operators is given, which eliminates the problem. Several examples are also given to demonstrate the generalization and the significance of the generalization is shown simultaneously.

Key words: symmetries; recursion operators; prolongation of equations