

文章编号: 1000-0887(1999) 10-1072-09

# 多个同频摇荡剖面引起的水面波辐射<sup>\*</sup>

贺五洲

(清华大学 水利水电工程系, 北京 100084)

(惠昌年推荐)

**摘要:** 在内场中使用简单 Green 函数的边界元方法与外场的速度势特征函数展开式相结合, 用于求解多个同频摇荡剖面引起的水面波辐射问题的频域解。方法适用于外场为定深的水域以及内场的复杂边界条件, 各剖面的摇荡模态、幅值和相位可以互不相同。利用摄动展开完整地求解了流场的二阶速度势和各个剖面所受的一、二阶水动力。与单个剖面的情况相比, 数值结果证实了多个剖面辐射引起的诸如水波共振和负附加质量等水动力干扰现象, 这对于多体结构的锚泊系统和其它海洋工程设施的设计是很重要的。

**关键词:** 二维水面波; 辐射问题; 频域解; 二阶水动力; 附加质量; 阻尼系数

**中图分类号:** O353.2      **文献标识码:** A

## 引 言

二维剖面在水面或水下作周期摇荡运动引起的水面辐射波, 以及剖面所受水动力的确定与波浪与物体的相互作用问题的研究, 是一项基础性的工作。其稳态解宜在频域中求解。自从 1949 年 Ursell 发表第一篇半潜圆柱体垂荡的文章<sup>[1]</sup>以来, 已有许多学者用不同方法计算二维辐射问题。归结起来, 常用的方法有: 基于保角变换的多极展开法<sup>[2]</sup>、Frank 源分布法<sup>[3]</sup>、内场用有限元<sup>[4]</sup>或使用简单 Green 函数  $\ln r$  的边界元<sup>[5,6]</sup>与定深水域外场中速度势的特征函数展开<sup>[4,5]</sup>或无限深水域外场中速度势的多极展开<sup>[6]</sup>相结合的混合元方法等。

由于各种方法的数值模型都基于一定的假设, 其使用范围往往受到边界条件的限制, 例如多极展开法不适用于有限水深情况, 也不便于处理球艏剖面、水下剖面及双体剖面, Frank 源分布法不适用于非平直水底情况。比较起来, 内场使用简单 Green 函数的边界元与定深水域外场中速度势的特征函数展开相结合的混合元方法, 简称简单 Green 函数法, 适应复杂边界条件的能力最强<sup>[7]</sup>。使用该方法唯一的限制是外场必须是定深水域, 而内场则可以是由自由表面、任意形状的固壁(水底)以及多个同频摇荡剖面组成的最一般的复杂边界, 各剖面的摇荡模态、幅值和相位可以互不相同。将计算水深取得足够大, 简单 Green 函数法也适用于无限水深的情况。

除了对复杂边界适应能力强的优点以外, 简单 Green 函数法也已成功地用于求解单个摇荡剖面引起的水面波二阶辐射问题<sup>[8]</sup>。本文将该方法应用于多个同频摇荡剖面引起的水面波

\* 收稿日期: 1998\_01\_22; 修订日期: 1998\_08\_15

作者简介: 贺五洲(1946-), 男, 教授。

二阶辐射问题,完整地求解流场的二阶速度势和各个剖面所受的一、二阶水动力。并讨论多个剖面摇荡引起的辐射问题的水动力干扰现象。

### 1 定解问题

假设有  $K$  个任意形状的刚性剖面在本为静止的二维水域的水面或水下作圆频率为  $\omega$  的同频摇荡。流场及坐标系  $(y, z)$  取法如图 1 所示。如果水域沿正、负  $y$  轴方向延伸至无穷远,则分别用辐射面  $S_R(y = y_R)$  和  $S_L(y = y_L)$  将流场分割成内场  $D^0$  和外场  $D^+, D^-$ , 内场将所有摇荡剖面围在其中, 内场的水深可以变化, 外场水深为定值, 分别为  $h_R$  和  $h_L$ 。

若第  $k$  个剖面的摇荡模态为  $i(k)$ ,  $i(k)$  等于 2, 3, 4 分别代表横荡、垂荡和横摇, 复振幅为  $A_i^{(k)}$ , 横摇中心为  $(y_0^{(k)}, z_0^{(k)})$ , 则第  $k$  个剖面的运动位移为

$$\delta_i^{(k)} = \text{Re}[A_i^{(k)} \exp(i\omega t)], \tag{1}$$

运动速度为

$$U_i^{(k)} = \text{Re}[i\omega A_i^{(k)} \exp(i\omega t)]. \tag{2}$$

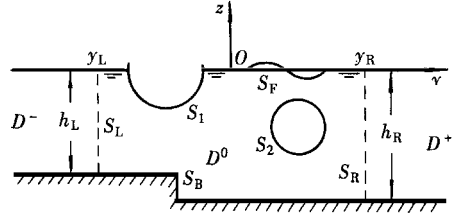


图 1 流场和坐标系示意图

设流体为不可压、无粘性, 由摇荡剖面引起的流动是无旋的, 可由速度势  $\phi(y, z, t)$  表示,  $\phi$  应满足以下方程和边界条件:

$$[L] \quad \nabla^2 \phi = 0, \quad \text{在域 } D^0 \text{ 和 } D^+, D^- \text{ 中}; \tag{3}$$

$$[F] \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} + g \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \tag{4}$$

在自由面瞬时位置  $z = \eta(y, t)$  上;

$$[S] \quad \partial \phi / \partial n = U_i^{(k)} n_i^{(k)}, \quad \text{在第 } k \text{ 个剖面的瞬时位置 } S_k(t) \text{ 上}, (k = 1, \dots, K), \tag{5}$$

这里  $n$  是流场边界单位外法向,  $n = (n_y, n_z) = (n_2, n_3)$ ,

$$n_i^{(k)} = \begin{cases} n_i & i(k) = 2, 3, \\ (y - y_0^{(k)}) n_z - (z - z_0^{(k)}) n_y & i(k) = 4, \end{cases} \tag{6}$$

$(y, z)$  是  $S_k(t)$  上点的坐标;

$$[B] \quad \partial \phi / \partial n = 0, \quad \text{在底部和流场所有固壁 } S_B \text{ 上}; \tag{7}$$

$$[R] \quad \text{辐射条件: } D^+, D^- \text{ 中有有限波幅的进行波外传至无穷远.}$$

求解以上问题的困难在于自由面条件(4)的非线性以及自由面和摇荡剖面位置的瞬时性。假设各摇荡剖面的位移为小量, 流场速度势呈弱非线性, 将速度势摄动展开到二阶, 并考虑到所求解的是稳态解, 从而把空间分量与时间分量分开, 记

$$\phi(y, z, t) \approx \text{Re}[\varphi^{(1)}(y, z) e^{i\omega t} + \varphi_0^{(2)}(y, z) + \varphi^{(2)}(y, z) e^{2i\omega t}], \tag{8}$$

这里  $\varphi_0^{(2)}$  是二阶定常势,  $\varphi^{(1)}$  和  $\varphi^{(2)}$  分别是一阶和二阶非定常势的空间分量。

将式(8)分别代入自由面条件(4)和物面条件(5), 并分别在自由面的平均位置  $S_F(z = 0)$  和各摇荡剖面的平均位置  $S_k$  展开; 注意到一阶波高为

$$\eta^{(1)}(y, t) = \text{Re}\left[-\frac{1}{g} i \omega \varphi^{(1)} e^{i\omega t}\right]_{z=0}, \tag{9}$$

第  $k$  个剖面上的一阶点位移为

$$\Delta I^{(k)} = \begin{cases} (\delta_i^{(k)}, 0) & i(k) = 2, \\ (0, \delta_i^{(k)}) & i(k) = 3, \\ [- (z - z_0^{(k)}) \delta_i^{(k)}, (y - y_0^{(k)}) \delta_i^{(k)}] & i(k) = 4; \end{cases} \quad (10)$$

可得一阶非定常势的空间分量所满足的方程和边界条件:

$$[L] \quad \nabla^2 \varphi^{(1)} = 0, \quad \text{在域 } D^0 \text{ 和 } D^+, D^- \text{ 中}; \quad (11)$$

$$[F] \quad \partial \varphi^{(1)} / \partial z - \nu \varphi^{(1)} = 0, \quad \text{在自由面的平均位置 } S_F (z = 0) \text{ 上}; \quad (12)$$

$$[S] \quad \partial \varphi^{(1)} / \partial n = i \omega A_i^{(k)} n_i^{(k)}, \quad \text{在各摇荡剖面的平均位置 } S_k \text{ 上}; \quad (13)$$

$$[B] \quad \partial \varphi^{(1)} / \partial n = 0, \quad \text{在底部和流场所有固壁 } S_B \text{ 上}; \quad (14)$$

[R]  $\varphi^{(1)}$  的辐射条件。

二阶非定常势的空间分量所满足的方程和边界条件为:

$$[L] \quad \nabla^2 \varphi^{(2)} = 0, \quad \text{在域 } D^0 \text{ 和 } D^+, D^- \text{ 中}; \quad (15)$$

$$[F] \quad \partial \varphi^{(2)} / \partial z - 4\nu \varphi^{(2)} = f(y), \quad \text{在自由面的平均位置 } S_F (z = 0) \text{ 上}; \quad (16)$$

$$[S] \quad \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial n \partial y} A_i^{(k)}, & i(k) = 2, \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial n \partial z} A_i^{(k)}, & i(k) = 3, \\ \frac{1}{2} A_i^{(k)} \left[ \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial n \partial y} (z - z_0) - \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial n \partial z} (y - y_0) + \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial y} n_z - \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial z} n_y \right], & i(k) = 4, \text{在各摇荡剖面的平均位置 } S_k \text{ 上}; \end{cases} \quad (17)$$

$$[B] \quad \partial \varphi^{(2)} / \partial n = 0, \quad \text{在底部和流场所有固壁 } S_B \text{ 上}; \quad (18)$$

[R]  $\varphi^{(2)}$  的辐射条件。

式(12)和式(16)中,  $\nu = \omega^2 / g$ , 式(16)中,

$$f(y) = -\frac{i\omega}{2g} \left[ 2 \nabla^2 \varphi^{(1)} \cdot \nabla^2 \varphi^{(1)} - \varphi^{(1)} \left( \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial z^2} - \nu \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial z} \right) \right]. \quad (19)$$

二阶定常势对二阶水动力无贡献, 不予求解。一阶和二阶非定常势的辐射条件将在求解相应的定解问题时详细讨论。

## 2 一、二阶非定常势的求解

一阶势在外场  $D^+ : y \geq y_R$  和  $D^- : y \leq y_L$  中可通过分离变量法表示成特征函数的展开式, 以  $D^+$  为例,

$$\varphi^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{nR}^{(1)} e^{-ik_{nR}^{(1)}(y-y_R)} \frac{\cosh[k_{nR}^{(1)}(z+h_R)]}{\cosh k_{nR}^{(1)} h_R}, \quad y \geq y_R, \quad (20)$$

其中  $k_{nR}^{(1)} (n = 0, 1, \dots)$  是方程  $k \cdot \tanh kh_R = \nu$  的根,  $k_{0R}^{(1)}$  是正实根,  $k_{nR}^{(1)} (n = 1, \dots)$  是负虚根, 并有

$$\left[ n - \frac{1}{2} \right] \frac{\pi}{h_R} < |k_{nR}^{(1)}| < \frac{n\pi}{h_R} \quad (n = 1, \dots)$$

展开式中  $n = 0$  的项对应  $D^+$  中传向无穷远的一阶进行波,  $n \geq 1$  的项对应  $D^+$  中的衰减波, 而且  $n$  越大衰减越快, 所以可视辐射面  $S_R$  离诸摇荡剖面的远近截取展开式的有限多项  $N$ 。

由式(20)可求得辐射面  $S_R$  上的  $\partial \varphi^{(1)} / \partial n$ , 这样在  $S_R$  上通过  $C_{nR}^{(1)}$  建立了  $\varphi^{(1)}$  和  $\partial \varphi^{(1)} / \partial n$

之间的联系, 这就是辐射面  $S_R$  上的边界条件, 也是远方辐射条件在  $S_R$  上的合理体现。

$D^-$  中  $\varphi^{(1)}$  的展开式是类似的, 即

$$\varphi^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{nL}^{(1)} e^{-ik_{nL}^{(1)}|y-y_L|} \frac{\cosh[k_{nL}^{(1)}(z+h_L)]}{\cosh k_{nL}^{(1)} h_L}, \quad y \leq y_L. \quad (21)$$

在内场  $D^0$  对  $\varphi^{(1)}$  和  $\ln r$  应用 Green 第三定理, 将二维 Laplace 方程的边值问题转化为积分方程

$$-V_p \varphi^{(1)}(p) + \oint_S \left[ \varphi^{(1)}(q) \frac{\partial}{\partial n_q} (\ln r_{pq}) - \ln r_{pq} \frac{\partial}{\partial n_q} \varphi^{(1)}(q) \right] dS_q = 0, \quad (22)$$

这里  $S$  是内场的整个边界, 包括  $S_k (k = 1, \dots, K), S_F, S_R, S_L, S_B, p$  是  $S$  上的定点,  $q$  是  $S$  上的动点,  $r_{pq}$  是  $p, q$  间的距离,  $V_p$  是  $p$  点处边界的两条半切线之间的夹角在  $D^0$  内的部分。各类边界上的源强  $\partial \varphi^{(1)} / \partial n$  及偶极强度  $\varphi^{(1)}$  之间的联系由相应的边界条件体现。积分方程可离散成代数方程组求解, 从而获取特征函数展开式的各项系数  $C_{nR}^{(1)}, C_{nL}^{(1)}$  及剖面上的速度势  $\varphi^{(1)}$ 。

在解完方程(22)后, 得到了  $C_{nR}^{(1)}, C_{nL}^{(1)} (n = 0, 1, \dots, N)$  的值, 从而得到一阶势在外场  $D^+ : y > y_R$  和  $D^- : y < y_L$  中的解析解, 将其代入式(19), 不难得到自由面条件(16)的非齐次项  $f(y)$  在外场的解析表达式。以  $D^+$  为例,

$$f(y) = -\frac{i\omega}{2g} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N a_{nm} \exp[-i(k_{nR}^{(1)} + k_{mR}^{(1)})|y - y_R|], \quad y > y_R, \quad (23)$$

其中

$$a_{nm} = (3V^2 - 2k_{nR}^{(1)} k_{mR}^{(1)} - k_{mR}^{(1)2}) C_{nR}^{(1)} C_{mR}^{(1)}. \quad (24)$$

这样就能在  $D^+$  中得到二阶非定常势定解问题中, 自由面条件(16)的非齐次项  $f(y)$  所对应的特解

$$\varphi_e^{(2)} = -\frac{i\omega}{2g} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \frac{a_{nm} \exp[-i(k_{nR}^{(1)} + k_{mR}^{(1)})|y - y_R|] \cosh[(k_{nR}^{(1)} + k_{mR}^{(1)})(z + h_R)]}{(k_{nR}^{(1)} + k_{mR}^{(1)}) \sinh[(k_{nR}^{(1)} + k_{mR}^{(1)})h_R] - 4V \cosh[(k_{nR}^{(1)} + k_{mR}^{(1)})h_R]}. \quad (25)$$

(25)中对应于  $n = 0, m = 0$  的一项是  $D^+$  中以  $2k_{0R}^{(1)}$  为波数传向无穷远的二阶进行波的势。若  $D^+$  为有限深水域,  $a_{00}$  不为零, 所以这一项是存在的, 它与一阶波以相同的相速度传播。其它各项都是二阶衰减波的势。

二阶非定常势定解问题对应于齐次自由面条件的在外场中的通解与一阶解类似, 可通过分离变量法表示成特征函数的展开式, 不同的只是频率加了一倍。仍以  $D^+$  为例,

$$\varphi_c^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{nR}^{(2)} e^{-ik_{nR}^{(2)}|y-y_R|} \frac{\cosh[k_{nR}^{(2)}(z+h_R)]}{\cosh k_{nR}^{(2)} h_R}, \quad y \geq y_R, \quad (26)$$

其中  $k_{nR}^{(2)} (n = 0, 1, \dots)$  是方程  $k \cdot \tanh kh_R = 4V$  的根,  $k_{0R}^{(2)}$  是正实根,  $k_{nR}^{(2)} (n = 1, \dots)$  是负虚根, 并有

$$\left( n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{h_R} < |k_{nR}^{(2)}| < \frac{n\pi}{h_R} \quad (n = 1, \dots).$$

展开式中  $n = 0$  的项对应  $D^+$  中传向无穷远的以  $k_{0R}^{(2)}$  为波数的二阶进行波,  $n \geq 1$  的项对应  $D^+$  中的二阶衰减波。

这样  $\varphi^{(2)}$  在  $D^+$  中的解为  $\varphi^{(2)} = \varphi_e^{(2)} + \varphi_c^{(2)}$ , 其中有两个分别以波数  $2k_{0R}^{(1)}$  和  $k_{0R}^{(2)}$  传播的二阶倍频进行波。由于  $2k_{0R}^{(1)} < k_{0R}^{(2)}$ , 所以前者比后者传播得快。这就是二阶非定常势定解问题中辐射条件的含义。

式(26)中  $C_{nR}^{(2)}$  ( $n = 0, 1, \dots, N$ ) 为待定复常数, 将在内场求解时确定.  $D^-$  中的情况与  $D^+$  中类似, 据此便得到二阶非定常势在辐射面上的边界条件, 至于物面条件及内场自由面条件中  $\varphi^{(1)}$  的诸一、二阶偏导数, 可在解出一阶势后用数值方法求取, 计算公式可参考文献[9]. 在得到二阶非定常势在内场全部边界上的边界条件后, 可仿照求解  $\varphi^{(1)}$  的方法, 对内场求解  $\varphi^{(2)}$ .

### 3 一、二阶水动力计算

由 Bernoulli 方程, 流场中的压力为

$$P = -\rho \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + gz + \frac{\dot{\phi} \cdot \dot{\phi}}{2} \right]. \quad (27)$$

如果将第  $k$  个剖面的瞬时湿表面  $S_k(t)$  上的动压力表示成二阶摄动解的形式

$$P[k(t)] \approx \text{Re}[p^{(1)}(k) e^{i\omega t}] + p_0^{(2)}(k) + \text{Re}[p^{(2)}(k) e^{2i\omega t}], \quad (28)$$

则通过将(27)在  $S_k$  上展开, 可得到一、二阶动压力分量

$$p^{(1)}(k) = -i\omega\rho\varphi^{(1)} + \begin{cases} 0 & i(k) = 2, \\ -\rho g A_i^{(k)} & i(k) = 3, \\ -\rho g A_i^{(k)}(y - y_0^{(k)}) & i(k) = 4; \end{cases} \quad (29)$$

$$p_0^{(2)}(k) = -\frac{\rho}{4} \left[ \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \overline{\varphi^{(1)}}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \overline{\varphi^{(1)}}}{\partial z} \right] + \begin{cases} -\text{Re} \left\{ \frac{i\omega\rho}{2} \overline{A_i^{(k)}} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial y} \right\} & i(k) = 2, \\ -\text{Re} \left\{ \frac{i\omega\rho}{2} \overline{A_i^{(k)}} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial z} \right\} & i(k) = 3, \\ +\text{Re} \left\{ \frac{i\omega\rho}{2} \overline{A_i^{(k)}} \left[ \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial y} (z - z_0) - \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial z} (y - y_0) \right] \right\} & i(k) = 4; \end{cases} \quad (30)$$

$$p^{(2)}(k) = -2i\omega\rho\varphi^{(2)} - \frac{\rho}{4} \left[ \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \overline{\varphi^{(1)}}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \overline{\varphi^{(1)}}}{\partial z} \right] + \begin{cases} -\frac{i\omega\rho}{2} \overline{A_i^{(k)}} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial y} & i(k) = 2, \\ -\frac{i\omega\rho}{2} \overline{A_i^{(k)}} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial z} & i(k) = 3, \\ +\frac{i\omega\rho}{2} \overline{A_i^{(k)}} \left[ \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial y} (z - z_0) - \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial z} (y - y_0) \right] & i(k) = 4. \end{cases} \quad (31)$$

将动压强沿物面积分, 考虑到  $i(k) = 4$  时, 法向的一阶变化量为

$$\Delta \mathbf{n} = (-n_x \delta_i^{(k)}, n_y \delta_i^{(k)}),$$

同时也考虑到相对运动引起瞬时湿表面的增减对二阶水动力的贡献, 可得第  $k$  个剖面所受  $j$  方向水动力的二阶摄动解

$$F_{\bar{j}}[k(t)] \approx \text{Re}[f_{\bar{j}}^{(1)}(k) e^{i\omega t}] + f_{0\bar{j}}^{(2)}(k) + \text{Re}[f_{\bar{j}}^{(2)}(k) e^{2i\omega t}], \quad (32)$$

其中一、二阶分量为

$$f_{\bar{j}}^{(1)}(k) = \int_{S_k} p^{(1)}(k) n_j^{(k)} ds, \quad (33)$$

$$f_{\bar{j}}^{(2)}(k) = \int_{S_k} p^{(2)}(k) n_j^{(k)} ds + f_{\bar{j},n}^{(2)}(k) + f_{\bar{j},n}^{(2)}(k), \quad (34)$$

$$f_{0\bar{y}}^{(2)}(k) = \int_{S_k} p_0^{(2)}(k) n_j^{(k)} ds + f_{0\bar{y}, \eta}^{(2)}(k) + f_{0\bar{y}, n}^{(2)}(k) \quad (35)$$

(34) 中

$$f_{ij, \eta}^{(2)}(k) = \left\{ \frac{\rho g n_j^{(k)}}{4 |n_y|} (\zeta_*^2) \right\}_{P(k)+Q(k)}, \quad (36)$$

$$f_{ij, n}^{(2)}(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} A_i^{(k)} \int_{S_k} p^{(1)}(k) n_{s-j} (-1)^{5-j} ds & i(k) = 4, j = 2, 3, \\ 0 & i(k) \neq 4; i(k) = 4, j = 4 \end{cases} \quad (37)$$

(35) 中

$$f_{0\bar{y}, \eta}^{(2)}(k) = \left\{ \frac{\rho g n_j^{(k)}}{4 |n_y|} |\zeta_*|^2 \right\}_{P(k)+Q(k)}, \quad (38)$$

$$f_{0\bar{y}, n}^{(2)}(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{Re} \left[ A_i^{(k)} \int_{S_k} p^{(1)}(k) n_{s-j} (-1)^{5-j} ds \right] & i(k) = 4, j = 2, 3, \\ 0 & i(k) \neq 4; i(k) = 4, j = 4 \end{cases} \quad (39)$$

(36) 和 (38) 中

$$\zeta_* = - \frac{i\omega\varphi^{(1)}}{g} - \begin{cases} 0 & i(k) = 2, \\ A_i^{(k)} & i(k) = 3, \\ A_i^{(k)}(y - y_0^{(k)}) & i(k) = 4 \end{cases} \quad (40)$$

$P(k)$ 、 $Q(k)$  指第  $k$  个剖面平均湿表面与静水线的左、右两交点。对于潜没在水下的剖面, 该项消失。

一阶水动力中由动压引起的部分, 通常分解成剖面加速度与速度方向的两个分量, 写成

$$-i\omega\rho \int_{S_k} \varphi^{(1)} n_j^{(k)} ds = A_i^{(k)} [-\omega^2 a_{ij}(k) + i\omega b_{ij}(k)], \quad (41)$$

$a_{ij}(k)$ 、 $b_{ij}(k)$  称为第  $k$  个剖面作  $i$  模态的摇荡在  $j$  方向的附加质量和兴波阻尼系数。

## 4 计算实例及讨论

利用简单 Green 函数法对多个剖面引起的辐射问题进行二阶解的数值计算。以多个等边三角形剖面在水面同频振荡为实例给出计算结果, 流场的剖面图见图 2。

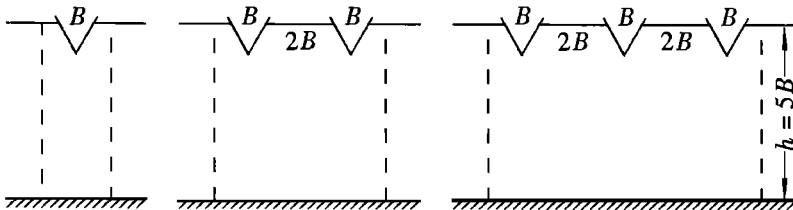


图 2 流场剖面示意图

首先讨论一阶解, 图 3 是单个等边三角形剖面垂荡的量纲为一的附加质量和阻尼系数, 图 4 是两个等边三角形剖面同相位垂荡时两剖面之一的量纲为一的附加质量和阻尼系数, 图 5 是 3 个等边三角形剖面同相位垂荡时中间一个剖面的量纲为一的附加质量和阻尼系数, 图 6

是 3 个等边三角形剖面同相位垂荡时两侧剖面之一的量纲为一的附加质量和阻尼系数, 图 3 至图 6 中横坐标是量纲为一的频率。量纲为一的频率、量纲为一的附加质量和阻尼系数定义如下:

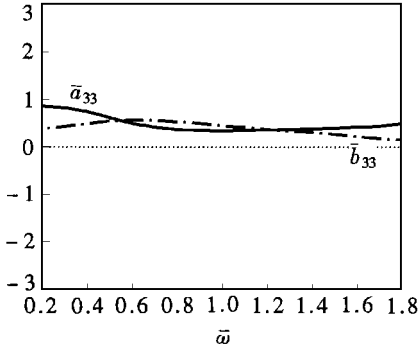


图 3 单个剖面垂荡的一阶水动力系数

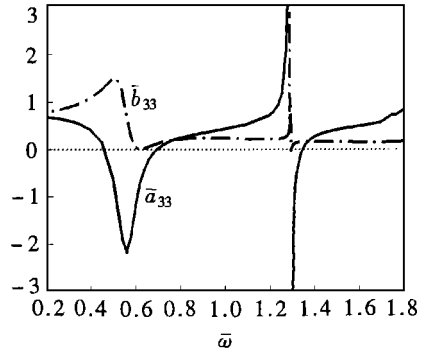


图 4 2 个剖面同相位垂荡时两侧剖面之一的一阶水动力系数

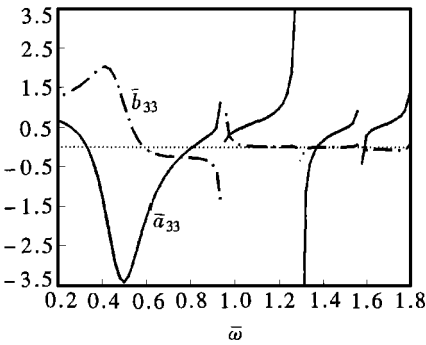


图 5 3 个剖面同相位垂荡时中间一个剖面的一阶水动力系数

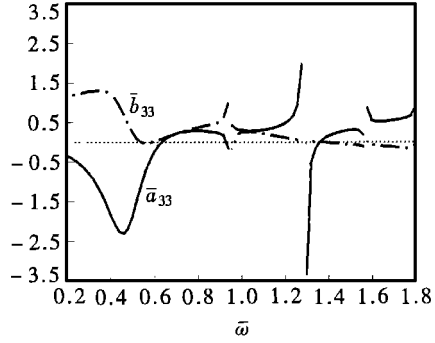


图 6 3 个剖面同相位垂荡时两侧剖面之一的一阶水动力系数

$$\omega = \omega \sqrt{\frac{B}{2g}}, \quad a_{33} = \frac{a_{33}}{\rho A}, \quad b_{33} = \frac{b_{33}}{\rho A} \sqrt{\frac{B}{2g}},$$

其中  $B$  是剖面在水下部分的最大宽度,  $A$  是剖面在水下部分的面积。

从计算结果可以看出多个剖面辐射一阶水动力系数与单个剖面的情况有很大的差别, 低频区出现了负附加质量和大阻尼系数, 在某些频率由于内部域的共振发生附加质量和阻尼系数的间断现象, 对多个振荡剖面中的一个剖面而言, 可能会在某些频率出现负阻尼系数。上述这些水动力特性反映了多个剖面辐射波之间的相互干扰, 类似的结果也可在文献[10]见到。

下面给出二阶结果, 图 7 和图 8 分别是单个等边三角形剖面垂荡和两个等边三角形剖面同相位垂荡时, 一个剖面所受垂向力的一、二阶时历解曲线, 振幅为  $0.2B$ , 量纲为一的频率为  $1.0$ 。图 9 和图 10 分别是单个等边三角形剖面横荡和两个等边三角形剖面反相位横荡时, 一个剖面所受垂向力的一、二阶时历解曲线, 振幅为  $0.1B$ , 量纲为一的频率为  $1.0$ 。由于对称剖面横荡时, 一阶垂向力为零, 图 9 中只有二阶时历解曲线。图 7 至图 10 中垂向力已用  $\rho g B A$  ( $A$  是振幅) 量纲一化, 横坐标是量纲为一的时间  $t/T$  ( $T$  是周期)。从计算结果看, 多个剖面辐射同

题的二阶水动力也与单个剖面的情况有很大的不同,这同样是多个剖面辐射波之间的相互干扰的结果。

以上结果表明:简单 Green 函数方法对复杂边界的适应能力强,便于连结辐射问题中频域一、二阶解的求解过程,得到完整的二阶力;以多个摇荡剖面为例,可以看到,内场的复杂边界条件会对一、二阶辐射水动力产生很大的影响,尤其是在某些频率出现的特殊水动力现象,应予以足够的注意。

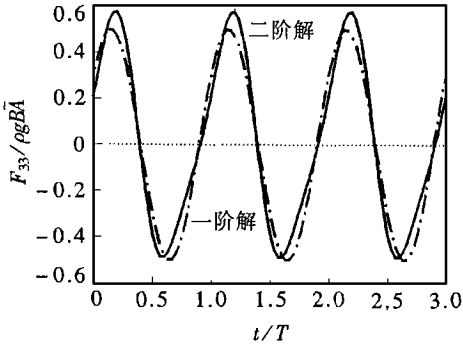


图 7 单个剖面垂荡的一、二阶垂向力

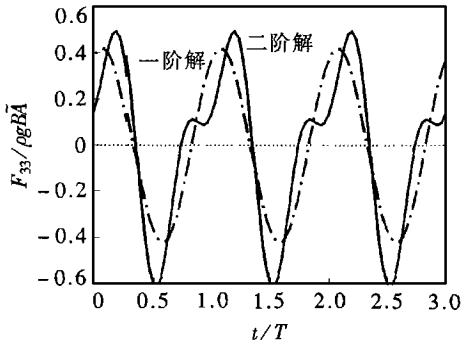


图 8 2个剖面同相位垂荡时,其中一个剖面所受一、二阶垂向力

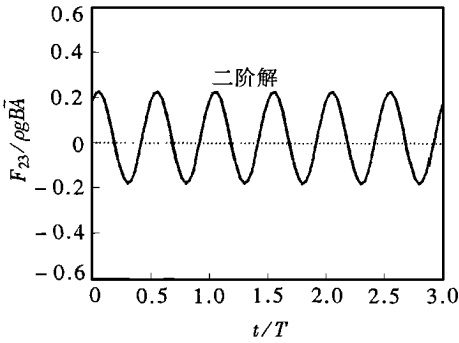


图 9 单个剖面横荡的二阶垂向力

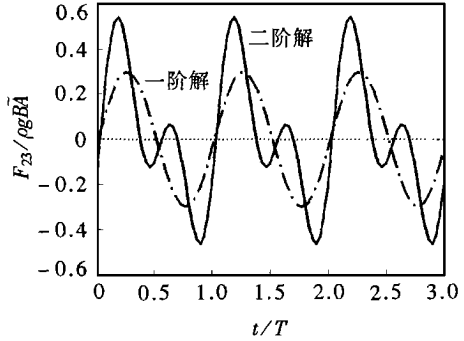


图 10 2个剖面反相位横荡时,其中一个剖面所受一、二阶垂向力

[ 参 考 文 献 ]

- [1] Ursell F. On the heaving motion of a circular cylinder on the surface of a fluid[J]. Quart J Mech Appl Math, 1949, 2(2): 218~ 231.
- [2] Tasai F. Formula for calculating hydrodynamic force of a cylinder heaving on a free surface[R]. Report of Research Institute for Applied Mechanics, Vol, 3, 1960.
- [3] Frank W. Oscillation of cylinders in or below the free surface of deep fluids[R]. Naval Ship Research and Development Center, Report No 2375, 1967.
- [4] Andersen P. Ship motion and sea loads in restricted water depth[R]. Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics, Report No 148, 1978.
- [5] Yeung R W. A singularity\_distribution method for free\_surface flow problem with an oscillating body



- [ R]. University of California, Berkeley, Report No NA 73\_6, 1973.
- [ 6] Nestegard A, Sdavounos P D. A numerical solution of two dimensional deep water wave body problems[ J]. J Ship Research, 1984, 28( 1): 48~ 54.
- [ 7] Poul Andersen, He Wuzhou. On the calculation of two dimensional added mass and damping coefficients by simple Green' s function technique[ J]. Ocean Engineering, 1985, 12( 5): 425~ 451.
- [ 8] 贺五洲, 戴遗山. 有限水深二维辐射问题的二阶速度势和水动力[ J]. 中国造船, 1987, ( 97): 1~ 13.
- [ 9] 贺五洲, 戴遗山. 线元上分布奇点的诱导速度势和诱导速度[ J]. 哈尔滨船舶工程学院学报, 1991, 12( 2): 139~ 147.
- [ 10] 谢楠, 戚心源, 郜焕秋. 有限深水中沉井的水动力计算[ J]. 水动力学研究与进展, 1992, A7( 4): 434 ~ 443.

## Water Surface Wave Radiation Generated by Multiple Cylinders Oscillating With Identical Frequency

He Wuzhou

( Department of Hydraulic and Hydropower Engineering ,  
Tsinghua University , Beijing 100084, P R China )

**Abstract:** The water surface wave radiation problem caused by multiple cylinders oscillating with identical frequency was solved in frequency domain by the boundary element method using simple Green' s function in the inner water region combined with the eigenfunction expansions in the outer water region. The numerical method is suitable to the situation of constant depth of outer regions and complicated boundary conditions of inner region, while the oscillating modes, motion amplitudes and phases of the cylinders may be different from one another. The second order potential and hydrodynamic forces acting on each cylinder were evaluated completely by perturbation method. Compared with the case of single oscillating cylinder, hydrodynamic interference phenomena, such as wave resonance and negative added mass, of the radiation problem due to the oscillatory motions of multiple cylinders are identified which is of engineering importance to the design of moorings and other facilities involving multiple structures.

**Key words:** plane water surface wave; radiation problem; solution in frequency domain; second order hydrodynamic force; added mass; damping coefficient