应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 10_1081_06

关于线性算子的概率范数与算子空间

方锦暄

(南京师范大学 数学系, 南京 210097)

(张石生推荐)

摘要: 由于满足(PN_5) 条件的 PN 空间 ($E,\mathscr{F}$) 就是Manger PN 空间($E,\mathscr{F}$, min) , 因此, 肖建中等给出的关于PN空间上线性算子概率范数的结果有较大的局限性 本文中, 在较一般的Menger PN 空间上研究有关线性算子的概率范数和算子空间的问题, 改进和推广了肖建中等的结果

关 键 词: Menger 概率赋范空间; 线性算子的概率范数; 算子空间
中图分类号: O177 99 文献标识码: A

引 言

文[1] 引入了 Menger 概率赋范空间(简称 Menger PN 空间) 上线性算子的概率范数的概念, 并利用这一概念, 在 t_范数 满足 (t,t) $t($ t $(0,1])$ 的条件下, 给出了线性算子概率有界性的刻划, 研究了算子空间及其完备性 之后, 文[2] 将线性算子概率范数的定义推广到一般的概率赋范空间(简称PN 空间), 并在满足(PN_5) 条件[3] 的PN空间上研究了相应的问题 最近, 我们证明了满足(PN_5) 条件的 PN 空间 ($E,\mathscr{F}$) 就是 Menger PN 空间 ($E,\mathscr{F}$, min) (见[4]) 此外, 容易看出, 满足 (t,t) $t($ t $(0,1])$ 的 t_范数只有一个, 就是 $=\min$(见[5]) 因此, 文[2] 得到的结果是[1] 中已有结果的翻版, 它们有较大的局限性 为了克服这一局限, 本文将在较一般的Menger PN 空间上研究有关线性算子的概率范数、线性算子的有界性、算子空间及其完备性等问题, 我们的工作改进和推广了[1, 2] 的结果

1 预 备 知 识

下文中, $\mathbf{R}=(-\ \ ,+\ \ )$, $\mathscr{D}$表示所有左连续的分布函数的集合 ,

$$\mathscr{D}^+=\left\{f\quad \mathscr{D}\mid f(0)=0\right\},\ \mathscr{D}_0=\left\{f\quad \mathscr{D}^+\mid f^{-1}(1)\qquad\right\}$$

H: $\mathbf{R}$ $[0,1]$ 表示一特殊的分布函数, 定义为 :

$$\mathrm{H}(t)=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t\quad 0\end{cases}$$

Menger PN 空间的定义和其它有关术语、记号见[3, 6, 7]

设 ($E,\mathscr{F},$) 是 Menger PN 空间 对每个 $t>0$ 和 $(0,1]$, 我们定义

收稿日期: 1997_12_12; 修订日期: 1998_04_21
基金项目: 江苏省教委自然科学基金资助项目(JW970135)
作者简介: 方锦暄(1943~) , 男, 教授, 博士生导师.

$$N(t,0)=\left\{x \quad E \,\middle|\, f_x(t)=1\right\},\ N(t,\ )=\left\{x \quad E \,\middle|\, f_x(t)>1-\ \right\}$$

容易验证 $N(t,\ )=tN(1,\ )$, $[0,1]$

如果 t_范数 满足:

$$\sup_{0<t<1}\ (t,t)=1, \tag{1}$$

则 $(E,\mathscr{F},\ )$ 是以$\left\{N(\ ,\ )\,\middle|\ >0,\quad (0,1]\right\}$为 的邻域基的Hausdorff 的拓扑线性空间 这样的拓扑结构称为$(E,\mathscr{F},\ )$ 的$(\ ,\ )$_拓扑, 记为$\mathscr{T}$ 显然,$\left\{N(1/n,1/n)\,\middle|\, n=1,2,\ \right\}$也是$(E,\mathscr{T})$ 中 的邻域基, 所以$(E,\mathscr{T})$ 是满足第一可数公理的

以下若不特别声明, 均假设 t_范数 满足条件(1)

引理 1 设 $(E,\mathscr{F},\ )$ 是Menger PN 空间, 则$\mathscr{F}$取值于 $\mathscr{D}_0$ 的充分必要条件是$N(1,0)$ 为吸收集

证明 必要性 设$\mathscr{F}$取值于 $\mathscr{D}_0$, 则对任何$x \quad E$, 存在 $t>0$ 使得$f_x(t)=1$, 即$x \quad N(t,0)=tN(1,0)$ 故 $N(1,0)$ 是吸收集

充分性 设 $N(1,0)$ 是吸收集, 则对任何 $x \quad E$, 存在 $t>0$ 使得$x \quad tN(1,0)=N(t,0)$, 即$f_x(t)=1$ 所以$\mathscr{F}$取值于 $\mathscr{D}_0$

引理 2 设 $(E,\mathscr{F},\ )$ 是Manger PN 空间, $A \quad E$, 则下列结论彼此等价:

1) A 是概率有界集, 即$\sup\limits_{t>0}\inf\limits_{x\ A} f_x(t)=1$;

2) A 关于$(E,\mathscr{F},\ )$ 的$(\ ,\ )$_拓扑有界, 即对任何 >0及 $(0,1]$, 存在 >0使得$A \quad N(\ ,\ )$;

3) 对任何 $(0,1]$, 存在 $t>0$ 使得 $A \quad tN(1,\ )$

证明 1) 2) 设 A 是概率有界集, 则对任何 >0及 $(0,1]$, 存在 $t>0$ 使得当$x \quad A$ 时, 有$f_x(t)>1-\ $, 即$A \quad N(t,\ )$ 令 $=t/\ $, 即得$A \quad N(\ ,\ )$

2) 3) 是显然的

3) 1) 由3), 对任何 $(0,1]$, 存在 $t_0>0$ 使得$\inf\limits_{x\ A} f_x(t_0) \quad 1-\ $ 于是$\sup\limits_{t>0}\inf\limits_{x\ A} f_x(t) \quad 1-\ $ 由 的任意性, 即知A 是概率有界集

引理 3 设 $(E,\ \ )$ 是赋范线性空间, 定义 $\mathscr{F}: E \quad \mathscr{D}^+$ 如下:

$$\mathscr{F}(x)(t)=f_x(t)=\mathrm{H}(t-\ \ x\ \ ) \tag{2}$$

则 $(E,\mathscr{F},\min)$ 是Menger PN 空间, 并称它为由$(E,\ \ )$ 诱导出的Menger PN 空间

2 线性算子的概率范数与有界性

定义 1[8,9] 设$(E,\mathscr{F},\ )$、$(E,\mathscr{F},\ )$ 是Menger PN 空间, T: $E \quad E$ 是线性算子 若T 映 E 中任一概率有界集为 E 中的概率有界集, 则称 T 是有界的

定理 1 设$(E,\mathscr{F},\ )$、$(E,\mathscr{F},\ )$ 是Menger PN 空间, T: $E \quad E$ 是线性算子 则T 是有界的充分必要条件是, 对每个 $(0,1]$, 存在 $(0,\ ]$ 及 $t>0$ 使得

$$\mathrm{T}(N(1,\ ))\quad N(t,\ ) \tag{3}$$

证明 必要性 因为 E 关于$(\ ,\ )$_拓扑是满足第一可数公理的拓扑线性空间, 所以T 有界当且仅当T 连续(见[10]) 于是, 对每个 $(0,1]$, 存在 $(0,\ ]$ 及 $s>0$ 使得$\mathrm{T}(N(s,\ ))\quad N(1,\ )$ 令 $t=1/s$, 即得$\mathrm{T}(N(1,\ ))\quad N(t,\ )$

充分性 假设对每个 $(0,1]$, 存在 $(0,\ ]$ 及 $t>0$ 使得(3) 式成立 设A 是$(E,$

$\mathscr{F}$,) 中任一概率有界集 由引理 2, 存在 > 0 使 A $N(1,\ )$ 于是

$$\mathrm{T}(A) \quad \mathrm{T}(N(1,\ )) \quad N(t,\ )$$

所以 $\mathrm{T}(A)$ 是 $(E, \mathscr{F},\ )$ 中的概率有界集, 故 T 是有界的

定义 2[1,2] 设 $(E, \mathscr{F},\ )$ $(E, \mathscr{F},\ )$ 是 Menger PN 空间, $\mathrm{T}: E$ E 是线性算子 定义

$$G_{\mathrm{T}}(t) = \sup_{s<t} \sup_{(0,1]} \inf_{x \quad N(1,\ )} f_{\mathrm{T}x}(s) \qquad (t \quad \mathbf{R}) \tag{4}$$

并称 G_{T} 为 T 的概率范数

定理 2 设 $(E, \mathscr{F},\ )$、$(E, \mathscr{F},\ )$ 是 Menger PN 空间, $\mathrm{T}: E$ E 是线性算子, 则 T 有界的充分必要条件是 $\sup_{t>0} G_{\mathrm{T}}(t) = 1$

证明 必要性 设 T 有界 据定理 1, 对任何 $(0,1]$, 存在 $(0,\ ]$ 及 $t_0 > 0$ 使得 $\mathrm{T}(N(1,\ ))$ $N(t_0,\ )$ 于是, $\inf_{x \quad N(1,\ )} f_{\mathrm{T}x}(t_0)$ $1-$ 从而

$$\sup_{t>0} G_{\mathrm{T}}(t) \quad \sup_{t>t_0} \sup_{s<t} \inf_{x \quad N(1,\ )} f_{\mathrm{T}x}(s) \quad \inf_{x \quad N(1,\ )} f_{\mathrm{T}x}(t_0) \quad 1-$$

由 的任意性, 得 $\sup_{t>0} G_{\mathrm{T}}(t) = 1$

充分性 设 $\sup_{t>0} G_{\mathrm{T}}(t) = 1$, 则对任何 $(0,1]$, 存在 $t_0 > 0$ 使 $G_{\mathrm{T}}(t_0) > 1-$ 进而, 存在 $s_0 < t_0$ 及 $(0,1]$ 使得

$$\inf_{x \quad N(1,\ )} f_{\mathrm{T}x}(s_0) > 1-$$

由此可知 $\mathrm{T}(N(1,\ ))$ $N(s_0,\ )$, 据定理 1, T 是有界的

注 1 [1] 中的定理 6, [2] 中的定理 1 是定理 2 在 = = min 情形下的特例

定理 3 设 $(E, \mathscr{F},\ )$、$(E, \mathscr{F},\ )$ 是 Menger PN 空间, $\mathrm{T}: E$ E 是有界线性算子, 则 G_{T} $\mathscr{D}^+$

证明 由 $G_{\mathrm{T}}(t)$ 的定义知, $G_{\mathrm{T}}(t)$ 不减且 $G_{\mathrm{T}}(t)(0) = 0$ 因 T 有界, 由定理 2 知 $\sup_{t>0} G_{\mathrm{T}}(t) = 1$

下面只需证 $G_{\mathrm{T}}(t)$ 是左连续的 设 $t_0 > 0$ 和 $G_{\mathrm{T}}(t_0) =$, 则对任意的 > 0, 存在 $s_0 < t_0$ 及 $_0$ $(0,1]$ 使

$$\inf_{x \quad N(1,\ _0)} f_{\mathrm{T}x}(s_0) > \quad -$$

令 $= t_0 - s_0$, 则当 t $(t_0 - \ , t_0)$, 即 $s_0 < t < t_0$ 时有

$$G_{\mathrm{T}}(t_0) \quad G_{\mathrm{T}}(t) \quad \inf_{x \quad N(1,\ _0)} f_{\mathrm{T}x}(s_0) > \quad -$$

这便证明了 $G_{\mathrm{T}}(t)$ 是左连续的 因此 G_{T} $\mathscr{D}^+$

3 概率有界线性算子空间

设 $(E, \mathscr{F},\ )$, $(E, \mathscr{F},\ )$ 是 Menger PN 空间, $\mathscr{B}(E, E)$ 表示所有 $(E, \mathscr{F},\ )$ 到 $(E, \mathscr{F},\ )$ 的有界线性算子组成的集合 $\mathscr{B}(E, E)$ 按通常的算子加法和数乘构成一线性空间 据定理 3, 我们可定义映射 $\mathscr{G}: \mathscr{B}(E, E)$ $\mathscr{D}^+$ 如下: $\mathscr{G}(\mathrm{T}) = G_{\mathrm{T}}$, 其中 G_{T} 由 (4) 给出

定理 4 设 $(E, \mathscr{F},\ )$、$(E, \mathscr{F},\ )$ 是 Menger PN 空间 若 $\mathscr{F}$ 取值于 $\mathscr{D}_0$, 左连续, 则 $(\mathscr{B}(E, E), \mathscr{G},\ )$ 是 Menger PN 空间 若 $(E, \mathscr{F},\ )$ 还是完备的, 则 $(\mathscr{B}(E, E), \mathscr{G},\ )$ 也是完备的

证明 由定理 3 知, 只需验证 G_{T} 满足 (PN_1) ~ (PN_3)

若 $\mathrm{T} = O$ (零算子), 易知 $G_{\mathrm{T}}(t) = 1(\ t > 0)$ 反之, 使 $G_{\mathrm{T}}(t) = 1(\ t > 0)$, 则对任何

$(0,1]$, 存在 $s < t$ 及 $(0,1]$ 使得对一切 x $N(1,)$ 有 $f_{Tx}(t)$ $f_{Tx}(s) > 1-$ 注意到 $N(1,0)$ $N(1,)$, 所以 $f_{Tx}(t) > 1-$ (x $N(1,0)$) 由 的任意性, 即得

$$f_{Tx}(t) = 1 \quad (t > 0, \quad x \quad N(1,0))$$

因为 $\mathscr{F}$ 取值于 $\mathscr{D}_0$, 由引理 1 知 $N(1,0)$ 是吸收集, 所以对任何 x E, 存在 $M > 0$ 使得 Mx $N(1,0)$ 于是

$$f_{Tx}(t) = f_{T(Mx)}(Mt) = 1 \quad (t > 0)$$

故 $Tx = 0($ x $E)$, 即 $T = O$.(PN_1) 得证

对任一 k 0,

$$\begin{aligned} G_{kT}(t) = &\sup_{s<t} \sup_{(0,1]} \inf_{x \quad N(1,)} f_{(kT)x}(s) = \\ &\sup_{s<t} \sup_{(0,1]} \inf_{x \quad N(1,)} f_{Tx}(s/|k|) = \\ &\sup_{u<t/|k|} \sup_{(0,1]} \inf_{x \quad N(1,)} f_{Tx}(u) = G_T(t/|k|)\# \end{aligned}$$

(PN_2) 成立#

设 $G_{T_1}(t_1) = N_1$, $G_{T_2}(t_2) = N_2$ 且不妨设 $N_1, N_2 > 0$, 则对任何 $0 < E < \min\left\{N_1, N_2\right\}$, 存在 $s_i < t_i$ 及 A_i I $(0,1]$ 使得当 $x\ I\ N(1, A_i)$ 时有 $f_{T_ix}(s_i) > N_i - E(i = 1,2)\#$ 取 $A = \min\left\{A_1, A_2\right\}$, 则当 $x\ I\ N(1, A)$ 时有

$$f_{(T_1+T_2)x}(s_1 + s_2) \setminus \$(f_{T_1x}(s_1), f_{T_2x}(s_2)) \setminus \$(N_1 - E, N_2 - E)\#$$

从而

$$G_{T_1+T_2}(t_1 + t_2) \setminus \inf_{x\ I\ N(1,A)} f_{(T_1+T_2)x}(s_1 + s_2) \setminus \$(N_1 - E, E_2 - E)\#$$

由 \$ 的左连续, 得

$$G_{T_1+T_2}(t_1 + t_2) \setminus \$(N_1, N_2) = \$(G_{T_1}(t_1), G_{T_2}(t_2))\#$$

(PN_3) 成立#

因此 $(\mathscr{B}(E,E), \mathscr{G}, \$)$ 是 Menger PN 空间#

设 $(E, \mathscr{F}, \$)$ 是完备的 Menger PN 空间, $\left\{T_n\right\}$ 是 $(\mathscr{B}(E,E), \mathscr{G}, \$)$ 中的 Cauchy 列, 则

$$G_{T_n - T_m}(t)\ y\ 1, \qquad P\ t > 0(m, n\ y\ ])\# \tag{5}$$

对任一 $x\ I\ E$, 由 $N(1,0)$ 的吸收性, 存在 $M > 0$ 使 $Mx\ I\ N(1,0)\#$ 对任何 $t > 0$, 由(5) 我们有 $G_{T_n - T_m}(Mt)\ y\ 1(m, n\ y\ ])\#$ 于是, 对任何 K I $(0,1]$, 存在 n_0, 当 $m, n > n_0$ 时有 $G_{T_n - T_m}(Mt) > 1 - K\#$ 从而存在 $s_0 < t$ 及 A_0 I $(0, 1]$ 使得

$$\inf_{u\ I\ N(1, A_0)} f_{(T_n - T_m)u}(Ms_0) > 1 - K\#$$

注意到 $Mx\ I\ N(1,0) < N(1, A_0)$, 所以当 $m, n > n_0$ 时, 有

$$f_{(T_n - T_m)x}(t) \setminus f_{(T_n - T_m)x}(s_0) = f_{(T_n - T_m)(Mx)}(Ms_0) > 1 - K\#$$

故 $\left\{T_nx\right\}$ 是 $(E, \mathscr{F}, \$)$ 中的 Cauchy 列# 由 $(E, \mathscr{F}, \$)$ 的完备性, 可设 $T_nx\ y\ y\ I\ E\#$ 我们定义:

$$Tx = y = \lim_{n\ y\ ]} T_nx \qquad (P\ x\ I\ E)\#$$

易知 T 是 E 到 E 的线性算子# 下证 T I $\mathscr{B}(E,E)\#$

对任何 $t > 0$ 及 K I $(0,1]$, 取 $0 < L < K\#$ 由(5), 存在 n_0 I $\mathbf{N}$, 存在 $s_0 < t$ 及 A_0 I $(0, 1]$ 使得当 $m, n > n_0$ 时, 对一切 $x\ I\ N(1, A_0)$ 有 $f_{(T_n - T_m)x}(s_0) > 1 - L\#$ 取 $s\ I\ (s_0, t)$, 则当 $m, n > n_0$ 时, 对一切 $x\ I\ N(1, A_0)$ 有

$$\begin{aligned} f_{T_nx - Tx}(s) \setminus &\$(f_{T_nx - T_mx}(s_0), f_{T_mx - Tx}(s - s_0)) \setminus \\ &\$(1 - L, f_{T_mx - Tx}(s - s_0))\# \end{aligned} \tag{6}$$

注意到$\mathrm{T}_m x \ y \ \mathrm{T}x(m \ y \ ])$及$\$(1- \mathrm{L}, t)$在$t = 1$处的左连续性,由(6)得,对一切$x \ I \ N(1, \mathrm{A}_0)$有

$$f_{\mathrm{T}_n x - \mathrm{T}x}(s) \ \backslash \ \$(1- \mathrm{L}, 1) = 1- \mathrm{L} > 1- \mathrm{K}, \tag{7}$$

即$(\mathrm{T}_n - \mathrm{T})(N(1, \mathrm{A}_0)) < N(s, \mathrm{K})$# 于是据定理1, $\mathrm{T}_n - \mathrm{T}(n > n_0)$是有界的# 因此

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_n - (\mathrm{T}_n - \mathrm{T}) \ I \ \mathscr{B}(E, E)\#$$

此外,由(7)可知,当$n > n_0$时,有

$$G_{\mathrm{T}_n - \mathrm{T}}(t) \ \backslash \inf_{x \ I \ N(1, \mathrm{A}_0)} f_{\mathrm{T}_n x - \mathrm{T}x}(s) > 1- \mathrm{K}\#$$

这表明$\lim_{n y]} G_{\mathrm{T}_n - \mathrm{T}}(t) = 1(\mathrm{P} \ t > 0)$,即$\mathrm{T}_n \ y \ \mathrm{T}(n \ y \ ])$# 因此$(\mathscr{B}(E,E), \mathscr{G}, \$)$是完备的Menger PN空间#

注2 [1]、[2]的主要结果是定理4在$\$ = \$ = \min$情形下的特例#

定理5 设$(E, \mathscr{F}, \min)$、$(E, \mathscr{F}, \min)$分别是由赋范线性空间$(E, + \# +)$、$(E, + \# +)$诱导出的Menger PN空间# $B(E,E)$表示所有$(E, + \# +)$到$(E, + \# +)$的有界线性算子组成的集合# 则$\mathscr{B}(E, E) = B(E, E)$,且对任一$\mathrm{T} \ I \ B(E,E)$, T的概率范数为

$$G_{\mathrm{T}}(t) = \mathrm{H}(t- +\mathrm{T}+), \qquad \mathrm{P} \ t \ I \ \mathbf{R}, \tag{8}$$

其中$+\mathrm{T}+$是算子T通常的范数#

这表明$(\mathscr{B}(E, E), \mathscr{G}, \min)$恰为通常的算子空间$(B(E, E), + \# +)$诱导出的Menger PN空间#

证明 由(2)知,在诱出的Menger PN空间中#

$$f_x(t) > 0 \ \mathrm{Z} \ f_x(t) = 1 \ \mathrm{Z} \ +x+ < t\# \tag{9}$$

所以对任何$\mathrm{A} \ \mathrm{I} \ (0,1]$, $N(1, \mathrm{A}) = \left\{x \ I \ E \mid +x+ < 1\right\}$#

于是,若$\mathrm{T} \ \mathrm{I} \ B(E, E)$,则

$$+\mathrm{T}+ = \sup\left\{+\mathrm{T}x+ \mid +x+ < 1\right\} = \sup\left\{+\mathrm{T}x+ \mid x \ I \ N(1, \mathrm{A})\right\}$$
$$(\mathrm{P} \ \mathrm{A} \ \mathrm{I} \ (0,1])\#$$

所以,当$t > +\mathrm{T}+$时,存在$s < t$使得对任何$\mathrm{A} \ \mathrm{I} \ (0,1]$和任何$x \ I \ N(1, \mathrm{A})$,有$+\mathrm{T}x+ < s$# 由(9)即得$f_{\mathrm{T}x}(s) = 1$# 从而

$$G_{\mathrm{T}}(t) = \sup_{s<t} \sup_{\mathrm{A} I (0,1]} \inf_{x I N(1, \mathrm{A})} f_{\mathrm{T}x}(s) = 1;$$

当$t \ [\ +\mathrm{T}+$时,则对任何$s < t$及$\mathrm{A} \ \mathrm{I} \ (0,1]$,存在$x \ I \ N(1, \mathrm{A})$使得$+\mathrm{T}x+ > s$,即$f_{\mathrm{T}x}(s) = 0$# 从而$G_{\mathrm{T}}(t) = 0$# 因此$G_{\mathrm{T}}(t) = \mathrm{H}(t- +\mathrm{T}+)$# 由此可知,$\sup_{t>0} G_{\mathrm{T}}(t) = 1$# 所以$\mathrm{T} \ \mathrm{I} \ \mathscr{B}(E, E)$#

另一方面,若$T \ I \ \mathscr{B}(E,E)$,则由定理2知$\sup_{t>0} G_{\mathrm{T}}(t) = 1$# 所以存在$t_0 > 0$和$\mathrm{A} \ \mathrm{I} \ (0,1]$使得对一切$x \ I \ N(1, \mathrm{A})$都有$f_{\mathrm{T}x}(t_0) > 0$# 由此可见,当$+x+ < 1$时,有$+\mathrm{T}x+ < t_0$# 这表明$+\mathrm{T}+ \ [\ t_0$,即知$\mathrm{T} \ \mathrm{I} \ B(E, E)$#

这便证明了, $B(E,E) = B(E,E)$,且不难看出$(\mathscr{B}(E, E), \mathscr{G}, \min)$恰为算子空间$(B(E, E), + \# +)$诱导出的Menger PN空间#

[参考文献]

[1] 肖建中. M_PN空间上线性算子的概率范数与有界性刻画[J]. 数学研究与评论, 1993, **13**(4): 631~632.

[2] 肖建中, 蒋兴国. 关于PN空间上线性算子的概率范数[J]. 应用数学和力学, 1997, **18**(3): 285~290.

[3] 张石生. 概率度量空间的基本理论及应用( )[J]. 应用数学和力学, 1988, **9**(2): 117~126.

[4] 方锦暄. 关于概率赋范空间与(PN_5)条件[J]. 南京师范大学学报(自然科学版), 1988, **21**(1): 10~11.

[5] 方锦暄. Menger空间上局部压缩映象的不动点定理[J]. 应用数学和力学, 1991, **12**(4): 339~347.

[6] 张石生. 概率度量空间的基本理论及应用( )[J]. 应用数学和力学, 1988, **9**(3): 193~204.

[7] 张石生. 不动点理论及应用[M]. 重庆: 重庆出版社, 1984.

[8] 林熙. 概率赋范空间上的线性算子[J]. 工程数学学报, 1987, **4**(2): 43~48.

[9] 龚怀云. 概率赋范空间上的线性算子[J]. 数学研究与评论, 1990, **10**(2): 239~242.

[10] 定光桂. 拓扑线性空间选择[M]. 南宁: 广西教育出版社, 1987.

On Probabilistic Norm of a Linear Operators and Space of Operators

Fang Jinxuan
(Department of Mathematics, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, P R China)

Abstract: Since the PN space $(E, \mathscr{F})$ which satisfies condition (PN_5) is just a Menger PN_space $(E, \mathscr{F}, \min)$, the results with regard to probabilistic norms of linear operators on PN_spaces obtained by Xiao Jianzhong have bigger limitations. In this paper, problems respecting probabilistic norms of linear operators and spaces of operators are studied on more general Menger PN spaces. The results presented improve and generalize the corresponding results by Xiao.

Key words: probabilistic normed space; probabilistic norm of a linear operator; space of operators