应用数学和力学, 第 20 卷 第 10 期(1999 年 10 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 10_1015_10

一类广义非线性隐拟变分包含*

丁协平

(四川师范大学 数学系, 成都 610066)

摘要: 引入和研究了一类新的涉及集值极大单调映象的广义非线性隐拟变分包含· 对此类变分包含在没有紧性假设下证明了解的存在定理· 为寻求此类变分包含的近似解,建议和分析了一个新的迭代算法· 给出了由新算法产生的迭代序列的收敛性· 作为特殊情形, 也讨论了在此领域内的某些已知结果·

关 键 词: 广义非线性隐拟变分包含; 极大单调映象; 迭代算法; Hilbert 空间
中图分类号: O177. 91; O177. 92 文献标识码: A

引 言

对于产生自力学、数学规划、最优化和控制、经济平衡、管理科学、运筹学和其他工程科学和数学分支中广泛范围内的问题, 变分不等式和补问题理论已变成了很有效和强有力的研究工具· 近年来变分不等式和补问题已在很多不同方向上得到推广· 各种拟(隐) 变分不等式和拟(隐) 补问题是这些古典问题的很重要的推广, 这些问题由 Bensoussan、Gourst 和 Lions[1], Bensoussan 和 Lions[2], Baiocchi 和 Capelo[3], Mosco[4], Isac[5,6], Noor[7~10], Pang[11,12], Siddiqi 和 Ansari[13,14], Ding 和 Tarafdar[15,16], Gao 和 Yao[17] 和 Zeng[18] 引入和研究· 关于经典变分不等式和补问题在有限维空间和无限维 Hilbert 空间内的发展, Harker 和 Pang[19] 及 Noor、Noor 和 Rassias[20] 提供了很好的评述·

经典变分不等式和补问题的另一重要和有用的推广是由 Saigal[21], Fang[22], Fang 和 Peterson[23], Chan 和 Pang[24], Siddiqi 和 Ansari[25], Ding[26~28], Ding 和 Tarafdar[29] 和 Zeng[30] 等人引入和研究的广义拟(隐) 变分不等式和广义拟(隐) 补问题·

最近 Hassouni 和 Moudafi[31] 引入和研究了一类变分包含, 并发展了寻求近似解的扰动算法· Adly[32], Huang[33], Kazmi[34] 和 Ding[35,36] 推广了[31] 中的结果到一般变分包含和广义拟变分包含·

本文将引入和研究一类新的广义非线性隐拟变分包含· 应用 Hilbert 空间内极大单调映象的预解算子的性质, 证明了广义隐拟变分包含问题等价于不动点问题· 在没有紧性假设下, 对广义非线性隐拟变分包含的解证明了一个存在定理, 建议和分析了一个寻找近似解的新的迭代算法· 给出了由算法产生的迭代序列的收敛性· 作为特殊情形讨论了这一领域内的若干已知结果·

---

* 收稿日期: 1998_06_12; 修订日期: 1999_02_05
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19871059)
作者简介: 丁协平(1938~) , 男, 教授.

1 预备知识

设H是具有范数$\|\cdot\|$和内积$\langle\cdot,\cdot\rangle$的Hilbert空间。设$N:H\times H\to H$和$g:H\to H$是单值映象并令$E,F,G:H\to 2^H$是集值映象。设$M:H\times H\to 2^H$是集值映象，使得对每一给定$y\in H$，$M(\cdot,y):H\to 2^H$是极大单调映象且$g(H)\cap \mathrm{dom}(M(\cdot,y))\neq\varnothing$。除特别陈述外，全文中我们将研究下面广义非线性隐拟变分包含问题(GNIQVIP)：

$$\begin{cases}\text{求 } x\in H,\ u\in E(x),\ v\in F(x) \text{ 和 } z\in G(x) \text{ 使得}\\ 0\in M(g(x),z)+N(u,v)\text{。}\end{cases}\tag{1}$$

因为对每一$y\in H$，$M(\cdot,y)$是极大单调映象，问题(1)等价于下面问题：

$$\begin{cases}\text{求 } x\in H,\ u\in E(x),\ v\in F(x) \text{ 和 } z\in G(x) \text{ 使得}\\ \langle y^*+N(u,v),y-g(x)\rangle\geqslant 0, \qquad \forall (y,y^*)\in \mathrm{Gr}(M(\cdot,z)),\end{cases}\tag{2}$$

其中$\mathrm{Gr}(M(\cdot,z))$是$M(\cdot,z)$的图。

特殊情形

(Ⅰ) 如果$M(x,y)=M(x)$，$\forall x,y\in H$和G是恒等映象，则问题(1)化归为下面问题：

$$\begin{cases}\text{求 } x\in H,\ u\in E(x) \text{ 和 } v\in F(x) \text{ 使得}\\ 0\in M(g(x))+N(u,v)\text{。}\end{cases}\tag{3}$$

问题(3)是新的且包含由Adly[32]引入和研究的$VI(T,A,B,S)$问题作为特殊情形。

(Ⅱ) 设$\varphi:H\times H\to \mathbf{R}\cup\{\infty\}$使得对每一固定$y\in H$，$\varphi(\cdot,y)$是真凸下半连续泛函且满足$g(H)\cap\mathrm{dom}(\partial\varphi(\cdot,y))\neq\varnothing$，其中$\partial\varphi(\cdot,y)$是$\varphi(\cdot,y)$的次微分。由[37]知$\partial\varphi(\cdot,y):H\to 2^H$是极大单调映象。令$M(x,y)=\partial\varphi(x,y)$，$\forall x,y\in H$。对任定$z\in H$，由$\varphi(\cdot,z)$的次微分定义有$-N(u,v)\in M(g(x),z)=\partial\varphi(g(x),z)$当且仅当

$$\varphi(y,z)-\varphi(g(x),z)\geqslant\langle -N(u,v),y-g(x)\rangle, \qquad \forall y\in H\text{。}$$

因此在此情形下问题(1)化归为下面问题：

$$\begin{cases}\text{求 } x\in H,\ u\in E(x),\ v\in F(x) \text{ 和 } z\in G(x) \text{ 使得}\\ \langle N(u,v),y-g(x)\rangle\geqslant\varphi(g(x),z)-\varphi(y,z), \qquad \forall y\in H\text{。}\end{cases}\tag{4}$$

如果$N(u,v)=u-v$，$\forall u,v\in H$和G是恒等映象，则问题(4)化归由Ding[35,36]引入和研究的广义拟变分包含问题(2.1)和(1.1)。

(Ⅲ) 如果$\varphi(x,y)=\varphi(x)$，$\forall x,y\in H$，G是恒等映象和$N(u,v)=f(u)-p(v)$，$\forall u,v\in H$其中$f,p:H\to H$是单值映象，则问题(4)化归为下面问题：

$$\begin{cases}\text{求 } x\in H,\ u\in E(x) \text{ 和 } v\in F(x) \text{ 使得}\\ \langle f(u)-p(v),y-g(x)\rangle\geqslant\varphi(g(x))-\varphi(y), \qquad \forall y\in H\text{。}\end{cases}\tag{5}$$

问题(5)是由Huang[33]研究的集值非线性广义变分包含问题，它顺次包含了由Hassouni和Moudafi[31]和Kazmi[34]研究的变分包含问题。

(Ⅳ) 如果$K:H\to 2^H$是集值映象使得每一$K(x)$是H的闭凸子集(或$K(x)=m(x)+K$其中$m:H\to H$和K是H的闭凸子集)，且对每一固定的$z\in H$，$\varphi(\cdot,z)=I_{K(z)}(\cdot)$是$K(z)$的指标函数，

$$I_{K(z)}(x)=\begin{cases}0, & \text{如果 } x\in K(z),\\ +\infty, & \text{否则},\end{cases}$$

则问题(4)化归广义强非线性隐拟变分不等式问题：

$$\begin{cases} 求\ x \in H, u \in E(x), v \in F(x)\ 和\ z \in G(x)\ 使得 \\ g(x) \in K(z), \langle N(u,v), y - g(x)\rangle \geqslant 0, \qquad \forall y \in K(z)\cdot \end{cases} \tag{6}$$

(Ⅴ) 如果 $N(u,v) = S(u) + T(v)$, $\forall u, v \in H$ 其中 $S, T: H \to H$ 是单值映象, 则问题(6)化归为下面问题:

$$\begin{cases} 求\ x \in H, u \in E(x), v \in F(x)\ 和\ z \in G(x)\ 使得 \\ g(x) \in K(z), \langle S(u) + T(v), y - g(x)\rangle \geqslant 0, \qquad \forall y \in K(z)\cdot \end{cases} \tag{7}$$

问题(7) 是由 Huang[38] 和 Noor[39] 考虑的完全广义强非线性隐拟变分不等式问题•

简言之, 对于映象 N、g、E、F、G 和 M 的适当选取, 容易看出广义非线性隐拟变分包含问题(1) 包含了变分包含、广义拟变分包含、广义变分不等式、广义隐拟变分不等式和广义显和隐补问题的许多已知类型作为特殊情形• 例如见[4～14, 17～29, 30～36, 38～40] 和其中参考文献•

定义 1.1 设 H 是 Hilbert 空间, $M: H \to 2^H$ 是极大单调映象• 对任给 $\rho > 0$, 称由下式定义的映象 $J_\rho^M: H \to H$:

$$J_\rho^M(x) = (I + \rho M)^{-1}(x), \qquad \forall x \in H$$

为 M 的预解算子, 其中 I 为 H 上的恒等映象•

引理 1.1 ([37]) 设 $M: H \to 2^H$ 是极大单调映象• 则 M 的预解算子 $J_\rho^M: H \to H$ 是非扩张的, 即是

$$\| J_\rho^M(x) - J_\rho^M(y) \| \leqslant \| x - y \|, \qquad \forall x, y \in H\cdot$$

定义 1.2 称映象 $g: H \to H$ 是

(ⅰ) δ_强单调的如果存在常数 $\delta > 0$ 使得

$$\langle g(x) - g(y), x - y\rangle \geqslant \delta \| x - y \|^2, \qquad \forall x, y \in H;$$

(ⅱ) σ_Lipschitz 连续的如果存在常数 $\sigma > 0$ 使得

$$\| g(x) - g(y) \| \leqslant \sigma \| x - y \|, \qquad \forall x, y \in H\cdot$$

定义 1.3 设 $E: H \to 2^H$ 是集值映象且 $S: H \to H$ 是单值映象• 称映象 $N: H \times H \to H$ 是

(ⅰ) 关于 E 在第一自变量 α_强单调如果存在常数 $\alpha > 0$ 使得

$$\langle N(u, \cdot) - N(v, \cdot), x - y\rangle \geqslant \alpha \| x - y \|^2,$$
$$\forall x, y \in H, u \in E(x), v \in E(y);$$

(ⅱ) 在第一自变量 β_Lipschitz 连续如果存在常数 $\beta > 0$ 使得

$$\| N(u, \cdot) - N(v, \cdot) \| \leqslant \beta \| u - v \|, \qquad \forall u, v \in H\cdot$$

类似可定义 $N(\cdot, \cdot)$ 在第二自变量的 ξ_Lipschitz 连续性;

(ⅲ) 称 S 关于 E 是 α_强单调的如果存在常数 $\alpha > 0$ 使得

$$\langle S(u) - S(v), x - y\rangle \geqslant \alpha \| x - y \|^2,$$
$$\forall x, y \in H, u \in E(x), v \in E(y)\cdot$$

定义 1.4 令 $CB(H)$ 表 H 的一切非空有界闭子集的族, 称集值映象 $E: H \to CB(H)$ 是 ε_Lipschitz 连续的如果存在常数 $\varepsilon > 0$ 使得

$$H(E(x), E(y)) \leqslant \varepsilon \| x - y \|, \qquad \forall x, y \in H,$$

其中 $H(\cdot, \cdot)$, 是 $CB(H)$ 上的 Hausdorff 距离•

2 解的存在性和迭代算法

本节在没有紧性假设下证明了(GNIQVIP) (1) 解的存在定理并建议了求近似解的新迭代

算法. 也给出了由新算法产生的迭代序列的收敛性准则.

我们首先转化(GNIQVIP)(1)为不动点问题.

定理 2.1 (x,u,v,z) 是(GNIQVIP)(1)的解当且仅当(x,u,v,z) 满足下面关系式

$$g(x)=J_\rho^{M(\cdot,z)}(g(x)-\rho N(u,v)),\tag{8}$$

其中 $u\in E(x)$、$v\in F(x)$、$z\in G(x)$, $\rho>0$ 是常数, $J_\rho^{M(\cdot,z)}=(I+\rho M(\cdot,z))^{-1}$ 是 $M(\cdot,z)$ 的预解算子和 I 是 H 上的恒等映象.

证明 由 $M(\cdot,z)$ 的预解算子 $J_\rho^{M(\cdot,z)}$ 的定义,有(8)式成立当且仅当 $u\in E(x)$、$v\in F(x)$ 和 $z\in G(x)$ 使得

$$g(x)-\rho N(u,v)\in g(x)+\rho M(g(x),z).$$

上式成立当且仅当 $u\in E(x)$、$v\in F(x)$ 和 $z\in G(x)$ 使得

$$0\in M(g(x),z)+N(u,v),$$

因此 (x,u,v,z) 是(GNIQVIP)(1)的解当且仅当 $u\in E(x)$、$v\in F(x)$ 和 $z\in G(x)$ 使(8)式成立.

注 2.1 定理 2.1 推广了 Adly[32] 的引理 3.1, Huang[33] 的引理 2.1 和 Ding[35] 的定理 3.1. 从定理 2.1 看出(GNIQVIP)(1)等价于不动点问题(8). 方程(8)能改写为

$$x=(1-\lambda)x+\lambda[x-g(x)+J_\rho^{M(\cdot,z)}(g(x)-\rho N(u,v))],\tag{9}$$

其中 $\lambda\in(0,1]$ 和 $\rho>0$ 是常数. 此不动点陈述使我们能建议下面迭代算法.

算法 2.1 设 E、F、$G:H\to CB(H)$ 是集值映象, $N:H\times H\to H$ 和 $g:H\to H$ 是单值映象且 $M:H\times H\to 2^H$ 使得对每一固定 $y\in H$, $M(\cdot,y):H\to 2^H$ 是极大单调映象满足 $g(H)\cap \mathrm{dom}(M(\cdot,y))\neq\varnothing$. 对给定 $x_0\in H$、$u_0\in E(x_0)$, $v_0\in F(x_0)$ 和 $z_0\in G(x_0)$, 令

$$x_1=(1-\lambda)x_0+\lambda[x_0-g(x_0)+J_\rho^{M(\cdot,z_0)}(g(x_0)-\rho N(u_0,v_0))].$$

由 Nadler[40], 存在 $u_1\in E(x_1)$、$v_1\in F(x_1)$ 和 $z_1\in G(x_1)$ 使得

$$\|u_0-u_1\|\leqslant(1+1)H(E(x_0),E(x_1)),$$
$$\|v_0-v_1\|\leqslant(1+1)H(F(x_0),F(x_1)),$$
$$\|z_0-z_1\|\leqslant(1+1)H(G(x_0),G(x_1)).$$

令 $$x_2=(1-\lambda)x_1+\lambda[x_1-g(x_1)+J_\rho^{M(\cdot,z_1)}(g(x_1)-\rho N(u_1,v_1))].$$

由归纳法我们能得到序列 $\{x_n\}$、$\{u_n\}$、$\{v_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 满足

$$\begin{cases} x_{n+1}=(1-\lambda)x_n+\lambda[x_n-g(x_n)+J_\rho^{M(\cdot,z_n)}(g(x_n)-\rho N(u_n,v_n))],\\ u_n\in E(x_n),\ \|u_n-u_{n+1}\|\leqslant(1+(1+n)^{-1})H(E(x_n),E(x_{n+1})),\\ v_n\in F(x_n),\ \|v_n-v_{n+1}\|\leqslant(1+(1+n)^{-1})H(F(x_n),F(x_{n+1})),\\ z_n\in G(x_n),\ \|z_n-z_{n+1}\|\leqslant(1+(1+n)^{-1})H(G(x_n),G(x_{n+1})),\\ \qquad\qquad (n=0,1,\cdots),\end{cases}\tag{10}$$

其中 $\lambda\in(0,1]$ 和 $\rho>0$ 是常数.

在算法 2.1 中若 $\lambda=1$, 我们有下面算法.

算法 2.2 设 E、F、$G:H\to CB(H)$ 是集值映象, $N:H\times H\to H$ 和 $g:H\to H$ 是单值映象和 $M:H\times H\to 2^H$ 使得对每一给定 $y\in H$, $M(\cdot,y):H\to 2^H$ 是极大单调映象满足 $g(H)\cap \mathrm{dom}(M(\cdot,y))\neq\varnothing$. 对给定 $x_0\in H$、$u_0\in E(x_0)$、$v_0\in F(x_0)$ 和 $z_0\in G(x_0)$, 我们能构造迭

代序列$\{x_n\}$、$\{u_n\}$、$\{v_n\}$和$\{z_n\}$满足

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - g(x_n) + J_\rho^{M(\cdot, z_n)}(g(x_n) - \rho N(u_n, v_n)), \\ u_n \in E(x_n), \quad \|u_n - u_{n+1}\| \leqslant (1+(1+n)^{-1})H(E(x_n), E(x_{n+1})), \\ v_n \in F(x_n), \quad \|v_n - v_{n+1}\| \leqslant (1+(1+n)^{-1})H(F(x_n), F(x_{n+1})), \\ z_n \in G(x_n), \quad \|z_n - z_{n+1}\| \leqslant (1+(1+n)^{-1})H(G(x_n), G(x_{n+1})), \\ \qquad (n = 0, 1, \cdots), \end{cases} \tag{11}$$

其中 $\rho > 0$ 是常数.

算法 2.3 设 E、F、$G: H \to CB(H)$ 是集值映象, S、T、$g: H \to H$ 是单值映象. 令$K: H \to 2^H$ 是集值映象使得对每一$x \in H$, $K(x)$ 是H 的非空闭凸子集. 对给定$x_0 \in H$、$u_0 \in E(x_0)$、$v_0 \in F(x_0)$ 和 $z_0 \in G(x_0)$ 我们能构造如下面迭代序列$\{x_n\}$、$\{u_n\}$、$\{v_n\}$和$\{z_n\}$满足:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\lambda)x_n + \lambda[x_n - g(x_n) + P_{K(z_n)}(g(x_n) + \rho(S(u_n) + T(v_n)))], \\ u_n \in E(x_n), \quad \|u_n - u_{n+1}\| \leqslant (1+(1+n)^{-1})H(E(x_n), E(x_{n+1})), \\ v_n \in F(x_n), \quad \|v_n - v_{n+1}\| \leqslant (1+(1+n)^{-1})H(F(x_n), F(x_{n+1})), \\ z_n \in G(x_n), \quad \|z_n - z_{n+1}\| \leqslant (1+(1+n)^{-1})H(G(x_n), G(x_{n+1})), \quad (n = 0, 1, \cdots), \end{cases}$$

其中 $\rho > 0$ 是常数和 $P_{K(z)}$ 是 H 到$K(z)$ 上的投影.

注 2.2 适当选取映射 E、F、G、M、N、S、T 和g, 算法 2.1、2.2、2.3 包含了对变分不等式、拟变分不等式、变分包含、拟变分包含、补问题和拟补问题的许多已知算法作为特殊情形, 例如见[4 ~ 14, 17 ~ 28, 30 ~ 36, 38, 39] 和其中参考文献.

定理 2.2 设 E、F、$G: H \to CB(H)$ 分别是 ε_Lipschitz 连续、η_Lipschitz 连续和 ζ_Lipschitz 连续的. 令 $g: H \to H$ 是 δ_强单调和σ_Lipschitz 连续的. 设 $N(\cdot, \cdot)$ 在第二自变量是ξ_Lipschitz 连续的. 设 $N: H \times H \to H$ 在第一自变量关于E 是α_强单调的和β_Lipschitz 连续的. 设 $M: H \times H \to 2^H$ 使得对每一固定$y \in H$, $M(\cdot, y): H \to 2^H$ 是极大单调映象满足$g(H) \cap \mathrm{dom}(M, (\cdot, y)) \neq \varnothing$ 和对任何x、y、$z \in H$,

$$\|J_\rho^{M(\cdot, x)}(z) - J_\rho^{M(\cdot, y)}(z)\| \leqslant \mu\|x - y\|. \tag{12}$$

假设存在 $\rho > 0$ 使得

$$\begin{cases} k = 2\sqrt{1 - 2\delta + \sigma^2} + \mu\zeta, \quad k + \rho\xi\eta < 1, \quad \xi\eta < \alpha \leqslant \varepsilon\beta, \\ \alpha > (1-k)\xi\eta + \sqrt{(\varepsilon^2\beta^2 - \xi^2\eta^2)(2k - k^2)}, \\ \left|\rho - \dfrac{\alpha - (1-k)\xi\eta}{\varepsilon^2\beta^2 - \xi^2\eta^2}\right| < \dfrac{\sqrt{[\alpha - (1-k)\xi\eta]^2 - (\varepsilon^2\beta^2 - \xi^2\eta^2)(2k - k^2)}}{\varepsilon^2\beta^2 - \xi^2\eta^2}. \end{cases} \tag{13}$$

则由算法 2.1 生成的迭代序列$\{x_n\}$、$\{u_n\}$、$\{v_n\}$和$\{z_n\}$分别强收敛于x^*、u^*、v^* 和 z^* 且(x^*, u^*, v^*, z^*) 是(GNIQVIP)(1) 的解.

证明 由算法 2.1 有

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| = {} & \|(1-\lambda)x_n + \lambda[x_n - g(x_n) + J_\rho^{M(\cdot, z_n)}(g(x_n) - \rho N(u_n, v_n))] - \\ & (1-\lambda)x_{n-1} - \lambda[x_{n-1} - g(x_{n-1}) + J_\rho^{M(\cdot, z_{n-1})}(g(x_{n-1}) - \rho N(u_{n-1}, v_{n-1}))]\| \leqslant \\ & (1-\lambda)\|x_n - x_{n-1}\| + \lambda\|x_n - x_{n-1} - (g(x_n) - g(x_{n-1}))\| + \\ & \lambda\|J_\rho^{M(\cdot, z_n)}(g(x_n) - \rho N(u_n, v_n)) - J_\rho^{M(\cdot, z_{n-1})}(g(x_{n-1}) - \rho N(u_{n-1}, v_{n-1}))\|. \end{aligned} \tag{14}$$

因 g 是 δ_强单调和σ_Lipschitz 连续的, 由 Noor[7] 的方法, 我们有

$$\| x_n - x_{n-1} - (g(x_n) - g(x_{n-1})) \| \leqslant \sqrt{1-2\delta+\sigma^2}\, \| x_n - x_{n-1} \|. \tag{15}$$

由引理1.1和条件(12)有

$$\begin{aligned}
&\| J_\rho^{M(\cdot,z_n)}(g(x_n)-\rho N(u_n,v_n)) - J_\rho^{M(\cdot,z_{n-1})}(g(x_{n-1})-\rho N(u_{n-1},v_{n-1})) \| \leqslant \\
&\| J_\rho^{M(\cdot,z_n)}(g(x_n)-\rho N(u_n,v_n)) - J_\rho^{M(\cdot,z_n)}(g(x_{n-1})-\rho N(u_{n-1},v_{n-1})) \| + \\
&\| J_\rho^{M(\cdot,z_n)}(g(x_{n-1})-\rho N(u_{n-1},v_{n-1})) - J_\rho^{M(\cdot,z_{n-1})}(g(x_{n-1})-\rho N(u_{n-1},v_{n-1})) \| \leqslant \\
&\| g(x_n) - g(x_{n-1}) - \rho(N(u_n,v_n) - N(u_{n-1},v_{n-1})) \| + \mu \| z_n - z_{n-1} \| \leqslant \\
&\| x_n - x_{n-1} - (g(x_n) - g(x_{n-1})) \| + \| x_n - x_{n-1} - \rho(N(u_n,v_n) - \\
&N(u_{n-1},v_{n-1})) \| + \mu \| z_n - z_{n-1} \| \leqslant \\
&\| x_n - x_{n-1} - (g(x_n) - g(x_{n-1})) \| + \| x_n - x_{n-1} - \rho(N(u_n,v_n) - \\
&N(u_{n-1},v_n)) \| + \rho \| N(u_{n-1},v_n) - N(u_{n-1},v_{n-1}) \| + \mu \| z_n - z_{n-1} \|.
\end{aligned} \tag{16}$$

因$N(\cdot,\cdot)$在第一自变量关于E α_强单调和β_Lipschitz 连续和E是ε_Lipschitz 连续的, 我们有

$$\begin{aligned}
&\| x_n - x_{n-1} - \rho(N(u_n,v_n) - N(u_{n-1},v_n)) \|^2 = \\
&\quad \| x_n - x_{n-1} \|^2 - 2\rho\langle N(u_n,v_n) - N(u_{n-1},v_n), x_n - x_{n-1} \rangle + \\
&\quad \rho^2 \| N(u_n,v_n) - N(u_{n-1},v_n) \|^2 \leqslant \\
&\quad \| x_n - x_{n-1} \|^2 - 2\rho\alpha \| x_n - x_{n-1} \|^2 + \rho^2\beta^2 \| u_n - u_{n-1} \|^2 \leqslant \\
&\quad (1-2\rho\alpha) \| x_n - x_{n-1} \|^2 + \rho^2\beta^2 [(1+n^{-1}) H(E(x_n),E(x_{n-1}))]^2 \leqslant \\
&\quad (1-2\rho\alpha+\rho^2\beta^2\varepsilon^2(1+n^{-1})^2) \| x_n - x_{n-1} \|^2.
\end{aligned} \tag{17}$$

利用$N(\cdot,\cdot)$在第二自变量的ξ_Lipschitz 连续性和F的η_Lipschitz 连续性, 有

$$\begin{aligned}
&\| N(u_{n-1},v_n) - N(u_{n-1},v_{n-1}) \| \leqslant \\
&\quad \xi \| v_n - v_{n-1} \| \leqslant \xi(1+n^{-1}) H(F(x_n),F(x_{n-1})) \leqslant \\
&\quad \xi\eta(1+n^{-1}) \| x_n - x_{n-1} \|.
\end{aligned} \tag{18}$$

由G的ξ_Lipschitz 连续性有

$$\| z_n - z_{n-1} \| \leqslant (1+n^{-1}) H(G(x_n),G(x_{n-1})) \leqslant \zeta(1+n^{-1}) \| x_n - x_{n-1} \|. \tag{19}$$

由(14)~(19), 我们得到

$$\begin{aligned}
&\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant [(1-\lambda) + 2\lambda\sqrt{1-2\delta+\sigma^2} + \lambda\sqrt{1-2\alpha\rho+\varepsilon^2\beta^2\rho^2(1+n^{-1})^2} + \\
&\quad \lambda\xi\eta\rho(1+n^{-1}) + \lambda\mu\zeta(1+n^{-1})] \| x_n - x_{n-1} \| = \\
&\quad [\lambda k_n + (1-\lambda) + \lambda t_n(\rho)] \| x_n - x_{n-1} \| = \\
&\quad \theta_n \| x_n - x_{n-1} \|,
\end{aligned} \tag{20}$$

其中 $k_n = 2\sqrt{1-2\delta+\sigma^2} + \mu\zeta(1+n^{-1})$,

$t_n(\rho) = \sqrt{1-2\alpha\rho+\varepsilon^2\beta^2\rho^2(1+n^{-1})^2} + \xi\eta\rho(1+n^{-1})$

和 $\theta_n = \lambda k_n + (1-\lambda) + \lambda t_n(\rho).$

令$\theta = \lambda k + (1-\lambda) + \lambda t(\rho)$其中$k = 2\sqrt{1-2\delta+\sigma^2} + \mu\zeta$和$t(\rho) = \sqrt{1-2\alpha\rho+\varepsilon^2\beta^2\rho^2} + \xi\eta\rho$, 则有$k_n \to k$, $t_n(\rho) \to t(\rho)$和$\theta_n \to \theta$, $n \to \infty$. 从条件(13)推得$\theta < 1$. 因此对充分大的n, $\theta_n < \theta_0 < 1$. 所以(20)蕴含$\{x_n\}$是H内的 Cauchy 序列, 我们能设$x_n \to x^* \in H$, $n \to \infty$. 由E、F和G的 Lipschitz 连续性, 有

$$\| u_{n+1} - u_n \| \leqslant (1+(1+n)^{-1}) H(E(x_{n+1}),E(x_n)) \leqslant$$

$$(1+(1+n)^{-1})\varepsilon\|x_{n+1}-x_n\|,$$
$$\|v_{n+1}-v_n\|\leqslant(1+(1+n)^{-1})H(F(x_{n+1}),F(x_n))\leqslant$$
$$(1+(1+n)^{-1})\eta\|x_{n+1}-x_n\|,$$
$$\|z_{n+1}-z_n\|\leqslant(1+(1+n)^{-1})H(G(x_{n+1}),G(x_n))\leqslant$$
$$(1+(1+n)^{-1})\zeta\|x_{n+1}-x_n\|\cdot$$

由此推得$\{u_n\}$、$\{v_n\}$和$\{z_n\}$也是H中Cauchy序列• 设$u_n\to u^*$, $v_n\to v^*$和$z_n\to z^*$• 注意到$u_n\in E(x_n)$,我们有

$$d(u^*,E(x^*))\leqslant\|u^*-u_n\|+d(u_n,E(x_n))+H(E(x_n),E(x^*))\leqslant$$
$$\|u^*-u_n\|+\varepsilon\|x_n-x^*\|\to 0,\qquad n\to\infty\cdot$$

因此必有$u^*\in E(x^*)$,类似可证得$v^*\in F(x^*)$和$z^*\in G(x^*)$• 从$x_{n+1}=(1-\lambda)x_n+\lambda[x_n-g(x_n)+J_\rho^{M(\cdot,z_n)}(g(x_n)-\rho N(u_n,v_n))]$推得

$$x^*=(1-\lambda)x^*+\lambda[x^*-g(x^*)+J_\rho^{M(\cdot,z^*)}(g(x^*)-\rho N(u^*,v^*))]\cdot$$

因此有$g(x^*)=J_\rho^{M(\cdot,z^*)}(g(x^*)-\rho N(u^*,v^*))$• 由定理2.1, (x^*,u^*,v^*,z^*)是(GNIQVIP)(1)的解•

注2.3 如果定理2.2的一切假设成立,则由算法2.2定义的迭代序列$\{x_n\}$、$\{u_n\}$、$\{v_n\}$和$\{z_n\}$也强收敛于x^*、u^*、v^*和z^*且(x^*,u^*,v^*,z^*)也是(GNIQVIP)(1)的解,此结论从具有$\lambda=1$的定理2.2得到• 定理2.2推广了Adly[32]的定理4.2•

定理2.3 设E、F、G: $H\to CB(H)$分别是ε_Lipschitz连续, η_Lipschitz连续和ζ_Lipschitz连续的• 设g: $H\to H$是δ_强单调和σ_Lipschitz连续的, N: $H\times H\to H$在第一自变量关于E是α_强单调的和β_Lipschitz和$N(\cdot,\cdot)$在第二自变量是ξ_Lipschitz连续的• 设φ:$H\times H\to(-\infty,+\infty]$使得对每一固定$y\in H$, $\varphi(\cdot,y)$是H上的真凸下半连续函数满足$g(H)\cap\mathrm{dom}\,\partial\varphi(\cdot,y)\neq\varnothing$• 假设对一切$x,y,z\in H$,

$$\|J_\rho^{\partial\varphi(\cdot,x)}(z)-J_\rho^{\partial\varphi(\cdot,y)}(z)\|\leqslant\mu\|x-y\|\cdot$$

如果存在常数$\rho>0$使条件(13)成立,则由具有$M(x,y)=\partial\varphi(x,y)$, $\forall x,y\in H$,的算法2.1生成的迭代序列$\{x_n\}$、$\{u_n\}$、$\{v_n\}$和$\{z_n\}$分别强收敛于x^*、u^*、v^*和z^*且(x^*,u^*,v^*,z^*)是问题(4)的解,即有

$$\begin{cases}x^*\in H,u^*\in E(x^*),v^*\in F(x^*)\text{ 和 }z^*\in G(x^*)\text{ 使得}\\ \langle N(u^*,v^*),y-g(x^*)\rangle\geqslant\varphi(g(x^*),z^*)-\varphi(y,z^*),\qquad\forall y\in H\cdot\end{cases}$$

证明 定义映象M:$H\times H\to H$如下

$$M(x,y)=\partial\varphi(x,y),\qquad\forall x,y\in H\cdot$$

则由φ的假设对每一给定$y\in H$, $M(\cdot,y)$:$H\to 2^H$是极大单调映象且满足$g(H)\cap\mathrm{dom}(M(\cdot,y))\neq\varnothing$• 容易看出定理2.2的一切条件被满足• 定理2.3的结论由定理2.2推得•

注2.4 定理2.3推广了Huang[33]的定理3.1,它也是Ding[35]的定理3.3和Kazmi[34]的定理4.1的改进变型•

定理2.4 设E, F, G:$H\to CB(H)$分别是ε_Lipschitz连续, η_Lipschitz连续和ζ_Lipschitz连续的• 设S, T, g:$H\to H$分别是β_Lipschitz连续, ξ_Lipschitz连续和σ_Lipschitz连续的• g

是 δ_强单调的和S 关于E 是α_强单调的• 设$K: H \to 2^H$ 使得对每一$x \in H$, $K(x)$ 是H 的非空闭凸子集使得H 到$K(x)$ 上的投影算子 $P_{K(x)}$ 满足

$$\| P_{K(x)}(z) - P_{K(y)}(z) \| \leqslant \mu \| x - y \|, \qquad \forall x, y, z \in H \cdot$$

假设存在常数 $\rho > 0$ 使得定理 2.2 内条件(13) 成立• 则由算法 2.3 生成的迭代序列$\{x_n\}$、$\{u_n\}$、$\{v_n\}$和$\{z_n\}$分别强收敛于x^*、u^*、v^* 和 z^* 且(x^*, u^*, v^*, z^*) 是广义强非线性隐拟变分不等式问题(6) 的解, 即有

$$\begin{cases} x^* \in H, u^* \in E(x^*), v^* \in F(x^*) \text{ 和 } z^* \in G(x^*) \text{ 使得} \\ g(x^*) \in K(z^*), \ \langle S(u^*) + T(v^*), y - g(x^*) \rangle \geqslant 0, \qquad \forall y \in K(z^*) \cdot \end{cases}$$

证明 定义映象 $N: H \times H \to H$ 如下

$$N(u, v) = S(u) + T(v), \qquad \forall u, v \in H \cdot$$

对每一给定 $y \in H$, 令 $\varphi(\cdot, y) = I_{K(y)}(\cdot)$ 是$K(y)$ 的指标函数, 即是

$$I_{K(y)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x \in K(y), \\ +\infty, & \text{否则} \cdot \end{cases}$$

则我们有

$$\| N(u_1, v) - N(u_2, v) \| = \| S(u_1) - S(u_2) \| \leqslant \beta \| u_1 - u_2 \|, \quad \forall u_1, u_2 \in H \cdot$$

因此 $N(\cdot, \cdot)$ 在第一自变量是 β_Lipschitz 连续的, 类似可证 $N(\cdot, \cdot)$ 在第二自变量是 ξ_Lipschitz 连续的• 因 S 关于E 是α_强单调的, 我们有

$$\langle N(u_1, v) - N(u_2, v), x_1 - x_2 \rangle = \langle S(u_1) - S(u_2), x_1 - x_2 \rangle \geqslant$$
$$\alpha \| x_1 - x_2 \|^2, \qquad \forall x_1, x_2, v \in H, u_1 \in E(x_1), u_2 \in E(x_2) \cdot$$

因此 $N(\cdot, \cdot)$ 在第一自变量关于 E 是α_强单调的• 容易检验定理 2.3 的一切条件被满足• 应用此定理知定理 2.4 的结论成立•

注 2.5 定理 2.4 改进了 Huang[38] 的定理 4.1 和定理 4.2• 由适当选取 E、F、G、S、T、g 和K, 我们能得到在[7～10, 13, 14, 18, 19, 20, 22, 23, 25～28, 30, 36, 39] 中的许多已知结果作为定理 2.4 的特殊情形•

[参 考 文 献]

[1] Bensoussan A, Gourst M, Lions J I. Control impulsinel et inequations quasivariationrlles stationaries [J]. C R Acad Sci Paris, 1973, **276**: 1279～1284.

[2] Bensoussan A, Lions J I. Impulse control and quasivariational inequalities, Bordas, Paris: Gauthiers_Villes, 1984.

[3] Baiocchi C, Capelo A. Variational and Quasivariational Inequalities, Applications to Free Boundary Problems[M]. New York: Wiley, 1984.

[4] Mosco U. Implicit variational problems and quasivariational inequalities[J]. Lecture Notes in Math, Berlin: Springer_Verlag, 1976, **543**: 83～156.

[5] Isac G. Fixed point theory, coincidence equations on convex cones and complementarity problems [J]. Contemp Math, 1988, **72**: 139～155.

[6] Isac G. A special variational inequality and implicit complementarity problem[J]. J Fac Sci Univ Tokyo Sect IA Math, 1990, **37**(1): 109～127.

[7] Noor M A. An iterative scheme for a class of quasivariational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1985, **110**: 462～468.

[8] Noor M A. Quasi variational inequalities[J]. Appl Math Lett, 1988, **1**(4): 367～370.

[9] Noor M A. An iterative algorithm for variational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1991, **158**(2): 448 ~ 455.

[10] Noor M A. General algorithm and sensitivity analysis for variational inequalities[J]. J Appl Math Stoch Anal, 1992, **5**(1): 29~ 42.

[11] Pang J S. The implicit complementarity problem[A]. In: Mangasarian, Mayer, Robinson Eds. Nonlinear Programming 4[C]. New York: Acad Press, 1981, 487~ 518.

[12] Pang J S. On the convergence of a basic iterative method for the implicit complementarity problems [J]. J Optim Theory Appl, 1982, **37**(1): 149~ 162.

[13] Siddiqi A H, Ansari Q H. Strongly nonlinear quasivariational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1990, **149**(2): 444~ 450.

[14] Siddiqi A H, Ansari Q H. General strongly nonlinear variational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1992, **166**(2): 386~ 392.

[15] Ding X P, Tarafdar E. Generalized nonlinear variational inequalities with nonmonotone set_valued mappings[J]. Appl Math Lett, 1994, **7**(4): 5~ 11.

[16] Ding X P, Tarafdar E. On existence and uniqueness of solutions for a general nonlinear variational inequality[J]. Appl Math Lett, 1995, **8**(1): 31~ 36.

[17] Gao J S, Yao J C. Extension of strongly nonlinear quasivariational inequalities[J]. Appl Math Lett, 1992, **5**(3): 35~ 38.

[18] Zeng L. Iterative algorithm for finding approximate solutions for general strongly nonlinear variational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1994, **187**(2): 352~ 360.

[19] Harker P T, Pang J S. Finite_dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: A survey of theory, algorithms and applications[J]. Math Programming, 1990, **48**(1): 161~ 220.

[20] Noor M A, Noor K I, Rassias T M. Some aspects of variational inequalities[J]. J Comput Appl Math, 1993, **47**(1): 285~ 312.

[21] Saigal R. Extension of the generalized complementarity problem[J]. Math Oper Res, 1976, **1**(3): 260 ~ 266.

[22] Fang S C. An iterative method for generalized complementarity problems[J]. IEEE Trans Automat Control, 1980, **25**: 1225~ 1227.

[23] Fang S C, Peterson E L. Generalized variational inequalities[J]. J Optim Theory Appl, 1982, **38**(2): 363~ 383.

[24] Chan D, Pang J S. The generalized quasivariational inequality[J]. Math Oper Res, 1982, **7**(1): 211~ 222.

[25] Siddiqi A H, Ansari Q H. An iterative method for generalized variational inequalities[J]. Math Japon, 1990, **34**(3): 475~ 481.

[26] Ding Xieping. Generalized strongly nonlinear quasivariational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1993, **173**(2): 577~ 587.

[27] Ding Xieping. A new class of generalized strongly nonlinear quasivariational inequalities and quasi_complementarity problems[J]. Indian J Pure Appl Math, 1994, **25**(11): 1115~ 1128.

[28] Ding Xieping. Set_valued implicit Wiener_Hopf equations and generalized strongly nonlinear quasivariational inequalities[J]. J Appl Anal, 1998, **4**(1): 59~ 71.

[29] Ding X P, Tarafdar E. Monotone generalized variational inequalities and generalized complementarity problems[J]. J Optim Theory Appl, 1996, **88**(1): 107~ 122.

[30] Zeng L. Iterative algorithm for finding approximate solutions to completely generalized strongly non-

linear quasivariational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1996, **201**(1): 180~ 194.

[31] Hassouni A, Moudafi A. A perturbed algorithm for variational inclusions[J]. J Math Anal Appl, 1994, **185**(3): 706~ 712.

[32] Adly S. Perturbed algorithms and sensitivity analysis for a general class of variational inclusions[J]. J Math Anal Appl, 1996, **201**(2): 609~ 630.

[33] Huang N J. Generalized nonlinear variational inclusions with noncompact valued mapping[J]. Appl Math Lett, 1996, **9**(3): 25~ 29.

[34] Kazmi K R. Mann and Ishikawa perturbed iterative algorithms for generalized quasivariational inclusions[J]. J Math Anal Appl, 1997, **209**(2): 572~ 583.

[35] Ding Xieping. Perturbed proximal point algorithm for generalized quasivariational inclusions[J]. J Math Anal Appl, 1997, **210**(1): 88~ 101.

[36] 丁协平. 对广义强非线性拟变分包含带有误差的近似点算法[J]. 应用数学和力学, 1998, **19**(7): 597~ 602.

[37] Pascali D, Shurlan S. Nonlinear Mappings of Monotone Type[M]. Romania: Sijthoff & Noordhoff Inter Pub, 1978.

[38] Huang N J. On the generalized implicit quasivaritational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1997, **216**(1): 197~ 210.

[39] Noor M A. Generalized multivalued quasivariational inequalities[J]. Comput Math Appl, 1996, **31**(12): 1~ 13.

[40] Nadler S B, Jr. Multi_valued contraction mappings[J]. Pacific J Math, 1969, **30**(2): 475~ 488.

On a Class of Generalized Nonlinear Implicit Quasivariational Inclusions

Ding Xieping

(Department of Mathematics, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, P R China)

Abstract: In this paper, a new class of generalized nonlinear implicit quasivariational inclusions involving a set_valued maximal monotone mapping are studied. A existence theorem of solutions for this class of generalized nonlinear implicit quasivariational inclusions is proved without compactness assumptions. A new iterative algorithm for finding approximate solutions of the generalized nonlinear implicit quasivariational inclusions is suggested and analysed and the convergence of iterative sequence generated by the new algorithm is also given. As special cases, some known results in this field are also discussed.

Key words: generalized nonlinear implicit quasivariational inclusion; maximal monotone mapping; iterative algorithm; Hilbert space