

文章编号: 1000-0887(1999) 10-1094\_07

# 一个非线性电力系统的混沌振荡<sup>\*</sup>

张伟年<sup>1</sup>, 张卫东<sup>2</sup>

(1 四川大学 数学系, 成都 610064; 2 重庆电力高等专科学校, 重庆 400053)

(刘曾荣推荐)

摘要: 分析了一个非线性三参数电力系统振荡的异宿分枝, 给出 Melnikov 函数的留数算法, 并获得电力系统发生混沌振荡的锥形参数区域和带形参数区域, 为大偏差状态下保障电力系统稳定运行提供了理论依据和计算方法

关键词: 电力系统; 非线性; 异宿分枝; 混沌振荡

中图分类号: O175.14; O322 文献标识码: A

## 引 言

电力系统振荡是关系电力系统安全稳定运行的重要因素。除了正常运行的周期振荡外, 电力系统有时还会发生混沌振荡现象<sup>[1]</sup>, 其表现为非周期的、似乎无规则的、突发性或阵发性的机电振荡, 在振荡严重的情况下会导致互联系统的解列。例如文献[2]记载了 1966 年美国西北、西南二大电力系统互联后不久发生一分钟发作 6 次的“运行人员从未见过的”振荡现象, 其结果导致二系统解列。在我国的一些互联系统上也有时观测到这种随机性的振荡现象<sup>[1]</sup>, 尽管这种现象的发生未必都使稳定性破坏, 但总是对系统的安全构成威胁。因此, 从工程实践到理论分析, 人们对电力系统的复杂振荡现象进行着不懈的探索, 力图找到控制振荡形式和规模的有效方法和设计比 PSS 和 LOEC 控制器更优越的电力系统控制器, 使“病态振荡”在现场运行甚至在工程设计中得已避免。

同许多实际振动模型<sup>[3]</sup>一样, 电力系统也是非线性的, 其机理十分复杂。长期以来, 人们用线性方法去研究电力系统并形成了一套易于掌握的综合校正与设计方法。然而这些方法只适用于小扰动小偏差系统, 而不能代替分析远离平衡态的大偏差系统的非线性本质, 因而上述“病态振荡”问题长期得不到解决。传统的方法已不适应提高电力系统大干扰稳定性的要求。

近几十年来, 非线性科学的长足发展为研究动力系统分枝与混沌提供了方法<sup>[4,5]</sup>。人们对电力系统的非线性振荡问题已做了许多工作<sup>[6]~[10]</sup>, 例如是[9]用 Hopf 分枝理论研究了平衡态失稳时电力系统产生的周期振荡, [10]对[1]提到的非线性模型分析了混沌振荡出现的可能性。然而, 对电力系统混沌振荡的产生机理和参数条件还有待于进一步给出一个量化的描述

\* 收稿日期: 1997\_07\_02; 修订日期: 1999\_02\_10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19571081); 四川省青年科技基金资助项目(94.002)

作者简介: 张伟年(1963~), 男, 曾获中国科学院硕士、北京大学博士学位, 教授, 曾获第四届“中国青年科技奖”, 从事微分方程和动力系统研究。

本文致力于研究[1]提到的非线性电力系统振荡模型。我们讨论如图1所示的简单互联系统,其中:1—系统1的等值发电机、2—系统2的等值发电机、3—系统1的等值主变压器、4—系统2的等值主变压器、5—负荷、6—断路器、7—系统联络线。

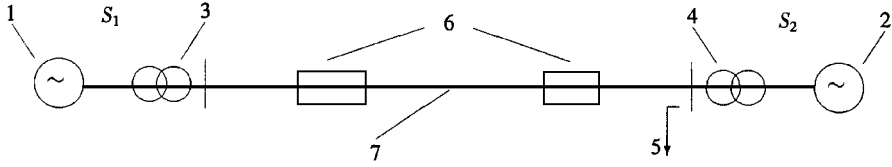


图1 简单互联系统

记  $\delta(t) = \delta_1(t) - \delta_2(t)$  为  $t$  时刻系统1等值发电机与系统2等值发电机电势之间的相对角度。它和其相对角速度  $\omega(t)$  满足如下微分方程组<sup>[1]</sup>

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\delta(t) = \omega(t), \\ \frac{d}{dt}\omega(t) = -\frac{1}{H}P_s \sin \delta(t) - \frac{D}{H}\omega(t) + \frac{1}{H}P_m + \frac{1}{H}P_e \cos \beta t, \end{cases} \quad (1)$$

这里  $H$ 、 $D$  为等值转动惯量和等值阻尼系数,  $P_s$  为系统1送往系统2电磁功率的最大值,  $P_m$  为等值发电机1的机械功率,  $P_e$  为扰动功率幅值,  $\beta$  为扰动频率。通常我们考虑互联系统的大功率送电,这时  $P_m$ 、 $D$  和  $P_e$  相对而言可看作小参数。

本文我们用 Melnikov 方法分析三参数系统(1)的异宿分枝,通过 Melnikov 函数计算过程展示留数计算法的技巧,并获得电力系统发生混沌振荡的锥性参数区域或带形参数区域,为大偏差状态下保障电力系统稳定运行提供了理论依据和计算方法。

## 1 无扰系统定性分析

首先作变换

$$\tau = t \sqrt{P_s/H}, \quad x(\tau) = \delta(t), \quad y(\tau) = \sqrt{H/P_s} \omega(t), \quad (2)$$

方程(1)化为

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}x = y, \\ \frac{d}{d\tau}y = -\sin x - \lambda y + \rho + \mu \cos(\gamma\tau). \end{cases} \quad (3)$$

其中简记  $\lambda = D/\sqrt{P_s H}$ ,  $\rho = P_m/P_s$ ,  $\mu = P_e/P_s$ ,  $\gamma = \beta \sqrt{H/P_s}$ 。由于  $\lambda$ 、 $\mu$ 、 $\rho$  和  $D$ 、 $P_e$ 、 $P_m$  一样是小参数,我们不妨引入小参数  $0 < \varepsilon \ll 1$  使

$$\lambda = \varepsilon a, \quad \mu = \varepsilon b, \quad \rho = \varepsilon c, \quad (4)$$

其中  $a$ 、 $b$ 、 $c \geq 0$ 。通常公式中我们仍习惯用  $t$  来取代  $\tau$ , 这样方程(3)化为

$$S_\varepsilon: \begin{cases} \frac{d}{dt}x = y, \\ \frac{d}{dt}y = -\sin x - \varepsilon a y + \varepsilon c + \varepsilon b \cos(\gamma t). \end{cases}$$

当  $\varepsilon = 0$  时方程  $S_0$  是一个平面 Hamilton 系统,其相图见图2,在  $(x, y)$  相平面上有平衡点

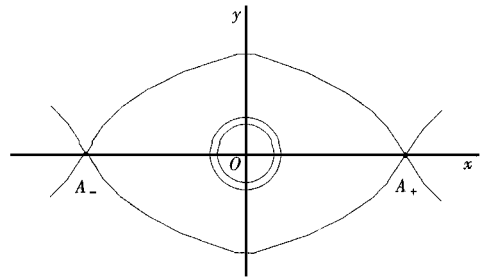


图2 无扰系统  $S_0$  相图

$(2k\pi, 0), (\pm\pi + 2k\pi, 0)$ , 这里  $k$  为整数. 由于具有对称性, 我们只需在一个周期内考虑  $-\pi \leq x \leq \pi$  和平衡点  $A_-: (-\pi, 0), O: (0, 0), A_+: (\pi, 0)$ . 从线性部分的特征值可判定  $A_-$  和  $A_+$  是鞍点而  $O$  是中心. 系统  $S_0$  的 Hamilton 能量为

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + (1 - \cos x) = h, \quad h \in [0, +\infty), \quad (5)$$

当  $h = 0$  时(5) 是中心  $O$ , 当  $0 < h < 2$  时是围绕中心  $O$  的一族周期轨道, 而当  $h = 2$  时(5) 是连接平衡点  $A_-$  和  $A_+$  的异宿轨道, 其参数方程为

$$x_{\pm} = \pm 2\arcsin(\text{th}t), \quad y_{\pm} = \pm 2\text{sech}t. \quad (6)$$

## 2 Melnikov 函数的留数计算法

用 Melnikov 方法可判断扰动系统  $S_\varepsilon, \varepsilon \neq 0$ , 异宿轨道的保持性 (Melnikov 函数有零点) 以及相交的横截性 (Melnikov 函数有简单零点)<sup>[4]</sup>.

按[4]关于同(异)宿分枝的理论及 Melnikov 方法, 沿异宿轨道(6)的 Melnikov 函数可直接表达成

$$M_{\pm}(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} y_{\pm}(t) (-ay_{\pm}(t) + c + b \cos \forall(t + t_0)) dt. \quad (7)$$

这需要计算积分:

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} y_+^2(t) dt, \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} y_+(t) \cos \forall t dt. \quad (8)$$

这是实质性的工作和技巧性很强的工作, 其计算方法在文献中少有具体体现.

引理 2.1  $V = 8, I = 2\pi \text{sech}(\forall\pi/2)$ .

证明 从(5)代入  $h = 2$  得

$$y_+(t) = \sqrt{2(1 + \cos x_+(t))}. \quad (9)$$

从而

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\infty}^{\infty} y_+^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} y_+(t) dx_+(t) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos x)} dx = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{x}{2} dx = \\ &= 4 \sin \frac{x}{2} \Big|_{-\pi}^{+\pi} = 8. \end{aligned} \quad (10)$$

对  $I$  用留数计算法<sup>[11]</sup>, 事实上

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} y_+(t) \cos \forall t dt = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}t \cos \forall t dt = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \forall t}{e^t + e^{-t}} dt. \quad (11)$$

首先, 定义辅助函数

$$f(z) = \frac{e^{i\forall z}}{e^z + e^{-z}}, \quad (12)$$

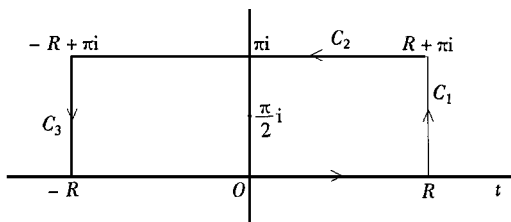
其中  $z$  是复数. 再如图3在复平面上建立积分路径  $C_R, R > 0$  充分大,  $C_R = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ .

显然  $f(z)$  在积分路径  $C_R$  所包围的区域内只有一个奇点  $z_0 = \pi/2$ . 由留数定理<sup>[11]</sup>

$$\begin{aligned} 2\pi i \text{res}(f, z_0) &= \int_{C_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(t) dt + \int_{C_1} f(z) dz + \\ &= \int_{C_2} f(z) dz + \int_{C_3} f(z) dz, \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \int_{C_2} f(z) dz &= \int_{R+\pi i}^{R+\pi i} \frac{e^{i\mathcal{Y}}}{e^z + e^{-z}} dz = \\
 &= - \int_{-R+\pi i}^{R+\pi i} \frac{e^{i\mathcal{Y}}}{e^z + e^{-z}} dz = \\
 &= - \int_{-R}^R \frac{e^{i\mathcal{Y}(t+\pi i)}}{e^t - e^{-t}} dt = \\
 &= e^{-\mathcal{Y}\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{i\mathcal{Y}}}{e^t + e^{-t}} dt = \\
 &= e^{-\mathcal{Y}\pi} \int_{-R}^R f(t) dt.
 \end{aligned}$$

图 3 积分路径  $C_R$ 

由于在  $C_1$  上的复数  $z = R + iy, 0 \leq y \leq \pi$ , 显然

$$|e^z + e^{-z}| = \sqrt{(e^R + e^{-R})^2 \cos^2 y + (e^R - e^{-R})^2 \sin^2 y} \geq e^R - e^{-R},$$

从而

$$|f(z)| = \frac{|e^{i\mathcal{Y}}|}{|e^z + e^{-z}|} \leq \frac{|e^{i\mathcal{Y}R}| |e^{-\mathcal{Y}y}|}{e^R - e^{-R}} \leq \frac{1}{e^R - e^{-R}}, \quad (14)$$

因此

$$\left| \int_{C_1} f(z) dz \right| \leq \left| \int_{-R}^R \frac{1}{e^t + e^{-t}} dt \right| = \frac{\pi}{e^R + e^{-R}} \rightarrow 0, \quad \text{当 } R \rightarrow +\infty \quad (15)$$

同理可证明

$$\left| \int_{C_3} f(z) dz \right| \rightarrow 0, \quad \text{当 } R \rightarrow +\infty \quad (16)$$

此外,  $z_0 = \pi i/2$  是  $f(z)$  的一阶极点, 用留数公式计算得到

$$\begin{aligned}
 \text{res}(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{e^{i\mathcal{Y}}}{e^z + e^{-z}} = \\
 &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{e^{z(1+i\mathcal{Y})}}{e^{2z} + 1} = \lim_{v \rightarrow 0} v \frac{e^{(v+\pi/2)(1+i\mathcal{Y})}}{e^{2v+\pi i} + 1} = \\
 &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{v}{1 - e^{-2v}} e^{(v+\pi/2)(1+i\mathcal{Y})} = \\
 &= - \lim_{v \rightarrow 0} \frac{v}{2v + (2v)^2/2! + o(v^2)} e^{(v+i\pi/2)(1+i\mathcal{Y})} = \\
 &= - \frac{1}{2} e^{(1+i\mathcal{Y})\pi/2} = - \frac{i}{2} e^{-\mathcal{Y}\pi/2}.
 \end{aligned} \quad (17)$$

由(13)得到

$$\pi e^{-\mathcal{Y}\pi/2} = (1 + e^{-\mathcal{Y}\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt,$$

从而

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \frac{\pi e^{-\mathcal{Y}\pi/2}}{1 + e^{-\mathcal{Y}\pi}} = \pi \frac{1}{e^{\mathcal{Y}\pi/2} + e^{-\mathcal{Y}\pi/2}} = \frac{\pi}{2} \text{sech} \left( \frac{\mathcal{Y}\pi}{2} \right). \quad (18)$$

按  $f(z)$  定义并取实部可最后得到

$$I = 4 \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 2\pi \text{sech} \left( \frac{\mathcal{Y}\pi}{2} \right). \quad (19)$$

引理证毕.  $\square$

注意到  $y_+(t)$  是偶函数,  $\int_{-\infty}^{\infty} y_+(t) \sin \mathcal{Y}t dt = 0$ , 由(7)得到

$$\begin{aligned}
 M_+(t_0) = & -a \int_{-\infty}^{\infty} y_+^2(t) dt + c \int_{-\infty}^{\infty} y_+(t) dt + b \int_{-\infty}^{\infty} y_+(t) \cos \forall(t+t_0) dt = \\
 & -aV_+ - cx_+ \Big|_{-\infty}^{\infty} + b \cos \forall t_0 \int_{-\infty}^{\infty} y_+(t) \cos \forall t dt - \\
 & b \sin \forall t_0 \int_{-\infty}^{\infty} y_+(t) \sin \forall t dt = \\
 & -aV_+ - 2\pi c + b \cos \forall t_0,
 \end{aligned}$$

再用上述引理得到关于异宿轨道  $\left\{ (x_+(t), y_+(t)) : -\infty < t < +\infty \right\}$  的 Melnikov 函数

$$M_+(t_0) = -8a + 2\pi c + 2\pi b \operatorname{sech}\left(\frac{\forall \pi}{2}\right) \cos \forall t_0. \quad (21)$$

同理可得到关于异宿轨道  $\left\{ (x_-(t), y_-(t)) : -\infty < t < +\infty \right\}$  的 Melnikov 函数

$$M_-(t_0) = -8a - 2\pi c - 2\pi b \operatorname{sech}\left(\frac{\forall \pi}{2}\right) \cos \forall t_0. \quad (22)$$

### 3 混沌参数分析

通过第 2 节的计算, 我们能够获得如下结论:

定理 3.1 如果参数  $a, b, c$  满足条件

$$\left| \frac{4a - \pi c}{b} \right| < \pi \operatorname{sech}\left(\frac{\forall \pi}{2}\right), \quad (23)$$

则  $\varepsilon > 0$  充分小时扰动系统  $S_\varepsilon$  是马蹄型混沌的.

证明 由(21)知  $M_+(t_0)$  的零点  $t_0$  满足  $\cos \forall t_0 = (8a - 2\pi c) / 2\pi b \operatorname{sech}(\forall \pi / 2)$ , 因而该式右端的绝对值  $\leq 1$  是  $M_+(t_0)$  有零点的充分必要条件. 进而, 为使  $t_0$  是简单零点,  $M_+$  的微商  $M'_+(t_0) \neq 0$ . 这等价于  $\sin \forall t_0 \neq 0$ , 即  $\cos \forall t_0 \neq \pm 1$ . 因此导出的不等式是严格的, 从而给出了(23).

同理, 由(22)知  $M_-(t_0)$  的零点  $t_0$  满足  $\cos \forall t_0 = -(8a + 2\pi c) / 2\pi b \operatorname{sech}(\forall \pi / 2)$ , 类似(23)我们可导出

$$\left| \frac{4a + \pi c}{b} \right| < \pi \operatorname{sech}\left(\frac{\forall \pi}{2}\right). \quad (24)$$

然而, 第 1 节所提出的物理意义限制了  $a, b, c$  非负, 因此(24)条件比(23)强, 不等式(23)才是使 Melnikov 函数有简单零点的基本条件.

Melnikov 函数具有简单零点表明, 系统的 Poincaré 映射的异宿轨道具有横截相交性. 根据 Smale-Birkhoff 定理<sup>[4]</sup>, 横截同(异)宿相交蕴含马蹄型混沌. 定理证毕.  $\square$

在  $a, b, c$  构成的三维参数空间上, 我们对定理 3.1 讨论如下.

情形 A 固定  $c$  而让  $a, b$  变化. 为简便起见, 此时不妨讨论参数  $a'$  和  $b$  的关系,  $a' = 4a - \pi c$ . 易见混沌参数区域在二条直线

$$a' = \pi \operatorname{sech}\left(\frac{\forall \pi}{2}\right) b, \quad a' = -\pi \operatorname{sech}\left(\frac{\forall \pi}{2}\right) b$$

所夹成的锥里, 见图 4 阴影区域, 这是混沌理论中典型的锥形参数区域.

情形 B 固定  $b$  而让  $a, c$  变化. 显然  $b \neq 0$ , 否则从(21)知 Melnikov 函数一定没有简单零点. 此时混沌参数区域在二条直线

$$4a - \pi c = -\pi \operatorname{sech}\left(\frac{\forall \pi}{2}\right) b, \quad 4a - \pi c = \pi \operatorname{sech}\left(\frac{\forall \pi}{2}\right) b$$

所夹成的带域里, 见图 5 阴影区域, 称之为带形参数区域。注意到  $a, b, c$  皆大于 0。

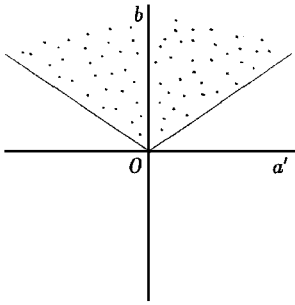


图 4 情形 A 的锥形区域

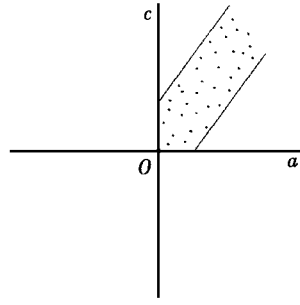


图 5 情形 B 的带形区域

## 4 结 论

根据上述定理我们对实际的电力系统振荡模型(1)总结如下。由第 1 节的模型简化过程, 我们有如下参数关系

$$D / \sqrt{P_s H} = \varepsilon \alpha, P_m / P_s = \varepsilon, P_e / P_s = \varepsilon \beta, \gamma = \beta \sqrt{H / P_s}, \quad (25)$$

其中  $a, b, c \geq 0$ , 而  $0 < \varepsilon \ll 1$  是小参数。从而定理给出的混沌条件(23) 可等价地表示为

$$\frac{|4 \sqrt{P_s / H D} - \pi P_m|}{P_e} < \pi \operatorname{sech} \left[ \beta \sqrt{H / P_s} \frac{\pi}{2} \right]. \quad (26)$$

这表明:

(i) 仅仅只有阻尼而系统无周期性负荷扰动, 系统不会出现混沌。这时扰动功率幅值  $P_e = 0$ , 条件(26) 也不成立。从实验中可以看到, 这时系统处于能量不断耗散的过程。

(ii) 在受到极大的周期性负荷扰动下, 具体地说当扰动功率幅值  $P_e$  超过一定范围时, 系统将出现混沌振荡。这与现场实际运行的经验结果是吻合的。由关系(26) 可以计算出  $P_e$  的阈值为

$$P_e^* = \frac{|4 \sqrt{P_s / H D} - \pi P_m|}{\pi \operatorname{sech}(\beta \sqrt{H / P_s} \pi / 2)}, \quad (27)$$

也就是说, 当  $P_e > P_e^*$  时电力系统(1) 会混沌振荡。

(iii) 在周期性负荷扰动下, 当阻尼系数  $D$  接近数值  $(\pi/4) \sqrt{H / P_s P_m}$  时, 系统将出现混沌振荡。这一结果指出, 在小干扰的情形下电力系统仍可能发生混沌振荡。同理从关系(26) 中可求得  $D$  的阈值为

$$D_-^* = \frac{\pi P_m - \pi \operatorname{sech}(\beta \sqrt{H / P_s} \pi / 2) P_e}{4 \sqrt{P_s / H}}, \quad (28)$$

$$D_+^* = \frac{\pi P_m + \pi \operatorname{sech}(\beta \sqrt{H / P_s} \pi / 2) P_e}{4 \sqrt{P_s / H}}, \quad (29)$$

也就是说, 当  $P_e \neq 0$  且  $D_-^* < D < D_+^*$  时电力系统(1) 会混沌振荡。

这样, 我们就对电力系统(1) 产生混沌振荡的机理和参数条件给出一个定量化的描述。尤其是上述给出的阈值计算公式使我们能够准确地判断混沌振荡发生的可能性, 进而也为我们

建立非线性控制器设计方案以消除电力系统病态振荡奠定了理论基础。

[参 考 文 献]

- [1] 卢强, 孙元章. 电力系统非线性控制[M]. 北京: 科学出版社, 1993.
- [2] Yu Y N. Electric Power System Dynamics [M]. New York: Academic Press, 1983.
- [3] 张卫东, 张伟年. 一个非线性刚体转子振动模型[J]. 动力工程, 1996, 16(增刊): 503~ 508.
- [4] Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields [M]. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [5] Zhang Weinian. Bifurcation of homoclinics in a nonlinear oscillation[J]. Acta Math Sinica, New Series, 1989, 5(2): 170~ 184.
- [6] 肖达川. 线性与非线性电路[M]. 北京: 科学出版社, 1992.
- [7] Lu Qiang(卢强), Sun Yuanzhang(孙元章). Nonlinear stabilizing control of multimachine systems [J]. IEEE Transactions on Power Systems, 1989, 4(1): 236~ 241.
- [8] 卢强, 孙元章, 高景德. 非线性系统几何结构的发展及其在电力系统中的应用[J]. 中国电机工程学报, 1990, 10(1), 电工数学特刊, 15~ 21.
- [9] 袁斌, 孙启宏. 应用分支理论分析电力系统中的复杂振荡现象[J]. 电网技术, 1994, 18(4): 1~ 4.
- [10] 张强, 刘九斌. 电力系统振荡的混沌性态[J]. 南京电力高等专科学校学报, 1995, 7(1): 14~ 18.
- [11] 庄圻泰, 张南岳. 复变函数[M]. 北京: 北京大学出版社, 1984.

## Chaotic Oscillation of a Nonlinear Power System

Zhang Weinian,<sup>1</sup> Zhang Weidong<sup>2</sup>

(1. Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P R China;

2. Chongqing Power College, Chongqing 400053, P R China)

**Abstract:** For a nonlinear power transmission system, the residue calculus method is introduced and applied to study its heteroclinic bifurcation. There a cone region and a strip region of parameters are obtained in which the power transmission system displays chaotic oscillation. This gives a theoretic analysis and a computational method for the purpose to control the nonlinear system with deviation stably running.

**Key words:** power transmission system; nonlinear; heteroclinic bifurcation; chaotic oscillation