应用数学和力学, 第 20 卷 第 9 期(1999 年 9 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 09_0881_08

# Browder 不动点定理的推广及应用

张石生[1], 张 宪[2]

( 1 四川大学 数学系, 成都 610064; 2 集美师范学院 数学系, 福建厦门 361021)

摘要: 研究 Browder 不动点定理, 得到 Browder 不动点定理之一新的推广定理及其几种等价形式 作为应用, 研究了最近点和不动点的存在性问题

关 键 词: 转移开( 闭) 映象; Browder 不动点定理; 转移上( 下) 半连续函数
中图分类号: O177 91 文献标识码: A

## 1 引言及预备知识

1968 年 Browder[1] 证明了下面的定理:

**定理 1 1**( Browder[1]) 设 $E$ 是一 Hausdorff 拓扑线性空间, $X$ 为 $E$ 的紧凸集, $F: X \quad 2^X$ 满足条件:

) 对任一 $x \quad X$, $F(x)$ 是非空凸的;

) 对任一 $y \quad X$, $F^{-1}(y)$ 是 $X$ 中的开集

则在 $X$ 中存在 $F$ 的不动点

由于 Browder 不动点定理在当代非线性分析、变分不等式理论、对策论和经济平衡理论中起到重要的作用 因此, 不少作者对该定理作了进一步的改进和推广( 见[2, 3~ 5] ) 1987 年 Tarafdar 证明了下面的定理

**定理 1 2**( Tarafdar[4]) 设 $E$ 是一 Hausdorff 拓扑线性空间, $X \quad E$ 是一非空凸集, $F: X \quad 2^X$ 满足条件:

) 对任一 $x \quad X$, $F(x)$ 是非空凸的;

) 对任一 $y \quad X$, $F^{-1}(y)$ 包含 $X$ 之一相对开集 $O_y$;

) $X = {}_{x \quad X} O_x$;

) 存在 $X$ 的非空子集 $X_0$ 及紧凸子集 $X_1$, $X_0 \quad X_1$, 使得 $D = {}_{x \quad X_0} (X / O_x)$ 是紧的

则存在 $x_0 \quad X$, 使得 $x_0 \quad T(x_0)$

本文的目的是得出 Browder 不动点定理的一种新的推广形式, 并给出其若干等价形式 作为应用, 我们得到了几个新的最近点定理和不动点定理

为叙述方便, 我们先给出几个定义和符号

**定义 1**[6] 设 $X$, $Y$ 是二拓扑空间, $F: X \quad 2^Y$

收稿日期: 1998_10_05; 修订日期: 1999_05_18
基金项目: 国家自然科学基金资助课题( 19971058)
作者简介: 张石生( 1934~ ) , 男, 教授, 已发表论文 270 余篇, 获省部级奖 6 项.

1) 称 $F$ 是转移开值的, 如果对任一 $x$　$X$ 及任一 $y$　$F(x)$, 存在 $x$　$X$, 使得 $y$　$\mathrm{int}(F(x))$;

2) 称 $F$ 是转移闭值的, 如果对任一 $x$　$X$ 及任一 $y \setminus F(x)$, 则存在 $x$　$X$, 使得 $y \setminus \overline{F(x)}$;

由定义易知下面的结论成立:

命题1 3[7]　) $F: X$　$2^Y$ 是转移开值的, 当而且仅当

$$_{x\quad X} F(x) = {}_{x\quad X} \mathrm{int}(F(x));$$

) $F: X$　$2^Y$ 是转移闭值的, 当而且仅当

$$_{x\quad X} F(x) = {}_{x\quad X} \overline{F(x)};$$

) $F: X$　$2^Y$ 是转移开值的, 当而且仅当映象 $G =$　$Y \setminus F: X$　$2^Y$ 是转移闭值的

定义2　设 $X$, $Y$ 是拓扑线性空间, $: X$　$Y$　$R$,　$R$, 若对任给的 $(x, y)$　$X$　$Y$, 使得 $(x, y) <$　(相应地 $(x, y) >$　), 则存在 $y$　$Y$ 及 $x$ 的邻域 $N(x)$, 使得

$$(z, y) < \quad (\text{相应地} \quad (z, y) > \quad), \quad z \quad N(x)$$

则称 $(x, y)$ 关于 $x$ 是 _转移上(相应地下) 半连续的

由定义易知下面的结论成立:

命题1 4　) 若 $(x, y): X$　$Y$　$R$ 关于 $x$ 是上(下) 半连续的, 则　$R$, $(x, y)$ 关于 $x$ 是 _转移上(下) 半连续的;

) $(x, y)$ 关于 $x$ 是 _转移上(下) 半连续的, 当而且仅当 $y$　$F(y) = \left\{x \quad X: \ (x, y) < \ \right\}$ $(y$ | $F(y) = \left\{x \quad X: \ (x, y) > \ \right\})$ 是转移开值的

定义3　设 $X$ 是一凸集, $f: X$　$R$,　$R$　如果

$$\left\{x \quad X: f(x) < \quad \right\} \qquad (\left\{x \quad X: f(x) > \quad \right\})$$

是凸的, 则称 $f$ 是 _拟凸(凹) 的:

## 2　Browder 不动点定理的推广

定理2 1　设 $E$ 是一Hausdorff 拓扑线性空间, $X$ 是 $E$ 的非空凸子集, $F: X$　$2^X$ 是一映象, 满足条件:

) 对任一 $x$　$X$, $F(x)$ 是非空凸的;

) 映象 $F^{-1}: X$　$2^X$ 是转移开值的;

) 存在 $X$ 的非空紧凸集 $X_0$, 使得

$$D = \left\{x \quad X: x \quad \overline{X \setminus F^{-1}(y)}, \quad y \quad \mathrm{co}(X_0, x)\right\}$$

是相对紧的, 且 $D$　$X$, 其中

$$\mathrm{co}(X_0, x) = \left\{y \quad X: y = \ x + \ a(u - \ x), \quad u \quad X_0, \quad a \quad [0, 1]\right\}$$

则存在 $x_0$　$X$, 使得 $x_0$　$F(x_0)$

证　令 $\mathscr{F}(X)$ 表 $X$ 的一切非空有限子集的族, 对 $A$　$\mathscr{F}(X)$, 记 $K_A =$ $\mathrm{co}(X_0$　$A)$, 则 $K_A$ 是紧的　记

$$D_A = \left\{x \quad X: x \quad \overline{X \setminus F^{-1}(y)}, \quad y \quad \mathrm{co}(K_A, x)\right\}$$

下证: 存在 $A$　$\mathscr{F}(X)$, 使得 $D_A =$

事实上, 如果　$A$　$\mathscr{F}(X)$, $D_A$　　, 于是由

$$D_A \quad D \quad (_{x \quad A} \overline{X \setminus F^{-1}(x)})$$

得知$\left\{D \quad \overline{X \setminus F^{-1}(x)}: x \quad X\right\}$具有限交性质 由$D$相对紧,得知$D \quad (_{x \quad X} \overline{X \setminus F^{-1}(x)})$

故存在$x_0 \quad D \quad X$,使得$x_0 \quad \overline{X \setminus F^{-1}(x)}, \quad x \quad X$ 从而$x_0 \,/\, \mathrm{int}_X(F^{-1}(x)), \quad x \quad X$,这与

$$_{x \quad X}\mathrm{int}_X(F^{-1}(x)) = _{x \quad X}F^{-1}(x) = X$$

相矛盾,从而结论得证

设$A \quad \mathscr{F}(X)$,使得$D_A =$ 记$K = K_A = \mathrm{co}(X_0 \quad A)$,于是对每一$x \quad K$,由$x \,/\, D_A$,故存在$y \quad \mathrm{co}(K_A, x) = K$,使$x \,/\, \overline{X \setminus F^{-1}(y)}$,从而$x \quad \mathrm{int}_X(F^{-1}(y))$ 故知$K \quad _{y \quad K}\mathrm{int}_X(F^{-1}(y))$

现定义$h: K \quad 2^K$, $h(x) = \left\{y \quad K: x \quad \mathrm{int}_X(F^{-1}(y))\right\}$,则对任一$x \quad K$, $h(x)$ ,又定义

$$h: K \quad 2^K, \quad h(x) = \mathrm{co}(h(x)),$$

则对任一$x \quad K$, $h(x)$非空凸,且 $y \quad K$,

$$h^{-1}(y) \quad h^{-1}(y) = K \quad \mathrm{int}_X(F^{-1}(y))$$

因$K \quad \mathrm{int}_X(F^{-1}(y))$是$h^{-1}(y)$中的相对开集,于是由Tarafdar的[3,定理1]知,存在$x_0 \quad K$,使得$x_0 \quad h(x_0) = \mathrm{co}(h(x_0))$,从而存在$\left\{y_1, \quad , y_n\right\} \quad h(x_0)$, $_i \quad 0$, $i = 1, \quad , n$, $\sum_{i=1}^{n} {}_i = 1$,使得$x_0 = \sum_{i=1}^{n} {}_i y_i$ 因$y_i \quad h(x_0)$, $x_0 \quad \mathrm{int}_X(F^{-1}(y_i)) \quad F^{-1}(y_i)$,故$y_i \quad F(x_0)$, $i = 1, \quad , n$,由假设$F(x_0)$是凸的,故$x_0 \quad \mathrm{co}\left\{y_1, \quad , y_n\right\} \quad F(x_0)$,证毕

由定理2 1可得下面的结果

**定理2 2** 设$E$与$X$与定理2 1中的相同,设$G: X \quad 2^X$满足下面的条件:

) 对任一$x \quad X$, $x \quad G(x)$;

) 对任意的$x_1, x_2 \quad X$, $G(\mathrm{co}\left\{x_1, x_2\right\}) \quad G(x_1) \quad G(x_2)$;

) $G$是转移闭值的;

) 存在$X$的非空紧凸集$X_0$,使得集合$D = \left\{y \quad X, y \quad \overline{G(x)}, \quad x \quad \mathrm{co}(X_0, y)\right\}$是相对紧的,且$D \quad X$;

则 $_{x \quad X}G(x)$

证 设相反$_{x \quad X}G(x) =$ ,则对任一$x \quad X$ 存在$y \quad X$,使得$x \setminus G(y)$ 现定义映象

$$F: X \quad 2^X, \quad F(x) = X \setminus G^{-1}(x) \quad (x \quad X)$$

于是$F(x)$ , $x \quad X$ 下证$F(x)$是$X$中的凸集合 事实上,任给$y_1, y_2 \quad F(x)$,故$y_1, y_2 \,/\, G^{-1}(x)$ 从而$x \,/\, G(y_1) \quad G(y_2)$ 由条件 )知$x \,/\, G(\mathrm{co}\left\{y_1, y_2\right\})$ 故$\mathrm{co}\left\{y_1, y_2\right\} \quad G^{-1}(x) =$ 因而$\mathrm{co}\left\{y_1, y_2\right\} \quad F(x)$ 此即$F(x)$是凸集,所要的结论得证

又因$F^{-1}(y) = X \setminus G(y)$,故由 )知$F^{-1}: X \quad 2^X$是转移开集的,且$G(y) = X \setminus F^{-1}(y)$,于是$F$满足定理2 1的所有条件,于是由定理2 1,存在$x_0 \quad F(x_0)$,即$x_0 \,/\, G^{-1}(x_0)$,这与条件 )相矛盾,定理得证

注 定理2 2是一个新的非空交定理,其中的条件 )在拓扑型非空交定理中起到关键性作用[7,8]

定理2 3 设 $E$ 是一Hausdorff 拓扑线性空间, $X$ 是 $E$ 的非空凸集, $G: X \quad 2^X$ 满足条件

) $G$ 是KKM 映象, 即对任一有限集 $\{x_1, \quad , x_n\} \quad X$, $\mathrm{co}\{x_1, \quad , x_n\} \quad \bigcup_{i=1}^{n} G(x_i)$;

) $G$ 是转移闭值的;

) 存在非空紧凸集 $X_0 \quad X$, 使得集合 $D = \{x \quad X: x \quad \overline{G(y)}, \quad y \quad \mathrm{co}(X_0, x)\}$ 是相对紧的, 且 $D \quad X$

则 $\bigcap_{x \quad X} G(x)$

证 设相反, $\bigcap_{x \quad X} G(x) = \quad$, 于是对任一 $x \quad X$, 存在 $y \quad X$, 使得 $x \,/\, G(y)$, 即 $y \,/\, G^{-1}(x)$ 现定义映象

$$F: X \quad 2^X, \quad F(x) = \mathrm{co}\{X \setminus G^{-1}(x)\},$$

则对任一 $x \quad X$, $F(x)$ 是非空凸的

下证 $F^{-1}$ 是转移开值的, 事实上, 对任一 $y \quad X$, 若 $x \quad X \setminus G(y)$, 则 $y \quad X \setminus G^{-1}(x) \quad F(x)$, 从而 $x \quad F^{-1}(y)$ 因而得知 $X \setminus G(y) \quad F^{-1}(y)$ 因 $G$ 是转移闭值的, 故 $y$ । $X \setminus G(y): X \quad 2^X$ 是转移开值的, 且

$$X = \bigcup_{y \quad X}(X \setminus G(y)) = \bigcup_{y \quad X} \mathrm{int}_X(X \setminus G(y)) (\text{由命题1 3之} \quad )$$

$$\bigcup_{y \quad X} \mathrm{int}_X(F^{-1}(y)) \quad \bigcup_{y \quad X} F^{-1}(y) \quad X,$$

从而 $\bigcup_{y \quad X} F^{-1}(y) = \bigcup_{y \quad X} \mathrm{int}_X(F^{-1}(y))$ 再由命题 1 3 之 ) 知 $F^{-1}$ 是转移开值的 又由 $X \setminus F^{-1}(y) \quad G(y)$, 故知 $F$ 满足定理2 1的条件 ) 于是 $F$ 满足定理2 1的所有条件 故存在 $x_0 \quad F(x_0) = \mathrm{co}\{X \setminus G^{-1}(x_0)\}$ 因而存在有限集 $\{y_1, \quad , y_n\} \quad X \setminus G^{-1}(x_0)$, 使得 $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \quad y_i$, 其中 $\quad_i \quad 0, i = 1, \quad , n, \sum_{i=1}^{n} \quad_i = 1$ 由 $y_i \,/\, G^{-1}(x_0), i = 1, \quad , n$, 故 $x_0 \,/\, G(y_i)$ 从而 $x_0 \quad \mathrm{co}\{y_1, \quad , y_n\}$, 但 $x_0 \,/\, \bigcup_{i=1}^{n} G(y_i)$ 这与条件 ) 相矛盾 定理得证

定理2 4 设 $E$ 是Hausdorff 拓扑线性空间, $X$ 是 $E$ 中的非空凸子集, $F: X \quad 2^X$ 满足条件

) $F(x) \quad , \quad x \quad X$;

) $F^{-1}: X \quad 2^X$ 是转移开值的;

) 存在 $X$ 的非空紧凸子集 $X_0$, 使得 $D = \{x \quad X: x \quad \overline{X \setminus F^{-1}(y)}, \quad y \quad \mathrm{co}(X_0, x)\}$ 是相对紧的, 且 $D \quad X$

则存在 $A \quad \mathscr{F}(X)$ 和 $x \quad \mathrm{co}(A)$, 使得 $A \quad F(x)$

证 设结论不成立, 则对任一 $A \;I\; \mathscr{F}(X)$ 及 P$x \;I\; \mathrm{co}(A)$ 都有 $A \quad F(x)$# 于存在 $x \;I\; A$, $x \;I\!\!/\; F(x)$ 或 $x \;I\!\!/\; F^{-1}(x)$# 于是有 $x \;I\; X \setminus F^{-1}(x) < \bigcup_{y I A}(X \setminus F^{-1}(y))$# 故有 $\mathrm{co}(A) < \bigcup_{y I A}(X \setminus F^{-1}(y))$# 定义映象 $G: X \; y \; 2^X$, $G(x) = X \setminus F^{-1}(x)$# 故 $G$ 是一KKM映象, 另外, 易于证明 $G$ 满足定理213的全部条件, 由定理213, 存在 $x_0$ I $X$, 使得 $x_0$ I $G(x)$, P$x \;I\; X$# 从而 $x_0 \;I\!\!/\; F^{-1}(x)$, P$x \;I\; X$# 故 $F(x_0) = \quad$# 这与条件 ) 相矛盾, 定理的结论得证#

定理215 设 $E$ 是一Hausdorff 拓扑线性空间, $X$ 是 $E$ 的非空凸子集, $U: X \;@ X \; y \; R$ 满足条件:

) $\gamma = \sup_{x \in X} \varphi(x, x) < +\infty$;

) 对任给的 $x \in X$, $y \to \varphi(x, y)$ 是 $\gamma$-拟凹的;

) $\varphi(x, y)$ 关于 $x$ 是 $\gamma$-转移下半连续的;

) 存在非空紧凸集 $X_0 \subset X$, 使得集合 $D = \left\{x \in X: \varphi(x, y) \le \gamma,\ \forall y \in \mathrm{co}(X_0, x)\right\}$ 是相对紧的, 且 $\bar{D} \subset X$。

则存在 $x \in X$, 使得 $\varphi(x, y) \le \gamma \quad (\forall y \in X)$。

证 设定理的结论不成立, 则 $\forall x \in X$, 存在 $y \in X$, 使得 $\varphi(x, y) > \gamma$。现定义映象 $F: X \to 2^X$:

$$F(x) = \left\{y \in X: \varphi(x, y) > \gamma\right\} \qquad (x \in X)。$$

则 $F$ 满足定理 2.1 中的一切条件。由定理 2.1 存在 $x_0 \in X$, 使得 $x_0 \in F(x_0)$。从而 $\varphi(x_0, x_0) > \gamma$。这与 $\gamma$ 的定义相矛盾, 定理得证。

最后我们将证明定理 2.1~ 定理 2.5 是相互等价的。

**定理 2.6** 定理 2.1~ 定理 2.5 是彼此等价的。

证 定理 2.1 ⇒ 定理 2.2, 定理 2.1 ⇒ 定理 2.3 ⇒ 定理 2.4, 及定理 2.1 ⇒ 定理 2.5 已分别在定理 2.2, 定理 2.3, 定理 2.4 和定理 2.5 中被证明。因此, 为了证明定理的结论, 只需证明定理 2.2 ⇒ 定理 2.1, 定理 2.4 ⇒ 定理 2.1 及定理 2.5 ⇒ 定理 2.1 即可。

1. 定理 2.2 ⇒ 定理 2.1。如果 $F$ 没有不动点, 现定义

$$G: X \to 2^X,\ G(x) = X \setminus F^{-1}(x) \qquad (x \in X)。$$

则对任一 $x \in X$, $x \in G(x)$。于是 $\forall x_1, x_2 \in X$ 及 $y \in G(\mathrm{co}\{x_1, x_2\})$, 存在 $\alpha, \beta \ge 0$, $\alpha + \beta = 1$, 使得 $y \in G(\alpha x_1 + \beta x_2)$。故 $y \notin F^{-1}(\alpha x_1 + \beta x_2)$, 因而 $\alpha x_1 + \beta x_2 \notin F(y)$。因 $F(y)$ 凸, 必有 $x_1 \notin F(y)$ 或 $x_2 \notin F(y)$。从而 $y \notin F^{-1}(x_1)$ 或 $y \notin F^{-1}(x_1)$。于是有 $y \in G(x_1) \cup G(x_2)$。从而得知 $G(\mathrm{co}\{x_1, x_2\}) \subset G(x_1) \cup G(x_2)$。另外, 易于证明 $G$ 满足定理 2.2 中的其余条件。于是由定理 2.2, 存在 $x_0 \in X$, 使得 $x_0 \in G(x)$, $\forall x \in X$, 即 $x_0 \notin F^{-1}(x)$, $\forall x \in X$, 这表明 $F(x_0) = \varnothing$, 与定理 2.1 的条件 ) 矛盾, 故结论得证。

2. 由 $F(x)$ 的凸性得知定理 2.4 ⇒ 定理 2.1。

3. 定理 2.5 ⇒ 定理 2.1。定义 $\varphi: X \times X \to R$:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 0 & (y \notin F(x)), \\ 1 & (y \in F(x))。\end{cases}$$

若 $F$ 没有不动点, 则 $\forall x \in X$, $\varphi(x, x) = 0$。由定理 2.5, 存在 $x \in X$, 使得 $\varphi(x, y) = 0$, $\forall y \in X$, 即 $F(x) = \varnothing$ 矛盾, 得证。

# 3 应 用

作为应用的例子, 在本节中, 我们应用前节的结果研究最近点和不动点的存在性问题。我们有下面的结果。

**定理 3.1** 设 $E$ 是 Hausdorff 拓扑线性空间, $X$ 是 $E$ 的非空凸子集, $T: X \to 2^E$, $\varphi: X \times X \to R$, $X_0$ 是 $X$ 的紧凸子集且下列条件满足:

) $\forall x \in X$, 函数 $f(x, y) = \varphi(x, x) - \varphi(x, y)$ 关于 $y$ 是 0-拟凹的;

) $f(x, y)$ 关于 $x$ 是 0-转移下半连续的;

) 集 $D=\left\{x\in X: \varphi(x,x)\le \varphi(x,y),\ \forall y\in \mathrm{co}(X_0,x)\right\}$ 是相对紧的, 且 $D\subset X$。

) $\forall x\in X$, 当 $x\notin T(x)$ 时, 存在 $y\in X$, 使得

$$\varphi(x,y)<\varphi(x,x)。$$

则存在 $x_*\in X$, 使得 $x_*\in T(x_*)$, 且

$$\varphi(x_*,x_*)=\inf_{y\in X}\varphi(x_*,y)。\tag{1}$$

证 对 $f$ 应用定理2.5(并注意到此时 $r=0$), 故存存 $x_*\in X$, 满足(1)。 如果 $x_*\notin T(x_*)$, 由条件 ) 存在 $y_*\in X$, 使得 $\varphi(x_*,y_*)<\varphi(x_*,x_*)=\inf_{y\in X}\varphi(x_*,y)$, 矛盾, 由此矛盾得知 $x_*\in T(x_*)$。 证毕。

**定理3.2** 设 $E$ 是 Hausdorff 拓扑线性空间, $X$ 是 $E$ 的凸子集, 设 $\varphi: X\times E\to R$, $T: X\to 2^E$ 满足条件:

) $y\to\varphi(x,y)$ 是凸的;

) $\varphi$ 在 $X\times X$ 上的限制满足定理3.1中的条件 ), );

) 存在非空紧凸集 $X_0\subset X$, 使得

$$D_1=\left\{x\in X: \varphi(x,x)\le\varphi(x,y),\ \forall y\in I_{X_0}(x)\right\}。$$

是相对紧的, 且 $D_1\subset X$, 其中 $I_{X_0}(x)=\left\{y\in E: y=x+a(u-x): a>0,\ u\in X_0\right\}$ 是 $x$ 关于 $X_0$ 的内向集;

) 对任一 $x\in X$, 当 $x\notin Tx$ 时, 存在 $y\in I_X(x)$ 使得

$$\varphi(x,y)<\varphi(x,x)。$$

则 $T$ 在 $X$ 中存在不动点 $x_*$, 使得

$$\varphi(x_*,x_*)=\inf_{y\in X}\varphi(x_*,y)。$$

证 令 $D=\left\{x\in X: \varphi(x,x)\le\varphi(x,y),\ \forall y\in \mathrm{co}(X_0,x)\right\}$。 下证集 $D_1=D$。 设 $x\in D$, 于是 $\forall y=x+a(u-x)\in I_{X_0}(x)$, 其中 $a>0$, $u\in X_0$。 当 $a\le 1$ 时, $y\in\mathrm{co}(X_0,x)$, 因而有

$$\varphi(x,x)\le\varphi(x,y);$$

当 $a>1$ 时, 因 $u=\frac{1}{a}y+\left(1-\frac{1}{a}\right)x\in X_0$, 由条件 ) 知

$$\varphi(x,x)\le\varphi(x,x)\le\frac{1}{a}\varphi(x,y)+\left(1-\frac{1}{a}\right)\varphi(x,x)。$$

从而 $\varphi(x,x)\le\varphi(x,y)$。 这就证明 $x\in D_1$, 从而 $D\subset D_1$。

于是由定理3.1的证明中的前一部份, 得知存在 $x_*\in X$, 使得

$$\varphi(x_*,x_*)=\inf_{y\in X}\varphi(x_*,y)。$$

如果 $x_*\notin T(x_*)$, 由条件 ) 存在 $y_*\in I_X(x_*)$, 使得 $\varphi(x_*,y_*)<\varphi(x_*,x_*)$。 因 $y_*\in I_X(x_*)$, 故存在 $a>0$, $u\in X$, 使得 $y_*=x_*+a(u-x_*)$。 如果 $a\le 1$, 则 $y_*\in X$, 因而 $\varphi(x_*,y_*)<\varphi(x_*,x_*)=\inf_{y\in X}\varphi(x_*,y)$ 这是不可能的。 因而 $a>1$。 于是有 $u=\frac{1}{a}y_*+\left(1-\frac{1}{a}\right)x_*\in X$, 由条件 ) 有

$$\varphi(x_*,u)\le\frac{1}{a}\varphi(x_*,y_*)+\left(1-\frac{1}{a}\right)\varphi(x_*,x_*)<\varphi(x_*,x_*),$$

矛盾, 由此矛盾, 得证 $x_*\in T(x_*)$。 证毕。

定理 313　设 $E$ 是Haussdorff 拓扑线性空间, $X < E$ 是凸集, $T: X\ y\ 2^E$, $U: X\ @E\ y\ R$, $X_0 < X$ 是非空紧凸集, 再设

) $U^*(x, y) = U(x, 2x - y)$ 满足定理 312 中的条件 ), )#

) 集 $D_2 = \left\{x\ I\ X: U(x, x)\ [\ U(x, y), P y\ I\ O_{X_0}(x)\right\}$

是$X$ 中的相对紧集且$D_2 < X$, 其中 $O_{X_0}(x) = \left\{y\ I\ E: y = x - a(u - x), a > 0, u\ I\ X\right\}$是 $x$ 关于$X_0$ 的外向集;

) 对任一$x\ I\ X$, 当 $x\ I\!\!/ T(x)$ 时, 存在 $y\ I\ O_X(x)$ 使得

$$U(x, y) < U(x, x)\#$$

则 $T$ 在$X$ 中存在不动点$x_*\ I\ X$, 使得 $U(x_*, x_*) = \inf\limits_{y\ I\ X} U(x_*, y)\#$

证　先证 $U^*$ 满足定理 312 的条件, 记

$$D_4 = \left\{x\ I\ X: U^*(x, x)\ [\ U^*(x, y), P y\ I\ I_{X_0}(x)\right\}\#$$

$P x\ I\ D_4$ 及 $y = x - a(u - x)\ I\ O_{X_0}(x)$ 有 $x + a(u - x)\ I\ I_{x_0}(x)$ 且

$$U(x, x) = U^*(x, x)\ [\ U^*(x, x + a(u - x)) =$$
$$U(x, x - a(u - x))\#$$

故 $x\ I\ D_2$, 从而 $D_4$ 是相对紧且 $D_4 < X\#$

又对任一$x\ I\ X$, 当$x\ I\!\!/ Tx$ 时, 由条件 ) 存在 $y = x - a_1(u_1 - x)\ I\ O_X$, 使得 $U(x, y) < U(x, x)$, 令 $yc = x + a_1(u_1 - x)\ I\ I_X(x)$, 则有

$$U^*(x, yc) = U(x, y) < U(x, x) = U^*(x, x)\#$$

这就证明了 $U^*$ 满足定理 312 中的全部条件#　故存在 $x_*\ I\ X$, 使得

$$U^*(x_*, x_*) = U(x_*, x_*) = \inf_{y\ I\ X} U^*(x_*, y) = \inf_{y\ I\ X} U(x_*, 2x_* - y)\ [$$
$$U(x_*, 2_* - x_*) = U(x_*, x_*)\#$$

仿定理312 的证明知 $x_*\ I\ T(x_*)\#$　证毕#

定理 314　设 $E$ 是Hausdorff 拓扑线性空间, $X < E$ 是一凸子集, $f: E\ y\ R$, $T: X\ y\ 2^E$ 满足条件:

) $f$ 是连续的凸函数, 且有下界;

) $T$ 是具有非空紧凸值的连续映象;

) 存在 $X$ 的非空紧子集$X_0$, 使得

$$D_3 = \left\{x\ I\ X: \inf_{z\ I\ T(x)} f(x - z)\ [\ \inf_{z\ I\ T(x)} f(y - z), P y\ I\ I_{X_0}(x)\right\}$$

是相对紧的, 且 $D < X\#$

则存在$x\ I\ X$, 使得

$$\inf_{z\ I\ Tx} f(x - z)\ [\ \inf_{z\ I\ Tx} f(y - z), P y\ I\ X\#$$

证　令 $U: X\ @E\ y\ R$:

$$U(x, y) = \inf_{z\ I\ Tx} f(y - z), x\ I\ X, y\ I\ E\#$$

易证函数 $g(x, y) := U(x, x) - U(x, y)$ 满足定理 312 中的条件 ), )#　因而由定理 312, 存在 $x\ I\ X$, 使得

$$U(x, x) = \inf_{y\ I\ X} U(x, y),$$

即
$$\inf_{z\ I\ Tx} f(x - z) = \inf_{y\ I\ X} \inf_{z\ I\ Tx} f(y - z)\# \tag{2}$$

定理证毕#

注 在定理 314 中, 如果取 $f(x) = +x+$, $U(x, y) = d(y, Tx)$, 则得 $d(x, Tx) [ d(y, Tx)$, $P y I X$# 因而定理 314 可视为一般形式的最近点定理#

## [参 考 文 献]


[1] Browder F. The fixed point theory of multivalued mappings in topological vector space[J]. Math Ann, 1968, 177: 183~ 301.

[2] 张石生. 变分不等式和相补问题理论及应用[M]. 上海: 上海科技文献出版社, 1991.

[3] Tarafdar E. On nonlinear variational inequalities[J]. Proc Amer Math Soc, 1977, 67: 95~ 98.

[4] Tarafdar E. A fixed point theorem equivalent to Fan_Knaster_Kuratowski_Mazurkiweicz. s theorem [J]. J Math Anal Appl, 1987, 128: 475~ 479.

[5] Tarafdar E. Five equivalent theorems on a convex subset of a topological vector spaces[J]. Comment Math Univ Carolinae, 1989, 30(2): 323~ 326.

[6] Tian G Q. Generalizations of KKM theorem and the Ky Fan minimax inequality with applications to maximal elements price, equilibrium and complementarity[J]. J Math Anal Appl, 1992, 170: 457~ 471.

[7] Chang Shihsen, Cho Y J, Wu X, Zhang Y. The topological versions of KKM theorem and Fan. s matching theorem with applications[J]. Topological Methods in Nonlinear Anal, 1993, 1: 231~ 245.

[8] Kindler J. Topological intersection theorems[J]. Proc Amer Math Soc, 1993, 117: 1003~ 1011.

[9] Allen G. Variational inequalities, complementarity problems and duality theorem[J]. J Math Anal Appl, 1977, 58: 1~ 10.

[10] Fan Ky. A minimax inequality and applications[A]. In: Shisha O Ed. Inequalities [C]. Academic Press, 1972.

[11] Fan Ky. A generalization of Tychonoff. s fixed point theorem[J]. Math Ann, 1961, 141: 303~ 310.

[12] Fan Ky. Some properties of convex sets related to fixed point theorems[J]. Math Ann, 1984, 266, 519~ 537.


# A Generalization of Browder. s Fixed Point Theorem With Applications


Zhang Shisheng[1], Zhang Xian[2]

(11 Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P R China;
21 Department of Mathematics, Jimei Normal College, Xiamen, Fujian 361021, P R China)



Abstract: The purpose of this paper is to obtain a generalization of the famous Browder. s fixed point theorem and some equivalent forms. As application, these results are utilized to study the existence problems of fixed points and nearest points.



Key words: transfer open(closed) mapping; Browder. s fixed point theorem; transfer upper (lower) semi_continuous function