

文章编号: 1000-0887(1999) 10-1087-07

刚柔耦合系统动力学建模及分析^{*}

胡振东, 洪嘉振

(上海交通大学 工程力学系, 上海 200030)

(马兴瑞推荐)

摘要: 准确预测经历大范围刚体运动和弹性变形的柔性体的行为, 是当前柔性多体系统动力学领域关注的主要课题。基于线性理论的传统方法由于无法计及动力刚化效应, 导致在许多实际应用中得到错误的结果。本文从离心力势场的概念出发, 应用 Hamilton 原理建立了具有动力刚化效应的刚柔耦合系统的运动方程, 证明了该方程解的周期性, 并采用了 Frobenius 方法给出了其精确解的一般形式。通过算例分析了刚体运动对弹性运动的模态和频率的影响。

关键词: 刚柔耦合系统; 动力刚化; 刚体运动; 弹性运动; 周期性

中图分类号: O313.7 **文献标识码:** A

引 言

柔性机械臂、涡轮机叶片、直升机旋翼以及带有柔性附件的人造卫星等都是由刚体和柔性体组成的刚柔耦合系统, 建立这类系统的动力学模型需要考虑大范围刚体运动与弹性小变形运动的耦合问题。传统的柔性多体系统动力学理论和方法由于无法计及大范围运动引起的动力刚化效应, 因而在描述上述系统的动力学行为时得到完全错误的结果^[1-3]。采用大变形非线性固体力学理论, 虽然可以将刚体运动统一起来^[4,5], 但在求解方面面临巨大的困难。因此目前人们正在寻找一种既能反映工程实际而又能简化数值计算的建模方法。

柔性体的离散是柔性多体系统建模的又一重要环节。迄今为止, 人们普遍采用系统静止时的模态作为变形的度量尺度^[1,6], 而很少考虑大范围运动对模态本身的影响, 对由此产生的理论误差缺少必要的研究。

本文在小变形条件下, 通过引入离心力势场的概念, 应用 Hamilton 原理建立了中心刚体固结弹性梁系统的拟线性运动方程。该方程中包含有动力刚度项。在此基础上分析了解的周期性, 并用 Frobenius 方法精确求解了有关振型的变系数微分方程, 从而确定出大范围运动对变形运动的模态及频率的影响。

1 基本方程

考虑图 1 所示的刚柔耦合系统, 其中中心刚体绕固定轴以定常的角速度 Ω 旋转, 半径为

* 收稿日期: 1997_10_06; 修订日期: 1998_04_01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19832040); 国家教委高校博士点基金资助项目

作者简介: 胡振东(1964~), 男, 博士, 副教授, 通信址: 同济大学 工程力学系, 上海 200092.

R • 柔性梁的一端固结在中心刚体 O 点处, 另一端带有集中质量块 M • 梁的长度为 l , 质量密度为 ρ , 截面积为 A , 抗弯刚度为 EI • 图中 $x^* O^* y^*$ 为惯性坐标系, 而 xOy 为描述柔性梁变形运动的浮动坐标系• 假定中心刚体的转动和柔性梁的变形运动都是 xOy 平面上的平面运动•

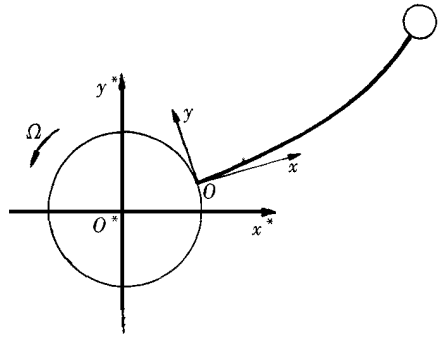


图 1 中心刚体固结柔性附件

设 xOy 坐标系中梁上任一点 P 处的横向位移为 u , 则该点的绝对速度为

$$V_P = (-\Omega u) \mathbf{i} + [\Omega(x+R) + u_t] \mathbf{j}, \quad (1)$$

其中 \mathbf{i} 是 Ox 轴正向单位矢量, \mathbf{j} 是 Oy 轴正向单位矢量, 下标 t 表示对时间 t 求导• 系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} I_0 \Omega^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left\{ \Omega^2 u^2 + [\Omega(x+R) + u_t]^2 \right\} dx + \frac{1}{2} M \left\{ \Omega^2 u^2(l, t) + [\Omega(x+R) + u_t(l, t)]^2 \right\}, \quad (2)$$

其中 I_0 为中心刚体的转动惯量•

系统的势能由两部分组成, 一部分是弯曲变形能, 另一部分是变形体在离心力势场所具有的势能• 即

$$U = U_1 + U_2, \quad (3)$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_0^l EI u_{xx}^2 dx, \quad (4)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_0^l G u_x^2 dx, \quad (5)$$

其中:

$$G = \int_x^l \rho A (\xi + R) d\xi + M(l + R). \quad (6)$$

应用 Hamilton 原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0, \quad (7)$$

得到系统的运动方程

$$EI u_{xxx} - \Omega^2 (G u_x)_x - \rho A \Omega^2 u + \rho A u_{tt} = 0 \quad (8)$$

及边界条件

$$u(0, t) = 0, \quad (9a)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad (9b)$$

$$u_{xx}(l, t) = 0, \quad (9c)$$

$$EI u_{xxx}(l, t) - M(l + R) \Omega^2 u_x(l, t) + M \Omega^2 u(l, t) - M u_{tt}(l, t) = 0 \quad (9d)$$

方程 (8) 为拟线性偏微分方程•

令

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad v = \frac{u}{l}, \quad \alpha = \frac{R}{l}, \quad \mu = \frac{M}{\rho A l},$$

$$\eta^2 = \frac{\rho A l^4 \Omega^2}{EI}, \quad \tau = \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} t, \quad g(\xi) = \int_{\xi}^1 (\alpha + x) dx + \mu(1 + \alpha),$$

得到无因次运动方程

$$v_{\xi\xi\xi} - \eta^2 (g v_{\xi})_{\xi} - \eta^2 v + v_{\tau\tau} = 0 \quad (10)$$

及边界条件

$$v(0, \tau) = 0, \quad (11a)$$

$$v_{\xi}(0, \tau) = 0, \quad (11b)$$

$$v_{\xi\xi}(1, \tau) = 0, \quad (11c)$$

$$v_{\xi\xi}(1, \tau) - \eta^2 [g v_{\xi}(1, \tau)]_{\xi} - \eta^2 v(1, \tau) + v_{\tau\tau}(1, \tau) = 0 \quad (11d)$$

2 解的周期性

下面我们来判定刚柔耦合系统运动方程解是否具有周期性, 首先将方程(10)的解表示成

$$v(\xi, \tau) = \phi(\xi) e^{\lambda \tau}, \quad (12)$$

这里 λ 可以是虚数也可以是实数。当 λ 为虚数时, 方程有周期解, 而当 λ 为实数时, 方程没有周期解。

将(12)式代入方程(10)中, 得

$$\phi''' - \eta^2 (g \phi)' - \eta^2 \phi + \lambda^2 \phi = 0 \quad (13)$$

用 ϕ 乘方程的两边并在 $[0, 1]$ 区间上积分得

$$\begin{aligned} \phi \phi' \Big|_0^1 - \phi' \phi \Big|_0^1 - \eta^2 g \phi \phi \Big|_0^1 + \int_0^1 (\phi'')^2 dx + \eta^2 \int_0^1 g (\phi')^2 dx - \\ \eta^2 \int_0^1 \phi^2 dx + \lambda^2 \int_0^1 \phi^2 dx = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

利用边界条件(11a)~(11b)得

$$\begin{aligned} \lambda^2 = \left[\mu \eta^2 \phi^2(1) - \mu \eta^2 (1 + \alpha) \int_0^1 (\phi')^2 dx + \eta^2 \int_0^1 \phi^2 dx - \eta^2 \int_0^1 \frac{1}{2} (1 - x^2) (\phi')^2 dx - \right. \\ \left. \eta^2 \alpha \int_0^1 (1 - x) (\phi')^2 dx - \int_0^1 (\phi'')^2 dx \right] \Big/ \left[\mu \phi^2(1) + \int_0^1 \phi^2 dx \right], \end{aligned} \quad (15)$$

上式中

$$\phi^2(1) = \left[\int_0^1 \phi'(x) dx \right]^2.$$

由 Schwarz 不等式知

$$\left[\int_0^1 \phi'(x) dx \right]^2 = \left[\int_0^1 1 \cdot \phi'(x) dx \right]^2 \leq \int_0^1 [\phi'(x)]^2 dx,$$

所以

$$\phi^2(1) \leq \int_0^1 [\phi'(x)]^2 dx. \quad (16)$$

此外, 由边界条件(11a)知

$$\phi(x) = \int_0^x \phi'(x) dx.$$

由 Schwarz 不等式得

$$\phi^2(x) = \left[\int_0^x \phi'(x) dx \right]^2 \leq x \int_0^x [\phi'(x)]^2 dx.$$

在 $[0, 1]$ 区间上对上式积分得

$$\int_0^1 \phi^2(x) dx \leq \int_0^1 x \int_0^x [\phi'(\xi)]^2 d\xi dx = \int_0^1 [\phi'(x)]^2 \int_x^1 \xi d\xi dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x^2)[\phi'(x)]^2 dx \quad (17)$$

将(16)及(17)式代入(15)式,显然

$$\lambda^2 < 0 \quad (18)$$

因此可以断定方程(10)有周期解,也就是说图1中的刚柔耦合系统存在的周期性的弹性运动。

3 精确解一般形式

设 $\lambda = -i\omega(i^2 = -1)$,将方程(12)的解写成

$$\mathcal{V}(\xi, \tau) = \phi(\xi) e^{-i\omega\tau}, \quad (19)$$

将(19)代入方程(10)得

$$\phi'' - \Pi^2 \left[\alpha(1-\xi) + \frac{1}{2}(1-\xi^2) + \mu(1+\alpha) \right] \phi' + \Pi^2(\alpha+\xi)\phi - (\Pi^2 + \omega^2)\phi = 0 \quad (20)$$

用Frobenius方法求解上述变系数常微分方程,设方程的4个线性无关解为

$$\mathcal{V}_r(\xi) = \sum_{k=r}^{\infty} a_{rk} \xi^k \quad (r = 0, 1, 2, 3) \quad (21)$$

将(21)代入(20)中,得到系数之间的递推关系如下

$$a_{rk} = \frac{\Pi^2 \varepsilon}{k(k-1)} a_{r(k-2)} - \frac{\alpha \Pi^2 (k-3)}{k(k-1)(k-2)} a_{r(k-3)} - \frac{\Pi^2 (k-3)(k-4) - 2(\omega^2 + \Pi^2)}{2k(k-1)(k-2)(k-3)} a_{r(k-4)}, \quad (22)$$

其中 $\varepsilon = \alpha + 1/2 + \mu(1+\alpha)$,当 $k < r$ 时, $a_{rk} = 0$

由(22)式可以看出,当 k 充分大时,系数级数绝对收敛。

令 $a_{rr} = 1$,由上述递推关系得

$$\mathcal{V}_0 = 1 + \frac{\Pi^2 \varepsilon \xi^2}{2} + \frac{\Pi^4 \varepsilon^2 + \omega^2 + \Pi^2}{24} \xi^4 + \dots, \quad (23)$$

$$\mathcal{V}_1 = \xi + \frac{\Pi^2 \varepsilon \xi^3}{6} - \frac{\alpha \Pi^2}{24} \xi^4 + \frac{\Pi^4 \varepsilon^2 + \omega^2}{120} \xi^5 + \dots, \quad (24)$$

$$\mathcal{V}_2 = \xi^2 + \frac{\Pi^2 \varepsilon \xi^4}{12} - \frac{\alpha \Pi^2}{30} \xi^5 + \frac{\Pi^4 \varepsilon^2 - 2\Pi^2 + \omega^2}{360} \xi^6 + \dots, \quad (25)$$

$$\mathcal{V}_3 = \xi^3 + \frac{\Pi^2 \varepsilon \xi^5}{20} - \frac{\alpha \Pi^2}{40} \xi^6 + \frac{\Pi^4 \varepsilon^2 - 4\Pi^2 + \omega^2}{840} \xi^7 + \dots, \quad (26)$$

方程的通解可写成

$$\phi(\xi) = \sum_{r=0}^3 C_r \mathcal{V}_r(\xi), \quad (27)$$

由边界条件(11a)和(11b)得

$$\phi(0) = C_0 = 0, \quad \phi'(0) = C_1 = 0,$$

则 $\phi(\xi) = C_2 \mathcal{V}_2(\xi) + C_3 \mathcal{V}_3(\xi)$ 。

由边界条件(11c)和(11d)得

$$\begin{bmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (28)$$

其中

$$\begin{aligned} b_{1k} &= \dot{V}_k(1), \\ b_{2k} &= V_k^{\ominus}(1) - \mu(1 + \alpha)\eta^2 \dot{V}_k(1) + \mu\eta^2 V_k(1) + \mu\omega^2 V_k(1) \quad (k = 2, 3). \end{aligned}$$

方程(28)有非零解的条件为

$$\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix} = 0 \quad (29)$$

由方程(29)求出系统的振动频率 ω 。

再由方程组(28)得到系统的模态

$$\phi(\xi) = C_3 \left[\frac{\dot{V}_3(1)}{V_2(1)} v_2(\xi) + v_3(\xi) \right]. \quad (30)$$

4 结果与讨论

经计算,刚柔耦合系统弹性运动的频率和模态随转速的变化如图2至图9所示。从计算结果中可以看出:

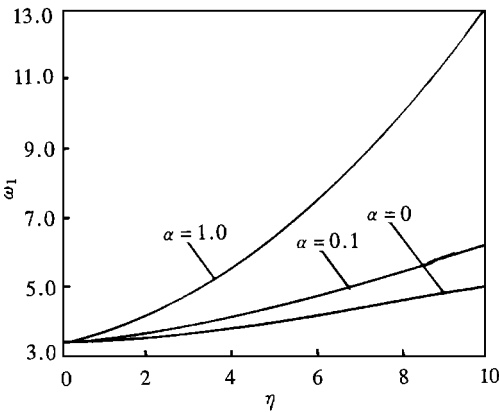


图2 $\mu = 0$ 时一阶频率随转速的变化

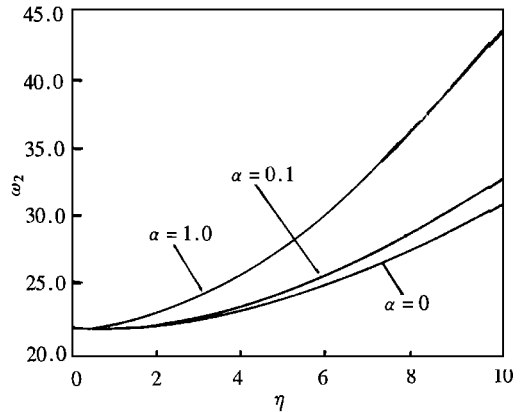


图3 $\mu = 0$ 时二阶频率随转速的变化

1. 转动角速度增加,系统弹性运动的频率增大。这是由于离心力引起的动力刚化效应增强而导致的结果。

2. 中心刚体的半径增加,系统弹性运动的频率也增大。这是由于离心力的影响与转动半径成正比。

3. 弹性梁端部集中质量增加,系统弹性运动的一阶频率减小,而二阶频率可能减小也可能增大。这是由于一方面系统的惯性增加,频率有降低的趋势;另一方面动力刚化效应增强,频率又有增大的趋势。

4. 随着转速增加,系统弹性运动的模态与静止时相比有较大的差异,因此当转速较高时,传统的柔性多体系统动力学方法存在一定的误差。

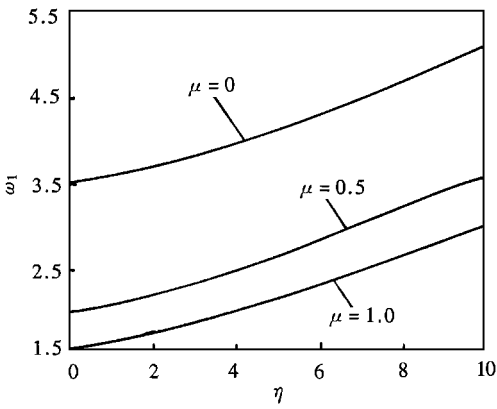


图 4 $\alpha = 0$ 时一阶频率随转速的变化

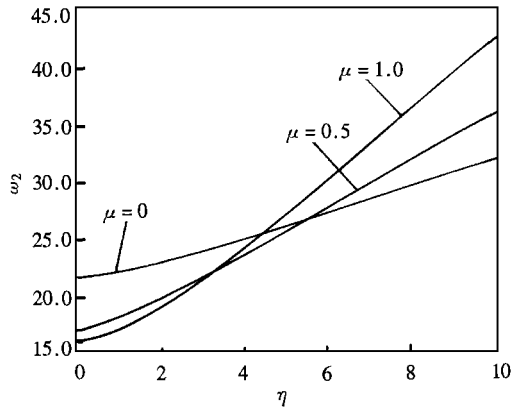


图 5 $\alpha = 0$ 时二阶频率随转速的变化

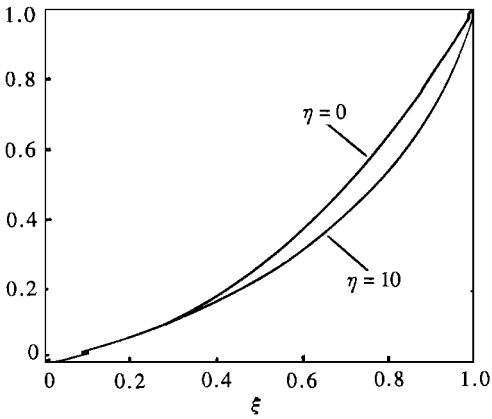


图 6 $\alpha = 0, \mu = 0$ 时一阶模态随转速的变化

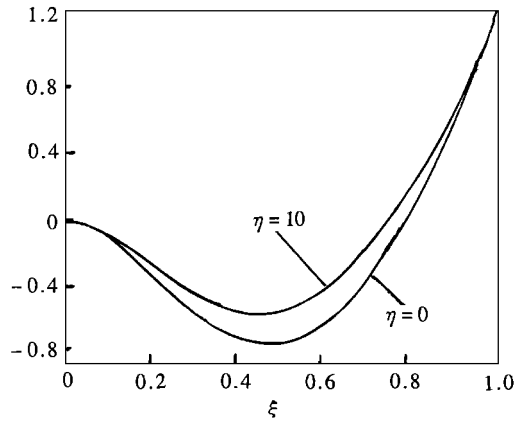


图 7 $\alpha = 0, \mu = 0$ 时二阶模态随转速的变化

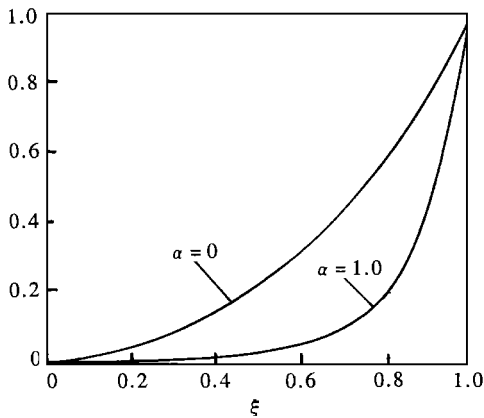


图 8 $\eta = 10$ 时一阶模态随转动半径的变化

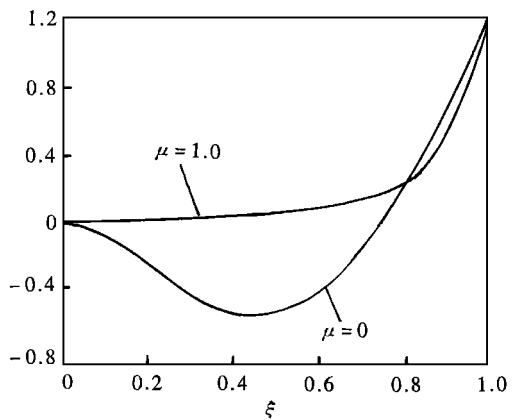


图 9 $\eta = 10$ 时二阶模态随集中质量的变化

[参 考 文 献]

- [1] Kane T R, Ryan R R, Banerjee A K. Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base[J]. *J Guid Control and Dynamics*, 1987, **10**(2): 139~ 151.
- [2] Bloch A M. Stability analysis of a rotating flexible system[J]. *Acta Applicandae Mathematicae*, 1989, **17**(1): 211~ 234.
- [3] Zhang D J, Huston R L. On dynamic stiffening of flexible bodies having high angular velocity[J]. *Mech Struct & Mach*, 1996, **24**(3): 313~ 329.
- [4] Simo J C, Vu_Quoc L. The role of non_linear theory in transient dynamic analysis of flexible structures[J]. *J Sound and Vibration*, 1987, **119**: 487~ 508.
- [5] Simo J C, Vu_Quoc L. On the dynamics of flexible bodies under large overall motion——the plane case, Parts I and II [J]. *J Appl Mech*, 1986, **53**: 849~ 869.
- [6] Haering W J, Ryan R R, Scott R A. New formulation for flexible beams undergoing large overall plane motion[J]. *J Guid Control and Dynamics*, 1994, **17**: 76~ 83.

Modeling and Analysis of a Coupled Rigid_ Flexible System

Hu Zhendong, Hong Jiazhen

(Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong
University, Shanghai 200030, P R China)

Abstract: Correct predictions of the behavior of flexible bodies undergoing large rigid_body motions and small elastic vibrations is a subject of major concern in the field of flexible multibody system dynamics. Because of failing to account for the effects of dynamic stiffening, conventional methods based on the linear theories can lead to erroneous results in many practical applications. In this paper, the idea of“ centrifugal potential field”, which induced by large overall rotation is introduced, and the motion equation of a coupled rigid_flexible system by employing Hamilton's principle is established. Based on this equation, first it is proved that the elastic motion of the system has periodic property, then by using Frobenius' method its exact solution is obtained. The influences of large overall rigid motion on the elastic vibration mode shape and frequency are analysed through the numerical examples.

Key words: coupled rigid_flexible system; dynamic stiffening; rigid_body motion; elastic vibration; periodic property