

文章编号: 1000-0887(1999)09-0889-07

柔性圆环壳在子午面内整体弯曲的 复变量方程及细环壳的一般解*

朱卫平, 黄黔, 郭平

(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

摘要: 在 . . . $\frac{1}{2}\hat{A}\hat{A}^{\pm}$ (E. L. Axelrad) 非轴对称载荷下柔性旋转壳线性方程的基础上, 导出了圆环壳在子午面内整体弯曲的复变量方程和相应的细环壳方程. 该方程可与钱伟长给出了一般解的 . . . $\hat{A}^3\hat{A}, \circ\frac{1}{2}\hat{A}^3$ (V. V. Novozhilov) 轴对称环壳方程相类比. 通过类比, 给出了细环壳在子午面内整体弯曲的一般解. 所给出的解可以用来计算波纹管整弯曲的应力和端面位移.

关键词: 柔性壳; 旋转壳; 圆环壳; 薄壁弯管; 波纹管

中图分类号: O343.2 文献标识码: A

引 言

圆环壳方程复杂求解不易. 自本世纪初起, 陆续有不少学者从事过这方面的研究. 70 年代末, 钱伟长 (1979, 1980)^[1, 2, 3] 从 H. Reissner_E. Meissner (1912, 1915) 的轴对称壳方程出发, 用统一的复变量过程, 分别导出了 F. Tolke (1938), R. A. Clark (1950), 及 . . . $\hat{A}^3\hat{A}, \circ\frac{1}{2}\hat{A}^3$ (V. V. Novozhilov) (1951) 的复变量环壳方程; 证明了它们之间的差别都在 Love_Kirchhoff 薄壳假设条件容许的范围内; 并根据 . . . $\hat{A}^3\hat{A}, \circ\frac{1}{2}\hat{A}^3$ (V. V. Novozhilov) 的方程成功地获得了细环壳和圆环壳的一般解. 钱伟长给出的一般解不仅在环壳内处处收敛而且能方便地处理边界条件. 此后, 黄黔 (1986)^[4, 5] 提出了一个非线性方程组及其数值分析, 给出了轴对称载荷下圆环壳非线性方程的数值解. 关于非轴对称问题, . . . $\frac{1}{2}\hat{A}\hat{A}^{\pm}$ (E. L. Axelrad) (1976, 1987)^[6, 7] 介绍了非轴对称载荷下线性和非线性的旋转壳方程. 在处理方程时, . . . $\frac{1}{2}\hat{A}\hat{A}^{\pm}$ (E. L. Axelrad) 除了采用 Love_Kirchhoff 薄壳假设外, 还引入了柔性壳假设, 大大简化了方程. 柔性壳方程比较符合薄壁弯管、波纹管这类壳体的变形特点. 在求解方程方面, . . . $\frac{1}{2}\hat{A}\hat{A}^{\pm}$ (E. L. Axelrad) 给出了三角级数解; 这种解有周期性和收敛范围, 在处理边界条件时需要另外加入待定的未知函数和常数. 文[8] (1992) 根据 . . . $\frac{1}{2}\hat{A}\hat{A}^{\pm}$ (E. L. Axelrad) 的线性方程用打靶法计算了 S 型波纹管的整体弯曲刚度.

本文从 . . . $\frac{1}{2}\hat{A}\hat{A}^{\pm}$ (Axelrad) 的非轴对称载荷下旋转壳线性方程出发, 导出了在子午面内柔性圆环壳整体弯曲问题的复变量方程和相应的细环壳方程. 该方程与钱伟长给出了一般解的 Novozhilov 型环壳方程类似. 因此, 进一步应用钱伟长的一般解, 获得了本题的解.

* 收稿日期: 1998_09_07; 修订日期: 1999_04_08

作者简介: 朱卫平 (1962~), 男, 博士, 已发表论文 10 余篇, 曾获上海市科技进步奖.

1 柔性旋转壳在子午面内整体弯曲的复变量方程

旋转壳如图 1 所示,壳厚 $h = \text{const}$, 平均旋转半径为 R_m ,

$$\left. \begin{aligned} \xi = \theta = s_1/R, \quad \eta = s_2/b, \quad 1/R_1 = \cos \phi/R, \\ 1/R_2 = (1/b)(d\phi/d\eta), \quad b = \text{const}(b \neq R_2), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

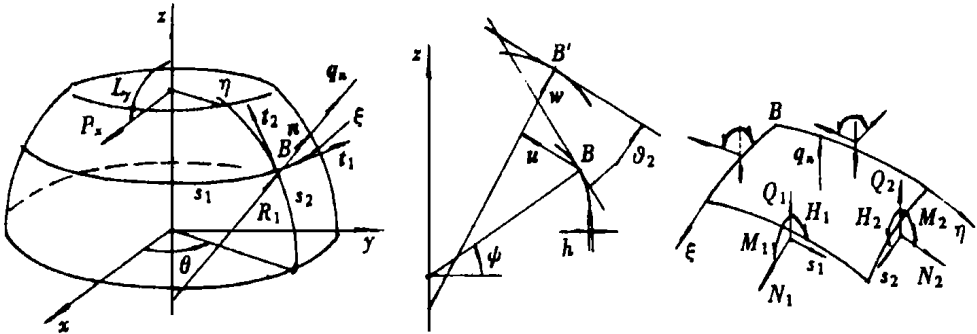


图 1 旋转壳在子午面内整体弯曲

中曲面上任一点的线位移和角位移为

$$u = u t_1 + v t_2 + w n, \quad \vartheta = - \vartheta_2 t_1 + \vartheta_1 t_2 + \omega n \quad (2)$$

设旋转壳的受力关于 $\theta = 0$ 的子午面对称(在该子午面内整体弯曲), L_y 是端面上的总弯矩, P_x 是端面上的总横向力, 法向压力 $q_n = 0$ 。在这种情况下, 壳体中的内力可展开成如下的 Fourier 级数

$$\left. \begin{aligned} [N_1 \quad N_2 \quad M_1 \quad M_2 \quad Q_2] &= \sum_{j=0}^{\infty} [N_1^j \quad N_2^j \quad M_1^j \quad M_2^j \quad Q_2^j] \cos \theta, \\ [S_1 \quad S_2 \quad H_1 \quad H_2 \quad Q_1] &= [S_1^0 \quad S_2^0 \quad H_1^0 \quad H_2^0 \quad Q_1^0] + \\ &\quad \sum_{j=1}^{\infty} [S_1^j \quad S_2^j \quad H_1^j \quad H_2^j \quad Q_1^j] \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式(3)中 $j = 0$ 的项对应于轴对称问题, 在讨论整体弯曲时应该去掉该项。而且, 在小挠度情况下可以认为旋转壳平行圆所在的平面变形后仍保持平面, 因此只需保留 $j = 1$ 的项, 即

$$\left. \begin{aligned} [N_1 \quad N_2 \quad M_1 \quad M_2 \quad Q_2] &= [N_1^1 \quad N_2^1 \quad M_1^1 \quad M_2^1 \quad Q_2^1] \cos \theta, \\ [S_1 \quad S_2 \quad H_1 \quad H_2 \quad Q_1] &= [S_1^1 \quad S_2^1 \quad H_1^1 \quad H_2^1 \quad Q_1^1] \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

类似地, 式(2)中的位移分量和相应的应变分量也可以写成式(4)的形式。

对于薄壳, 根据 Love_Kirchhoff 薄壳假设,

$$\frac{h}{b}, \frac{h}{R}, \frac{hR_m}{R_2R} \ll 1 \quad (5)$$

又设壳体是柔性的, 则

$$\left| \frac{\partial^2 F(\xi, \eta)}{R^2 \partial \xi^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 F(\xi, \eta)}{b^2 \partial \eta^2} \right|, \quad (6)$$

其中 $F(\xi, \eta)$ 代表壳体中的主要应力或应变。式(6)表示: 柔性壳的变形沿 η 轴的变化远大于沿 ξ 轴的变化。这一特性被称为柔性壳的基本假设。它起源于 von Karman (1911) 对薄壁弯管的基本假设, 后来由 E. Reissner (1949, 1950) 推广到壳体理论中(文[7])。

根据文[6], 把形如式(4)的应力和应变分量代入一般旋转壳的平衡方程、物理方程和几何

方程中, 利用式(5)和(6)对方程中的各项进行量级比较和简化, 在边界上按 St. Venant 原理进行处理, 并选取一个复变函数 $V(\eta)$ 作为基本未知量, 整理后得到, 小挠度条件下柔性旋转壳在子午面内整体弯曲的复变量方程

$$\frac{d}{d\eta} \left[r \frac{dV}{d\eta} \right] - V \left[2\alpha^2 \frac{s^2 + 1}{r} - i\mu_0 c \right] = cP_x^0 - \frac{s}{r} L_y^0 \quad (7)$$

上式中, $s = \sin \phi$, $c = \cos \phi$, $V(\eta) = x(\eta) + iT(\eta)$ ($i = \sqrt{-1}$) 是复变函数, 为基本未知量, 其实部 $x(\eta)$ 和虚部 $T(\eta)$ 分别定义为

$$x = \vartheta_2^1 - \frac{u_z^1}{R}, \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} T &= V_1^1 \sqrt{12(1-\nu^2)} / Eh^2, \\ d/b d\phi(RV_1^1) &= RN_1^1 + M_1^1 \cos \phi, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式(8)和(9)中的 ϑ_2^1 , u_z^1 , N_1^1 和 M_1^1 , 如图1和式(2)、(4)所示, 分别为 ϑ_2 , u_z (u_z 是位移分量 u 和 w 在 z 轴上的投影之和), N_1 和 M_1 在 $\theta = 0$ 的子午面上的量。而 α , r , μ , P_x^0 和 L_y^0 定义为

$$\alpha = \frac{b}{R_m}, \quad r = \frac{R}{R_m}, \quad \mu_0 = \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{b^2}{hR_m}, \quad (10)$$

$$P_x^0 = \frac{b^2}{\pi DR_m} P_x, \quad L_y^0 = \frac{b^2}{\pi DR_m^2} L_y \quad \left[D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \right]. \quad (11)$$

相应的内力表达式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_2^1}{D} &= \frac{1}{r} \frac{d(rX)}{bd\eta} - \nu \frac{sX}{R}, \\ \frac{M_1^1}{D} &= \frac{\nu}{r} \frac{d(rX)}{bd\eta} - \frac{sX}{R}, \quad \frac{G^1}{D} = -\frac{1-\nu}{R} X, \\ RN_1^1 &= \frac{K}{\lambda} \frac{d(rT)}{d\eta}, \quad RN_2^1 = -sKT - f_1, \\ RS^1 &= KT, \quad RQ_2^1 = cKT + f_3, \\ \left[H = \frac{H_1 + H_2}{2}, \quad S = S_1 - \frac{H_2}{R_2} = S_2 - \frac{H_1}{R_1} \right], \\ \left[f_1 = \frac{s}{\pi} P_x + \frac{c}{\pi R} L_y, \quad f_3 = \frac{c}{\pi} P_x - \frac{s}{\pi R} L_y, \quad K = \frac{Eh^2}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left[\sigma_1, \sigma_2 \right] = \left[\sigma_1^1, \sigma_2^1 \right] \cos \theta, \quad \left[\sigma_{12}, \sigma_{21} \right] = \left[\sigma_{12}^1, \sigma_{21}^1 \right] \sin \theta, \quad (13)$$

$$\sigma_1^1 = \frac{N_1^1}{h} \pm \frac{6M_1^1}{h^2}, \quad \sigma_2^1 = \frac{N_2^1}{h} \pm \frac{6M_2^1}{h^2}, \quad \sigma_{12}^1 = \frac{S^1}{h} \pm \frac{6H^1}{h^2}. \quad (14)$$

位移表达式

$$\left[\vartheta_2, u_z \right] = \left[\vartheta_2^1, u_z^1 \right] \cos \theta, \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_2^1 &= \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{d(RX)}{R} + \vartheta_2^1(\eta_1), \quad \frac{u_z^1}{R} = - \int_{\eta_1}^{\eta} sX \frac{b}{R} d\eta \\ u_x^1 &= u_r^1 = u_r^1(\eta_1) - \int_{\eta_1}^{\eta} cX b d\eta, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

2 柔性圆环壳在子午面内整体弯曲的复变量方程

圆环壳如图2所示, 壳厚 h 为常数。在式(1), (10)和(11)中, 设 b 为圆环壳的圆环半径,

R_m 为圆环壳的总体半径, $\mu_0 = 2\mu$, 则

$$\left. \begin{aligned} R &= R_m + b \cos \phi, \quad \alpha = \frac{b}{R_m}, \\ r &= \frac{R}{R_m} = 1 + \alpha \cos \phi, \\ \frac{d(\quad)}{d\eta} &= \frac{d(\quad)}{d\phi}, \quad \mu = \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{b^2}{hR_m}, \\ \frac{d}{d\eta} &= \left[r \frac{d}{d\eta} \right] = (1 + \alpha \cos \phi) \frac{d^2 V}{d\phi^2} - \alpha \sin \phi \frac{dV}{d\phi} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

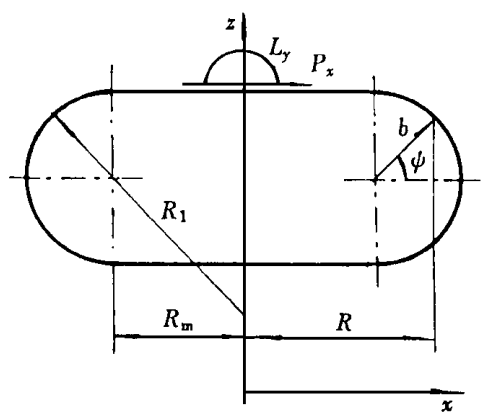


图 2 在子午面内整体弯曲的圆环壳

把式(17)代入方程(7), 我们得到, 柔性圆环壳在子午面内整体弯曲的控制方程

$$\begin{aligned} (1 + \alpha \cos \phi) \frac{d^2 V}{d\phi^2} - \alpha \frac{dV}{d\phi} \sin \phi - V \left[2\alpha^2 \frac{1 + \sin^2 \phi}{1 + \alpha \cos \phi} - 2i\mu \cos \phi \right] = \\ P_x^0 \cos \phi - \frac{\sin \phi}{1 + \alpha \cos \phi} L_y^0, \end{aligned} \quad (18)$$

其中 V, P_x^0, L_y^0, α 和 μ 的定义见式(8), (9), (11) 和(17). 将式(12) 和(16) 作相应的代换可分别得复变量 V 表示的内力和位移.

3 细环壳方程

有些柔性壳, 如薄壁弯管、膨胀节波纹管等, 还有一个共同的特点: 环壳的截面半径 b 和环壳的整体半径 R_m 的比值 α 比 1 小得多, 即

$$\alpha = \frac{b}{R_m} \ll 1. \quad (19)$$

这类问题被称为细环壳问题. 这时可略去方程(18)中的 α , 同时利用式(19) 对式(12)、(16) 进行量级比较略去高阶项, 我们得到,

细环壳的控制方程

$$\frac{d^2 V}{d\phi^2} + 2i\mu \cos \phi V = P_x^0 \cos \phi - L_y^0 \sin \phi. \quad (20)$$

内力表达式

$$\left. \begin{aligned} \frac{bM_2^1}{D} &= \frac{d\text{Re}V}{d\phi}, \quad \frac{bM_1^1}{D} = \nu \frac{d\text{Re}V}{d\phi}, \\ \frac{bH^1}{D} &= -\alpha(1-\nu)\text{Re}V, \\ \frac{bN_1^1}{K} &= \frac{d\text{Im}V}{d\phi}, \quad \frac{bN_2^1}{K} = -\alpha \text{Im}V \sin \phi - \frac{\alpha \nu^0}{2\mu} \cos \phi, \\ \frac{bS^1}{K} &= \alpha \text{Im}V, \quad \frac{bQ_2^1}{K} = \alpha \text{Im}V \cos \phi - \frac{\alpha \nu^0}{2\mu} \sin \phi. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

位移表达式

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_2^1 &= \operatorname{Re} V|_{\phi_1} - \alpha \int_{\phi_1}^{\phi} \operatorname{Re} V \sin \phi d\phi + \vartheta_2^1(\phi_1), \\ \frac{u_z^1}{R} &= -\alpha \int_{\phi_1}^{\phi} \operatorname{Re} V \sin \phi d\phi, \\ u_x^1 &= u_r^1 = u_r^1(\phi_1) - \int_{\phi_1}^{\phi} \operatorname{Re} V \cos \phi b d\phi, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

ϑ_2^1 与角坐标 ϕ 正向(逆时针转动)一致为正,反之为负, ϕ_1 为参考点的纬度。

4 细环壳方程的一般解

方程(20)与钱伟长给出的轴对称细壳方程类似,该方程为(文[1])

$$\frac{d^2 V}{d\varphi^2} + 2i\mu \sin \varphi V = 2\mu P_0 \cos \varphi, \quad (23)$$

为了便于把我们得到的方程和钱伟长给出的方程进行比较,在方程(20)中令 $P_x^0 = 0$, 并且,设 $\phi = \pi/2 - \varphi$, 因而 $L_y^0(\varphi) = -L_y^0(\phi)$, 如图2所示。于是得到

$$\frac{d^2 V}{d\varphi^2} + 2i\mu \sin \varphi V = L_y^0 \cos \varphi, \quad (24)$$

由此可见,只要对方程(23)的解作简单的替换就能得到方程(24)的解。现概述如下,根据方程(23)的非齐次解可得到方程(24)的非齐次解为

$$V^* = -\frac{L_y^0}{\mu} \left\{ A_1 \cos \varphi + A_2 \sin 2\varphi - A_3 \cos 3\varphi - A_4 \sin 4\varphi + A_5 \cos 5\varphi + A_6 \sin 6\varphi - A_7 \cos 7\varphi - A_8 \sin \varphi + \dots \right\}, \quad (25)$$

其中,系数 A_1, A_2, A_3, \dots , 由以下递推公式确定,

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_n}{A_{n-1}} &= \frac{i}{\frac{n^2}{\mu} - i \frac{A_{n+1}}{A_n}}, \quad A_1 = \frac{1}{\frac{1}{\mu} + \frac{2^2}{\mu} + \frac{1}{\frac{3^2}{\mu} + \frac{1}{\frac{4^2}{\mu} + \dots}}}, \\ S_n &\equiv \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{i}{\frac{n^2}{\mu} + \frac{1}{\frac{(n+1)^2}{\mu} + \frac{1}{\frac{(n+2)^2}{\mu} + \dots}}}, \\ A_n &= A_1 S_2 S_3 \dots S_n \quad (n \geq 2). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

容易证明,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0, \quad (27)$$

所以非齐次解 V^* 绝对收敛。 A_n 是 μ 的函数,实际计算时,对一定的 μ , 只要取连分式的有限项即可,先计算 A_1 , 然后逐一求得 A_2, A_3, \dots 。方程(23)和(24)对应的齐次方程相同,可以写成

$$\frac{d^2 V}{d\varphi^2} + \mu(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) V = 0, \quad (28)$$

其解为

$$V^0 = [C'_0 + i\overline{C_0}]e^{-\lambda(\varphi_2 - \varphi)} [f_1(\varphi) + if_2(\varphi)] + [B'_0 + i\overline{B_0}]e^{-\lambda(\varphi - \varphi_1)} [g_1(\varphi) + ig_2(\varphi)], \tag{29}$$

其中 $f_1(\varphi), f_2(\varphi), g_1(\varphi), g_2(\varphi)$ 为三角级数形式的实函数, $C'_0, \overline{C_0}, B'_0, \overline{B_0}$ 为待定的实数. $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2$ 为两条边界, 便于处理边界值问题.

$$f_1(\varphi) = 1 + a_2\cos 2\varphi - b_2\sin 2\varphi + a_4\cos 4\varphi - b_4\sin 4\varphi + \dots \dots + a_{2n}\cos 2n\varphi - b_{2n}\sin 2n\varphi + \dots, \tag{30}$$

$$f_2(\varphi) = a_1\sin \varphi + b_1\cos \varphi + a_3\sin 3\varphi + b_3\cos 3\varphi + \dots \dots + a_{2n+1}\sin(2n+1)\varphi + b_{2n+1}\cos(2n+1)\varphi + \dots,$$

$$g_1(\varphi) = 1 + a_2\cos 2\varphi + b_2\sin 2\varphi + a_4\cos 4\varphi + b_4\sin 4\varphi + \dots \dots + a_{2n}\cos 2n\varphi + b_{2n}\sin 2n\varphi + \dots, \tag{31}$$

$$g_2(\varphi) = a_1\sin \varphi - b_1\cos \varphi + a_3\sin 3\varphi - b_3\cos 3\varphi + \dots \dots + a_{2n+1}\sin(2n+1)\varphi - b_{2n+1}\cos(2n+1)\varphi + \dots,$$

$$a_n = 2\text{Re}C_n/C_0, \quad b_n = 2\text{Im}C_n/C_0 \tag{32}$$

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{-1}{(\lambda + in)^2/\mu - (C_{n+1}/C_n)} \quad (n > 0),$$

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{1}{(\lambda + in)^2/\mu + (C_{n+1}/C_n)} \quad (n < 0), \tag{33}$$

$$C_{-1}/C_0 + (\lambda^2/\mu) - (C_1/C_0) = 0 \quad (n = 0).$$

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{-1}{\frac{(\lambda + i)^2}{\mu} + \frac{1}{\frac{(\lambda + 2i)^2}{\mu} + \frac{1}{\frac{(\lambda + 3i)^2}{\mu} + \dots}}}, \tag{34}$$

$$\frac{C_{-1}}{C_0} = \frac{1}{\frac{(\lambda - i)^2}{\mu} + \frac{1}{\frac{(\lambda - 2i)^2}{\mu} + \frac{1}{\frac{(\lambda - 3i)^2}{\mu} + \dots}}},$$

把式(34)代入方程(33)的第三式, 得

$$\frac{\lambda^2}{\mu} = \frac{-1}{\frac{(\lambda + i)^2}{\mu} + \frac{1}{\frac{(\lambda + 2i)^2}{\mu} + \frac{1}{\frac{(\lambda + 3i)^2}{\mu} + \dots}}} - \frac{1}{\frac{(\lambda - i)^2}{\mu} + \frac{1}{\frac{(\lambda - 2i)^2}{\mu} + \frac{1}{\frac{(\lambda - 3i)^2}{\mu} + \dots}}}, \tag{35}$$

由此方程式可确定 λ 的值. λ 是 μ 的函数, 可以证明 λ 一定是实数. 对一定 μ 值, 可用迭代法求得 λ 也可直接查文[1] 的表.

综上所述, 柔性细环壳在子午面内整体纯弯曲的一般解为

$$V = V^* + V^0 \quad (36)$$

对于横向力 P_x 和弯矩 L_y 联合作用的情况, 只要在非齐次解(25) 中再加一项 $iP_x^0/(2\mu)$ 即可, 有内压作用时, 可以将轴对称问题中只受内压作用的解叠加上去. 求出 V 后, 应力及位移按式(14)、(13)、(22) 和(21) 来计算.

本文给出的解可以用来计算波纹管整弯曲的应力和端面位移^[9]. 也可以作为相应的非线性问题的一级近似解.

[参 考 文 献]

- [1] 钱伟长, 郑思梁. 轴对称圆环壳的复变量方程和轴对称环壳的一般解[J]. 清华大学学报, 1979, 19(1): 27~ 47.
- [2] 钱伟长, 郑思梁. 轴对称圆环壳的一般解[J]. 应用数学和力学, 1980, 1(3): 287~ 299.
- [3] 钱伟长, 郑思梁. 半圆弧波纹管的计算——环壳一般解的应用[J]. 应用数学和力学, 1981, 2(1): 97~ 111.
- [4] 黄黔. 轴对称载荷下旋转壳弹性小应变的轴向任意大挠度问题[J]. 应用数学和力学, 1986, 7(2): 115~ 125.
- [5] 黄黔. 摄动初参数法解轴对称壳几何非线性问题. [J]应用数学和力学, 1986, 7(6): 533~ 543.
- [6] 钱伟长, 郑思梁. 轴对称圆环壳的复变量方程[J]. 应用数学和力学, 1976, 1(3): 287~ 299.
- [7] Axelrad E L. Theory of Flexible Shells[M]. New York: Elsevier Science Publishing Company, Inc, 1987.
- [8] Blazej Skoczen, Jacek Skrzypek. Application of the equivalent column concept to the stability of axially compressed bellows[J]. Int J Mech Sci, 1992, 34(11): 901~ 916.
- [9] Zhu Weiping, Huang Qian, Guo Ping, Chien Weizang. General solution for C-shaped bellows overall bending problems[A]. Proc 2nd ICIWS 1998, Singapore[C]. Oxford England: Elsevier Science Ltd, 1998, 477~ 484.

Complex Equations of Flexible Circular Ring Shells Overall Bending in a Meridian Plane and General Solution for the Slender Ring Shells

Zhu Weiping, Huang Qian, Guo Ping

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Shanghai University, Shanghai 200072, P R China)

Abstract: Complex equations of circular ring shells and slender ring shells overall bending in a meridian plane are presented based on E. L. Axelrad's equations of flexible shells of revolution under asymmetrical loading. It turns out that the equations are analogous to V. V. Novozhilov's equations of symmetrical ring shells, where general solutions have been given by W. Z. Chien. Therefore, by analogy with Chien's solution, a general solution for equations of the slender ring shells is put forward, which can be used to solve bellows overall bending problems.

Key words: flexible shells; shells of revolution; circular ring shells; curved tubes; bellows