

文章编号: 1000-0887(1999) 10-1045-06

求解渗流自由面的复合单元全域迭代法^{*}

陈洪凯, 唐红梅, 肖盛燮

(重庆交通学院 河海建筑工程系, 重庆 400074)

(戴世强推荐)

摘要: 渗流自由面是岩体水力学研究的重点和难点, 也是边坡稳定性综合研究的重要内容。基于对渗流自由面数值求解方法的分析, 提出了复合单元全域迭代法, 并编制了有限元计算程序。计算果表明, 该法具有程序处理比较简单、计算结果比较精确等特性, 一般迭代 5 次左右便可收敛。

关键词: 岩体边坡; 渗流自由面; 复合单元全域迭代法; 验证

中图分类号: P642.2 文献标识码: A

引言

在边坡、土坝、地下洞室及地下水运动等渗流分析中, 均涉及渗流自由面问题。渗流自由面是岩体水力学研究的重点和难点之一^[1-3], 也是边坡稳定性综合研究的重要内容。岩体边坡中渗流自由面的确定, 可以明确地下水在边坡中的赋存特性及其运动过程。有限元法、边界元法及离散元法等是求解无压渗流自由面主要的数值计算方法。

在求解渗流自由面的数值计算方法中, 使用效果最好的方法当属有限元法^[4], 传统的有限元方法属于网格变动法, 即在每次迭代以后计算网格作一次变动, 节点坐标发生改变。由于渗流自由面作为渗流域的自然界面是待定的, 是一个非线性问题, 因而需要迭代求解。但是, 网格变动法存在着比较显著的缺陷:

- 1) 当初始渗流自由面和最终渗流自由面位置相差较大时, 会使计算单元发生畸变, 乃至与相邻单元发生交替、重叠, 以至于在计算过程中常需要对渗流域进行重新剖分计算;
- 2) 当自由面附近渗流介质不均一, 尤其有水平介质层时网格变动会破坏介质分区, 程序处理十分困难;
- 3) 当渗流域内有结构物时, 网格变动常会改变结构的边界条件, 影响计算精度;
- 4) 网格变动过程中, 每一次迭代计算网格均要随自由面的变动而变动, 总体渗透矩阵需要重新生成, 需要大量机时;
- 5) 在研究渗流与应力耦合作用中, 由于应力分析经常包括渗流虚区, 因而不能用同一网格进行耦合作用分析。

自从 1973 年 Neumann 提出用网格不变法进行渗流分析以来, Desai^[5] 提出了残余流量法、

* 收稿日期: 1998_11_23; 修订日期: 1999_01_08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59878057); 国家“八五”重点科技攻关项目(85160305)

作者简介: 陈洪凯(1964-), 副教授, 博士。

张有天提出了初流量法^[6]、速宝玉提出了节点虚流量法^[1]、吴梦喜提出了虚单元法^[7]。其中,节点虚流量法由于无需确定计算过程中的近似自由面,故其精度一般较高。而残余流量法由于全部调整均基于第一次计算结果,初流量法又对跨自由面单元的近似自由面以下节点的高斯点不予计算,故计算精度均不太高;虚单元法在处理有自由面穿越的单元时,节点的移动路径难于确定。鉴于此,本文作者在进行三峡工程永久船闸边坡岩体渗流研究过程中,提出了复合单元全域迭代法。

1 渗流有限元控制方程

由于渗流自由面的位置是预先未知的,属于混合边界问题,即必须同时满足 Dirichlet 边界条件(第一类边界条件)和 Neumann 边界条件(第二类边界条件)。无压渗流边界条件如图 1。自由面是渗流实区(或称饱和渗流区) Ω_1 与渗流虚区(或称非饱和渗流区) Ω_2 的界面。自由面以下节点总水头值 $H > z$; 自由面以上,节点总水头值 $H < z$; Γ_5 为渗流溢出面; Γ_4 为渗流自由面($H = z$)。凡是被渗流自由面穿越的有限单元定义为复合单元(composite element)(图 2)。

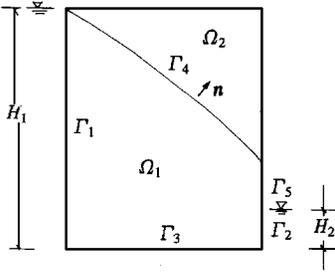


图 1 无压渗流边界条件

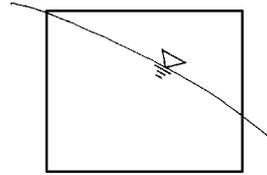


图 2 复合单元示意图

Galerkin 有限元对于平面问题多采用四节点等参元及三角形单元离散渗流域,对于三维问题多采用六面体或四面体单元离散渗流域。假定渗透介质属于均质各向异性体,则三维渗流定解问题为:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xx} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{yy} \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{zz} \frac{\partial H}{\partial z} \right) + \varepsilon = \mu \frac{\partial H}{\partial t} & (x, y, z) \in \Omega, & (1) \\ H|_{t=0} = H_0(x, y, z) & (x, y, z) \in \partial \Omega, & (2) \\ H|_{\Gamma_1} = \varphi(x, y, z) & t < 0, & (3) \\ \left[K_{xx} \frac{\partial H}{\partial x} n_x + K_{yy} \frac{\partial H}{\partial y} n_y + K_{zz} \frac{\partial H}{\partial z} n_z \right] \Big|_{\Gamma_2} = q & t > 0, & (4) \end{cases}$$

式中, Ω —— 渗流域; Γ_1 、 Γ_2 —— 渗流域第一类边界; K_{xx} 、 K_{yy} 、 K_{zz} —— 渗流域中 x 、 y 、 z 方向的主渗透系数; H_0 —— 初始时刻渗流域中的水头分布; φ —— 第一边界 Γ_1 上的已知水头函数; q —— 第二类边界条件 Γ_2 上侧向单宽补给流量; ε —— 垂向渗流强度 ($\varepsilon > 0$ 为入渗, $\varepsilon < 0$ 为蒸发); μ —— 介质贮(给)水系数。

选择形函数 $N_L(x, y, z)$ ($L = 1, 2, \dots, N$), 误差函数为:

$$R(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xx} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{yy} \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{zz} \frac{\partial H}{\partial z} \right) + \varepsilon - \mu \frac{\partial H}{\partial t} \neq 0 \quad (5)$$

则由 Galerkin 法得

$$\iiint_{\Omega} R(x, y, z) N_L(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xx} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{yy} \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{zz} \frac{\partial H}{\partial z} \right) + \varepsilon - \mu \frac{\partial H}{\partial t} \right\} N_L(x, y, z) dx dy dz = 0 \quad (L = 1, 2, \dots, N) \cdot \quad (6)$$

把渗流域 Ω 划分为 N 个子区 Ω_L ($L = 1, 2, \dots, N$), 则根据形函数之比

$$N_L(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{当 } (x, y, z) \in \Omega_L, \\ 0 & \text{当 } (x, y, z) \notin \Omega_L, \end{cases} \quad (7)$$

并利用 Green 公式得

$$\iiint_{\Omega} \left\{ K_{xx} \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_L}{\partial x} + K_{yy} \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_L}{\partial y} + K_{zz} \frac{\partial H}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_L}{\partial z} \right\} dx dy dz + \iiint_{\Omega} \mu \frac{\partial H}{\partial t} N_L dx dy dz = \iiint_{\Omega} \varepsilon N_L dx dy dz + \iint_{\Gamma} q(x, y, z) N_L dx dy, \quad (L = 1, 2, \dots, N) \cdot \quad (8)$$

设 Ω_L 子区内有 m_L 个单元, 则(8)式可以表示为

$$\sum_e^{m_L} \iiint_{\Omega} \left\{ K_{xx} \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_L^e}{\partial x} + K_{yy} \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_L^e}{\partial y} + K_{zz} \frac{\partial H}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_L^e}{\partial z} \right\} dx dy dz + \sum_e^{m_L} \iiint_{\Omega} \mu \frac{\partial H}{\partial t} N_L^e dx dy dz = \sum_e^{m_L} \iiint_{\Omega} \varepsilon N_L^e dx dy dz + \sum_e^{m_L} \iint_{\Gamma_2 \cap \Gamma^e} q N_L^e dx dy \quad (L = 1, 2, \dots, N), \quad (9)$$

其矩阵表达式为

$$[G] \{H\} + [S] \left\{ \frac{dH}{dt} \right\} = \{E\} + \{B\}, \quad (10)$$

式中, $[G]$ 、 $[S]$ —— 分别为渗流域的总渗透矩阵和贮(给)水矩阵; $\{E\}$ —— 源汇项列阵; $\{B\}$ —— 边界列矩阵。

可见, 利用 Galerkin 法可把渗流控制方程表示为含有 N 个方程的线性代数方程组。采用不同的剖分单元, 形函数 N_L 有区别, 但对于同样一个渗流定解问题其各项系数矩阵是近似相同的, 因此, 求解出的渗流场应该是唯一的。

2 复合单元全域迭代法及其计算过程

复合单元全域迭代法(global composite element iteration, 简称 GCET) 属于网格固定法, 是基于对已有网格固定法的分析而提出的, 其本质是定义渗流自由面单元为由渗流实域与渗流虚域共同组成的复合单元, 并将复合单元的渗透系数按虚域与实域的相对比例随迭代次数进行调整。其计算的基本过程为:

a) 对渗流域进行全域剖分, 令域内所有节点的初始水头值为问题的最大第一类边界水头值 $\{H_0\}$;

b) 根据渗流分析的实际情况, 即考虑渗流分析的非均质性和各向异性特性, 基于单元划分及单元渗透矩阵形成总体渗透矩阵 $[K]$, $[K]$ 为 $n_{NN} \times n_{NN}$ 阶方阵 (n_{NN} 为渗流域剖分的节点

总数), 在无源汇项的稳定渗流问题中, (10) 式简化为:

$$[K]\{H\} = \{0\}; \quad (11)$$

c) 根据组装起来的总体渗透矩阵 $[K]$ 计算渗流域内未知水头节点的等效节点流量 $\{Q_0\}$, 则总体渗透矩阵 $[K]$ 改变为 $[K']$, $[K']$ 为 $(n_{NN} - n_{NBN}) \times (n_{NN} - n_{NBN})$ 阶方阵 (n_{NBN} 为第一类边界节点总数), 则方程 (11) 改变为:

$$[K']\{H\} = \{Q_0\}, \quad (12)$$

列阵 $\{H\}$ 中不包含第一类边界节点总数;

d) 求解线性代数方程组 (12) 得渗流域内所有未知节点的水头值 $\{H_i\}$ (i 为计算迭代次数);

e) 将未知水头的节点的计算值 $\{H_i\}$ 恢复为含有第一类边界节点水头值的节点水头值矩阵 $\{H_i\}$, $\{H_i\}$ 为 $n_{NN} \times 1$ 阶列阵. 并与初始水头 $\{H_0\}$ 进行比较

$$|H_j^i - H_j^0| \leq \varepsilon_1 \quad (j = 1, 2, \dots, n_{NN}), \quad (13)$$

式中 i 为迭代计算次数, j 为节点号, ε_1 为同一节点两次计算的水头值的误差.

在计算精度要求较高时, 取 ε_1 为 $10^{-3} \sim 10^{-4}$, 其增加一个数量级, 则迭代次数增加约 0.5 倍左右. 本文取为 10^{-3} .

若渗流域内节点均满足 (13), 则自由面迭代完成, 此时的渗流场中满足

$$|H - z| \leq \varepsilon_2 \quad (14)$$

的节点或单元边上的插值点的连线, 即为渗流自由面. 否则

f) 计算节点的状态识别码 $m_{SRC} = H - z$, 若 $m_{SRC} < 0$ 表明该节点处于渗流虚区, 称为虚节点; 若 $m_{SRC} > 0$, 表明该节点位于渗流实区, 称为实节点; 而若 $m_{SRC} = 0$, 则表明该节点处于初始渗流自由面上. 若一个单元的所有节点均为虚节点, 则该单元为虚单元; 若所有节点均为实节点, 则该单元为实单元; 当一个单元同时含有实节点和虚节点, 则称该单元为复合单元(即为自由面单元). 按流量等效将复合单元中渗流实区渗透系数进行调整;

g) 重新进行渗流计算, 直到满足式 (13) 为止.

在利用本方法进行渗流计算中, 要求根据在已知边界水头 H_1 和 H_2 连线方向估计渗流自由面的变化区域, 对该区域的单元进行加密处理, 愈密精度愈高.

3 复合单元全域迭代法的验证

为了验证复合单元全域迭代法计算结果的可靠性, 实例选自 [4], 为一不透水地基上的矩形均质土坝的稳定渗流. 渗流域的第一类边界条件左边为 6 m, 右边为 1 m, 底部不透水. 计算结果如图 3. 其中直接消去法和甘油模型试验曲线为毛昶熙^[4]的结果, 除用本文程序进行计算以外, 也用 ADINAT 软件作了计算. 由图可见, 用本文方法计算的结果与甘油模型试验成果十分接近, 而用 ADINAT 软件计算的渗流自由面是各方法计算自由面最高的. 但 4 种结果趋势很接近.

从图 4 可以看出, 用本文方法计算的渗流自由面, 当取误差值 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-3}$ 时, 第 5 次迭代结果便收敛了, 与第 10 次计算的结果基本一致. 当在边坡中布设排水孔时, 取其组成材料为零材料(即空心), 但考虑到形成渗流域总体渗透矩阵的一致性, 令排水结构中的节点为虚节点, 排水结构单元为虚单元, 其渗透系数取为渗流实区的 1000 倍, 这一取值也由 Peter 等的实验成果所证实. 据此, 本文的计算结果如图 5. 由图可见, 与图 4 相比, 在渗流域的溢出面设置 6 m 长的排水孔后, 稳定的渗流自由面出溢点下降 1.2 m 左右. 但在渗流域中布设

排水措施对渗流自由面的影响通常要受到渗透介质渗透特性的影响。当 $K_x > K_y$ 时, 可造成渗流自由面抬高的现象, 这与毛昶熙的研究结果是一致的; 而当 $K_x < K_y$ 时, 水平排水孔对降低渗流自由面的影响是显著的^[8], 即受各向异性的影响明显。同时, 为了检验本文方法在计算边坡岩体中具有多层排水孔时的性态, 本文实例取自 Nonveiller^[9] 图 5, 布设的排水孔单根长 50 m, 与边坡坡面垂直且水平渗透介质为均质各向同性体, 结果见图 6。其中 Nonveiller 的结果为由差分法所求。本文计算与其吻合程度是令人满意的。利用复合单元全域迭代法求解三峡工程永久船闸边坡(岩体等效渗透系数 $K_y = 6.0371 \times 10^{-7}$ cm/s, $K_x = 5.4815 \times 10^{-6}$ cm/s), 在洞室底板开挖至 170 m 高程时的渗流自由面(图 7), 其在船闸边坡面的出溢点高程 183 m, 与当时现场观测值相差仅 0.68 m。

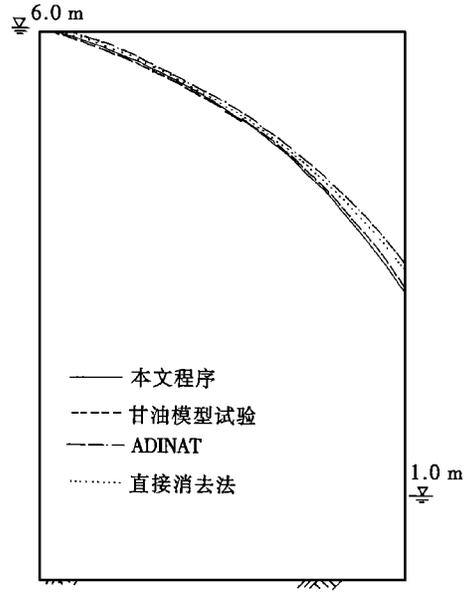


图 3 矩形均质土坝渗流自由面比较

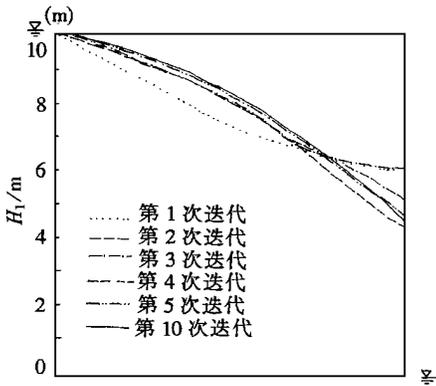


图 4 复合单元全域迭代法计算成果的收敛性

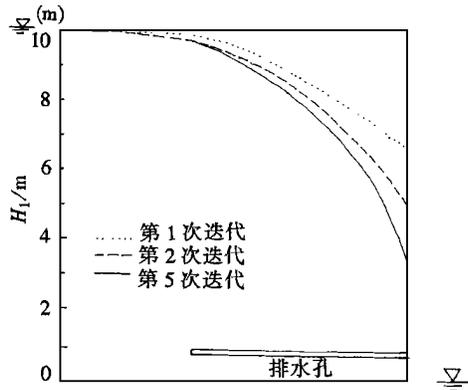


图 5 布设排水孔时边坡的渗流自由面

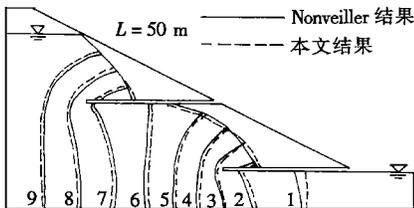


图 6 布设双层排水孔时边坡岩体中的渗流场

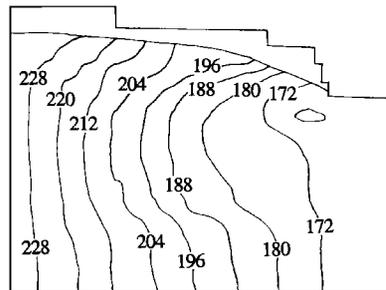


图 7 三峡工程永久船闸边坡岩体渗流场

4 结 语

本文提出的复合单元全域迭代法属于通过对渗流域进行 Euler 型网格划分并利用有限元数值计算方法求解渗流自由面的迭代方法, 是基于渗流自由面求解的许多固定单元法的不足而研究提出的。具有程序处理比较简单、收敛速度较快、计算结果比较精确等特性。在水利水电工程高边坡岩体渗流研究及排水方案设计、土石坝渗流与防水技术及道路边坡及隧道工程岩体渗流等土建工程中具有较强的推广应用价值, 是一种值得深入完善、推广应用的渗流自由面求解方法。

[参 考 文 献]

- [1] 速宝玉, 朱岳明. 不变网格确定渗流自由面的节点虚流量法[J]. 河海大学学报, 1991, 19(5): 113~117.
- [2] Bathe K T, Khoshgoftaar M R. Finite element free surface analysis without mesh iteration[J]. Internat J Numer Methods, Engg, 1979, 4(1): 13~ 22.
- [3] 陈洪凯. 渗流自由面求解的基本方法、修正及应用[J]. 重庆交通学院学报, 1997, 16(3): 5~ 10.
- [4] 毛昶熙. 渗流计算分析与控制[M]. 北京: 水利电力出版社, 1990.
- [5] Desai C S. Finite element residual schemes for unconfined flow[J]. Internat J Numer Methods Engg, 1976, 10(1): 1415~ 1418.
- [6] 张有天, 陈平, 王镭. 有自由面分析的初流量法[J]. 水利学报, 1988, (8): 18~ 26.
- [7] 吴梦喜, 张学勤. 有自由面渗流分析虚单元法[J]. 水利学报, 1994, (8): 67~ 70.
- [8] 哈丘, 陈洪凯. 岩石边坡渗流与排水机理研究[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1997.
- [9] Nonveiller E. Efficiency of horizontal drains on slope stability[A]. In: Pasamehmetoglu E D Ed. Computer Methods and Advances in Geomechanics[C]. Rotterdam: Balkma, 1994, 112~ 117.

Global Composite Element Iteration to Solve Seepage Free Surface

Chen Hongkai, Tang Hongmei, Xiao Shengxie

(Department of River Engineering, Chongqing Jiaotong
Institute, Chongqing 400074, P R China)

Abstract: As one of the most difficult topics of rock mass hydromechanics, seepage free surface plays an important part in slope stability researches. Based on analysis of numerical methods to solve seepage free surface, global composite element iteration (GCEI) is presented in this paper. FEM program is made by using GCEI. Much calculating verifies that not only the program is simpler using GCEI, also the tolerance is higher after 5 iterations.

Key words: rock mass slope; seepage free surface; global composite element iteration; verification