应用数学和力学, 第 20 卷 第 9 期(1999 年 9 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 09_0955_07

怎样利用函数 exp(q) 的含参有理逼近构造高阶指数拟合方法*

杨逢建[1], 张爱国[2], 陈新明[3]

(1. 仲恺农业技术学院 基础部, 广州 510225; 2. 湖潭机电专科学校, 湖南湘潭 411101;
3. 五邑大学, 广东 江门 529042)

(林宗池推荐)

摘要: 得到了指数函数 exp(q) 的含双参数 α、β 的(4, 4) 有理逼近的表达式及其为 A_ 可接受的充要条件, 由此构造了精确阶可达 6 至 8 阶的四阶导数单步指数拟合方法与三阶导数混合单步指数拟合方法• 研究了这两种算法的拟合阶及其为 A_稳定的充要条件• 最后讨论了四阶导数方法的中间性与误差界•

关 键 词: 指数拟合方法; 阶; A _稳定性
中图分类号: O24 文献标识码: A

引 言

在自然科学的许多领域(如物理、力学、化学、工程技术) , 出现了大量的刚性微分方程• 为求得这类方程的精度较高的数值解, 需要稳定性很好的高阶方法, 这一问题近年来已成为科技界的一个重要课题•

考虑由 N 个方程组成的一阶刚性常微分方程组

$$\boldsymbol{y}' = f(t, \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y}(a) = \eta \qquad (t \in [a, b]), \tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{y} = ({}^1y, \ {}^2y, \ \cdots, \ {}^Ny)^{\mathrm{T}}$,

$f(t, \boldsymbol{y})$ 是相应的向量函数, η 为常数向量•

设初值问题(1) 的特解为 $F(t)$, 则方程(1) 的时间常数是 Jacobi 矩阵 $\boldsymbol{J}(t) = \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}(t, F(t))$ 的特征值的实部的负倒数• 为考察在 $F(t)$ 的领域内方程的性态, 通常考虑变分方程

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{J}(t)\boldsymbol{y} \tag{2}$$

若 $\boldsymbol{J}(t)$ 是慢变化的, λ 是 $\boldsymbol{J}(t)$ 的单根, 则

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}(0) \cdot e^{\lambda t} \tag{3}$$

将是方程(2) 的一个近似的特征解• 在格点 $\{ t_n = nh, \ h > 0, \ n = 0, 1, \cdots \}$ 上, 解(3) 满足递推式

$$\boldsymbol{y}(t_{n+1}) = e^q \cdot \boldsymbol{y}(t_n), \tag{4}$$

---

* 收稿日期: 1997_09_11; 修订日期: 1999_05_08
基金项目: 机械工业部科技基金资助项目(96252011)
作者简介: 杨逢建(1953~) , 男, 硕士, 副教授, 已发表专著 3 部, 发表论文 30 篇.

其中 $q = \lambda h$• 由此可知, 当 $|q| \ll 1$ 时, 由 $\boldsymbol{y}(t_n)$ 到 $\boldsymbol{y}(t_{n+1})$ 的变化是缓慢的, 而当 $|q| \gg 1$ 时, 由 $\boldsymbol{y}(t_n)$ 到 $\boldsymbol{y}(t_{n+1})$ 的变化是迅速的• 大多数数值求解公式只在前一情形下是精确的• 为得到对较大的步长也比较精确的数值公式, 文[1 ~ 2] 构造了精确阶不超过 2 的一阶导数指数拟合公式和精确阶不超过 4 的二阶导数指数拟合公式• 本文先得到了函数 $\exp(q)$ 的含双参数(4, 4) 有理逼近 $R_4^4(q, \alpha, \beta)$ 的表达式, 证明了当且仅当 $\alpha \geqslant 0$ 且 $\beta \geqslant \dfrac{2}{5}$ 时, 这种有理逼近是 A_可接受的• 接着利用这一结论构造了精确阶可达 6 至 8 阶的四阶导数单步指数拟合方法和三阶导数混合单步指数拟合方法, 研究了这两种算法为 A_稳定的充要条件• 最后讨论了四阶导数公式的中间性与误差界•

1 exp(q) 的双参数(4, 4) 有理逼近及可接受性

设函数 $\exp(q)$ 的有理逼近

$$R_m^n(q) = P_n(q)/Q_m(q) = \sum_{k=0}^{n} a_k q^k \Big\backslash \sum_{k=0}^{m} b_k q^k, \tag{5}$$

其中 $a_0 = b_0 = 1$, $a_k, b_k \in \mathbf{R}$, $k = 1, 2, \cdots$, q 为复变量, $P_n(q)$ 与 $Q_m(q)$ 既约•

定义 1.1 当

$$\exp(q) - R_m^n(q) = C_{p+1} q^{p+1} + O(|q|^{p+2}) \quad (q \to 0)$$

且常数 $C_{p+1} \neq 0$ 时, 称 $R_m^n(q)$ 是 $\exp(q)$ 的 p 阶有理逼近•

定义 1.2 $\exp(q)$ 的有理逼近(5) 称为是 A_可接受的, 如果

$$|R_m^n(q)| \leqslant 1 \quad (\mathrm{Re}\, q < 0)•$$

而该有理逼近称为是 A_0_可接受的, 如果

$$|R_m^n(q)| \leqslant 1 \quad (q < 0),$$

引理 1.1 当 $s \geqslant 2$ 时, $\exp(q)$ 的不低于 $2s - 2$ 阶的含双参数 b_{s-1}, b_s 的有理逼近 $R_s^s(q; b_{s-1}, b_s)$ 的系数由公式

$$b_k = (-1)^k \frac{(2s-2-k)!}{(2s-2)!} C_{s-2}^k + (-1)^{s-k+1} \frac{(2s-2-k)!}{(s-1)!} C_{s-2}^{k-1} \cdot b_{s-1} +$$
$$(-1)^{(s-k+1)} \frac{(2s-2-k)!}{(s-2)!} \cdot (s-1-k) C_{s-1}^{k-1} \cdot b_s \qquad (k = 1, 2, \cdots, s-2),$$
$$a_k = \frac{(2s-2-k)!}{(2s-2)!} C_s^k + (-1)^s \frac{(2s-2-k)!}{(s-1)!} C_{s-1}^{k-1} \cdot b_{s-1} +$$
$$(-1)^s \frac{(2s-2-k)!}{(s-2)!} \left[(s-1) C_{s-1}^{k-1} - C_{s-2}^{k-1}\right] \cdot b_s \qquad (k = 1, 2, \cdots, s-1),$$
$$a_s = \frac{(s-2)!}{(2s-2)!} + (-1)^s \frac{1}{s-1} b_{s-1} + (-1)^s (s-1) b_s$$

确定, 其中 C_r^t 为组合数•

引理 1.1 的证明参见文[3]• 对于这种系数确定的 $\exp(q)$ 的有理逼近的可接受性, 有

引理 1.2 设 $R_s^s(q)$ 是 $\exp(q)$ 的阶 $p \geqslant \max\left\{2s-2, s\right\}$ 的有理逼近, 则下列条件两两等价:

i) $R_s^s(q)$ 是 A_可接受的;

ii) $R_s^s(q)$ 是 A_0_可接受的;

iii) $|a_s| \leqslant |b_s|$, 且对任意 $q \leqslant 0$ 有 $Q_s(q) > 0$•

引理 1.2 的证明参见文[4]•

在引理 1.1 中取 $s = 4$, $b_3 = \frac{1}{120}(5 - 15\beta - 6\alpha)$, $b_4 = \frac{1}{240}(5\beta + \alpha - 2)$, 得 exp(q) 的双参数(4, 4) 有理逼近

$$R_4^4(q;\alpha,\beta) = \frac{1 + \frac{1}{2}(1-\alpha)q + \frac{1}{4}(\beta - \alpha)q^2 + \frac{1}{120}(15\beta - 6\alpha - 5)q^3 + \frac{1}{240}(5\beta - \alpha - 2)q^4}{1 - \frac{1}{2}(1+\alpha)q + \frac{1}{4}(\beta + \alpha)q^2 - \frac{1}{120}(15\beta + 6\alpha - 5)q^3 + \frac{1}{240}(5\beta + \alpha - 2)q^4}. \tag{6}$$

定理 1.1 对任意 α、β ∈ **R**, 由式(6) 确定的 exp(q) 的有理逼近 $R_4^4(q;\alpha,\beta)$ 的逼近阶不低于 6 阶, 当 $\beta = 3/7$ 时不低于 7 阶, 当 $\beta = 3/7$ 且 $\alpha = 0$ 时达到 8 阶. 此外, 当且仅当 $\alpha \geqslant 0$、$\beta \geqslant 2/5$ 时, 这种有理逼近是 A_可接受的.

证 将函数 exp(q) 展开为 Maclaurin 级数, 计算可得

$$\exp(q) - R_4^4(q;\alpha,\beta) = \frac{7\beta - 3}{20160}q^7 + \frac{1}{40320}\left(7\beta - 3 + \frac{\alpha}{5}\right)q^8 + \cdots \tag{7}$$

故由定义 1.1 可得本定理中关于阶的论断. 又由引理 1.2 知 $R_4^4(q;\alpha,\beta)$ 为 A_可接受当且仅当

$$|5\beta - \alpha - 2| \leqslant |5\beta + \alpha - 2|, \quad Q_4(q) > 0, (q \in \mathbf{R}^-). \tag{8}$$

由式(8)、(6) 和引理 1.2 的条件 iii) 知 $5\beta + \alpha - 2 \geqslant 0$, 因此有

$$0 \leqslant 5\beta - \alpha - 2 \leqslant 5\beta + \alpha - 2,$$

或 $$-5\beta + \alpha + 2 \leqslant 5\beta + \alpha - 2, \quad 5\beta - \alpha - 2 \leqslant 0.$$

这两个不等式组的解都是

$$\alpha \geqslant 0, \quad \beta \geqslant \frac{2}{5}.$$

反之, 当 $\alpha \geqslant 0$ 且 $\beta \geqslant 2/5$ 时, 可以证明不等式

$$|5\beta - \alpha - 2| \leqslant |5\beta + \alpha - 2|$$

成立, 且此时多项式 $Q_4(q)$ 中奇次项系数为负而偶次项系数为正, 故有

$$Q_4(q) > 0 \quad (q \in R^-).$$

定理 1.1 证毕.

2 指数拟合公式的构造与稳定性

定义 2.1 一个数值方法称作在复值 λ_0 处是指数拟合的, 如果当该方法以精确的初始条件应用于数值试验问题

$$\boldsymbol{y}' = \lambda_0 \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0 \tag{9}$$

时, 将得到精确的理论解.

以给定的单步方法求解初值问题(9), 由文[5]知数值解满足:

$$y_{n+1} = R(q) \cdot y_n, \tag{10}$$

其中 $R(q)$ 是对函数 exp(q) 的有理逼近.

引理 2.1 一种单步方法是 A_稳定或 A_0_稳定的充要条件分别是相应的有理逼近 $R(q)$ 是 A_可接受的或 A_0_可接受的.

引理 2.1 的证明参见文[6].

设方法在 $q = q_0 = \lambda_0 h$ 处是指数拟合的, 比较式(4) 与(10) 有

$$R(q_0) = \exp(q_0),$$

令

$$\varepsilon(q) = R(q) - \exp(q) \cdot \tag{11}$$

定义 2.2　一个算法称作在 $q = q_0$ 处为 ϕ 阶指数拟合的, 如果 q_0 是 $\varepsilon(q)$ 的 $\phi + 1$ 重零点•

构造如下四阶导数方法:

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n = {} & \frac{h}{2}[(1-\alpha)y_n' + (1+\alpha)y_{n+1}'] + \frac{h^2}{4}[(\beta-\alpha)y_n'' - (\beta+\alpha)y_{n+1}'] + \\ & \frac{h^3}{120}[(15\beta - 6\alpha - 5)y_n''' + (15\beta + 6\alpha - 5)y_{n+1}'''] + \\ & \frac{h^4}{240}[(5\beta - \alpha - 2)y_n^{(4)} - (5\beta + \alpha - 2)y_{n+1}^{(4)}] \cdot \end{aligned} \tag{12}$$

和如下三阶导数混合单步法:

$$\left.\begin{aligned} y_{n+1} - y_n = {} & \frac{7h}{30}(y_n' + y_{n+1}') + \frac{h^2}{60}(y_n'' - y_{n+1}'') + \frac{h^3}{120}(y_n''' + y_{n+1}''') + \\ & \frac{8h}{15}f(t_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}), \\ y_{n+\frac{1}{2}} = {} & \frac{1}{16}[(8 - 15\alpha)y_n + (8 + 15\alpha)y_{n+1}] + \frac{h}{32}[(15\beta - 15\alpha - 1)y_n' - \\ & (15\beta + 15\alpha - 1)y_{n+1}'] + \frac{h^2}{64}[(15\beta - 6\alpha - 6)y_n'' + \\ & (15\beta + 6\alpha - 6)y_{n+1}''] + \frac{h^3}{128}[(5\beta - \alpha - 2)y_n'' - (5\beta + \alpha - 2)y_{n+1}'''] \cdot \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

用以上两种算法求解问题(9), 可知数值解满足

$$y_{n+1} = R_4^4(q; \alpha, \beta) y_n,$$

其中 $R_4^4(q; \alpha, \beta)$ 由式(6) 确定•　故由定理 1.1 和引理 2.1 有

定理 2.1　对参数 α、β 的任意值, 由公式(12) 和公式(13) 确定的算法不低于 6 阶, 当 $\beta = 3/7$ 时不低于 7 阶, 当 $\beta = 3/7$ 且 $\alpha = 0$ 时达到 8 阶, 此外, 这两类算法为 A_稳定的充要条件是 $\alpha \geqslant 0$ 且 $\beta \geqslant 2/5$•

为得到指数拟合公式, 令

$$R_4^4(q; \alpha, \beta) = \exp(q),$$

可得

$$\frac{240 + 120(1-\alpha)q + 60(\beta-\alpha)q^2 + 2(15\beta - 6\alpha - 5)q^3 + (5\beta - \alpha - 2)q^4}{240 - 120(1+\alpha)q + 60(\beta+\alpha)q^2 - 2(15\beta + 6\alpha - 5)q^3 + (5\beta + \alpha - 2)q^4} = \exp(q) \cdot \tag{14}$$

由式(7) 知在 $q = 0$ 处, 算法(12) 与(13) 的拟合阶均不低于6 阶•　此外, 任取两个非零复数 q_1、q_2, 分别代入式(14) 得到关于 α、β 的方程组, 由此可解出

$$\alpha = \alpha(q_1, q_2), \quad \beta = \beta(q_1, q_2) \cdot \tag{15}$$

将此 α、β 值代入算法(12) 与(13), 得到在点 q_1 与 q_2 处拟合阶 $\phi = 0$ 的算法•　特别, 当 q_1 与 q_2 均为实数时, 式(15) 为实数解•　适当选取 q_1 与 q_2 使 $\alpha \geqslant 0$、$\beta \geqslant 2/5$, 可得稳定的指数拟合公式•

为讨论简单, 下面只保留一个参数•　在式(14) 中令 $\alpha = 0$, 得

$$\beta=\frac{2q^4+10q^3-120q-240+(240-120q+10q^3-2q^4)\cdot\exp(q)}{60q^2+30q^3+5q^4-(60q^2-30q^3+5q^4)\cdot\exp(q)}. \tag{16}$$

故当 $\alpha=0$, β 由式(16) 确定时, 对任意非零复数 q, 算法(12) 与(13) 均为点 q 处的指数拟合方法, 拟合阶 $\phi=0$. 下面讨论这两种指数拟合公式的稳定性, 先考虑 $q\in R^-$ 的情形. 令

$$M(q)=60q^2+30q^3+5q^4-(60q^2-30q^2+5q^4)\cdot\exp(q)=q^2f(q). \tag{17}$$

易算得

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=0,$$
$$f'''(q)=-5q^2\cdot\exp(q)<0\qquad(q\in R^-)$$

由 $f'''(q)<0(q<0)$ 及 $f''(0)=0$ 知 $f''(q)>0$, $q\in R^-$. 类似地, 由 $f''(q)>0$ 与 $f'(0)=0$ 有 $f'(q)<0$, $q\in R^-$. 用类似的方法知 $f(q)>0$, $q\in R^-$, 故有

$$M(q)>0\quad(q\in R^-), \tag{18}$$

由式(16), (17), (18) 知当 $q\leqslant 0$ 时, 条件 $\beta\geqslant 2/5$ 等价于

$$120+60q+12q^2+q^3\leqslant(120-60q+12q^2-q^3)\cdot\exp(q). \tag{19}$$

令

$$g(q)=120+60q+12q^2+q^3-(120-60q+12q^2-q^3)\cdot\exp(q). \tag{20}$$

易得

$$g(0)=g'(0)=g''(0)=g'''(0)=0,$$
$$g^{(4)}(q)=q^3\cdot\exp(q)<0\quad(q\in R^-).$$

由此并利用与上面相同的方法可得

$$g(q)<0\quad(q\in R^-). \tag{21}$$

即当 $q\leqslant 0$ 时, 不等式(19) 成立, 故 $\beta\geqslant 2/5$. 由定理 2.1、引理 2.1、定义 1.1 与引理 1.2 知此时算法(12) 与算法(13) 均为 A_稳定的.

综合上述讨论, 有下面的结论:

定理 2.2　当 $\alpha=0$、β 由式(16) 给出时, 对任意 $q\in\mathbf{C}$, 算法(12) 与算法(13) 均为点 q 处的指数拟合方法. 当 $q\neq 0$ 时拟合阶 $\phi=0$, 当 $q=0$ 时 $\phi\geqslant 6$. 并且, 这两种指数拟合方法均为 A_稳定的.

3　中间性与误差界

对于一般的四阶导数公式:

$$\begin{aligned}&y_{n+1}-y_n-h\cdot(c_1y'_{n+1}+c_2y'_n)+h^2(c_3y''_{n+1}-c_4y''_n)-\\&\quad h^3(c_5y'''_{n+1}+c_6y'''_n)+h^4(c_7y^{(4)}_{n+1}-c_8y^{(4)}_n)=0,\end{aligned} \tag{22}$$

其系数向量为(参见文[5]):

$$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,c_7,c_8). \tag{23}$$

特别, 函数 exp(q) 的 pad 逼近对应的四阶导数公式($\alpha=0$, $\beta=3/7$) 和在 t_n 处对解作向后 Taylor 展开对应的四阶导数公式的系数向量分别为

$$\boldsymbol{s}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{28},\frac{3}{28},\frac{1}{84},\frac{1}{84},\frac{1}{1680},\frac{1}{1680}\right), \tag{24}$$

$$\boldsymbol{b}=\left(1,0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{6},0,\frac{1}{24},0\right), \tag{25}$$

定义 3.1　算法(22) 称为是中间的, 如果有

$$\min\left\{s_j, b_j\right\} \leqslant c_j \leqslant \max\left\{s_j, b_j\right\} \quad (j = 1, 2, \cdots, 8), \tag{26}$$

这里 s_j、b_j、c_j 分别是向量$\boldsymbol{s}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的第j 个分量•

定理 3.1　算法(12) 为中间的充要条件是

$$\left.\begin{aligned} &5\beta - 2\alpha \geqslant \frac{5}{3}, \\ &5\beta + \alpha \geqslant \frac{15}{7}, \\ &2 \leqslant 5\beta - \alpha \leqslant \frac{15}{7} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

成立• 特别, 当 $\alpha = 0$ 时, 这种算法是中间的充要条件是 $\beta = 3/7$•

证　算法(12) 对应的系数向量为

$$\boldsymbol{c} = \left(\frac{1+\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}, \frac{\beta+\alpha}{4}, \frac{\beta-\alpha}{4}, \frac{15\beta+6\alpha-5}{120}, \frac{15\beta-6\alpha-5}{120}, \frac{5\beta+\alpha-2}{240}, \frac{5\beta-\alpha-2}{240}\right)• \tag{28}$$

由式(24)、(25)、(26) 和(28), 得一个由 16 个不等式组成的不等式组, 化简得:

$$\left.\begin{aligned} &0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \quad \frac{3}{7} \leqslant \beta + \alpha \leqslant 2, \\ &0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant \frac{3}{7}, \quad \frac{15}{7} \leqslant 5\beta + 2\alpha \leqslant \frac{25}{3}, \\ &\frac{5}{3} \leqslant 5\beta - 2\alpha \leqslant \frac{15}{7}, \quad \frac{15}{7} \leqslant 5\beta + \alpha \leqslant 12, \\ &2 \leqslant 5\beta - \alpha \leqslant \frac{15}{7} \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

可以证明此不等式组等价于条件(27)• 特别, 当 $\alpha = 0$时, (27) 的解为$\beta = 3/7$• 定理3.1证毕•

推论 3.1　当 $\alpha = 0$时, 算法(12) 为点q 处的指数拟合的中间方法的充要条件是q 满足方程:

$$(1680 + 180q^2 + q^4) \cdot (\exp(q) - 1) = (840 + 20q^2) \cdot q \cdot (\exp(q) + 1)$$

定理 3.2　若形如(12) 的算法为中间公式, 则其局部截断误差按估计式

$$| e(t) | \leqslant \frac{107}{560} h^5 \cdot \max_{0 \leqslant \theta \leqslant 1} | y^{(5)}(t + \theta h) | \tag{30}$$

是一致有界的•

证　设 $y(t)$ 为方程(1.1) 的精确解, 考虑恒等式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}(t) = {} & \boldsymbol{y}(t+h) - \boldsymbol{y}(t) - \frac{h}{2}\left[(1+\alpha)\boldsymbol{y}'(t+h) + (1-\alpha)\boldsymbol{y}'(t)\right] + \frac{h^2}{4}[(\beta+\alpha) \times \\ & \boldsymbol{y}''(t+h) - (\beta-\alpha)\boldsymbol{y}''(t)] - \frac{h^3}{120}[(15\beta+6\alpha-5)\boldsymbol{y}'''(t+h) + (15\beta-6\alpha- \\ & 5)\boldsymbol{y}'''(t)] + \frac{h^4}{240}[(5\beta+\alpha-2)\boldsymbol{y}^{(4)}(t+h) - (5\beta-\alpha-2)\boldsymbol{y}^{(4)}(t)] \end{aligned}$$

利用分部积分法可以证明局部截断误差为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}(t) = {} & h^5 \cdot \int_0^1 \left(\frac{1}{24}\theta^4 + \frac{\alpha-1}{12}\theta^3 + \frac{\beta-\alpha}{8}\theta^2 - \frac{15\beta-6\alpha-5}{120}\theta + \right. \\ & \left. \frac{5\beta-\alpha-2}{240}\right) \boldsymbol{y}^{(5)}(t+\theta h)\, d\theta \end{aligned} \tag{31}$$

由中间性条件有

$$-1 \leqslant \alpha - 1 \leqslant 0, \quad 0 \leqslant 15\beta - 6\alpha - 5 \leqslant \frac{10}{7},$$
$$0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant \frac{3}{7}, \quad 0 \leqslant 5\beta - \alpha - 2 \leqslant \frac{1}{7}.$$

故

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{e}(t)| \leqslant & \frac{h^5}{240}\int_0^1 |10\theta^4 + 20(\alpha - 1)\theta^3 + 30(\beta - \alpha)\theta^2 - \\ & 2(15\beta - 6\alpha - 5)\theta + 5\beta - \alpha - 2| \cdot |\boldsymbol{y}^{(5)}(t + \theta h)|\,\mathrm{d}\theta \leqslant \\ & \frac{1}{240}h^5 \cdot \int_0^1 \left(10 + 20 + 30 \times \frac{3}{7} + 2 \times \frac{10}{7} + \frac{1}{7}\right) \cdot |\boldsymbol{y}^{(5)}(t + \theta h)|\,\mathrm{d}\theta, \end{aligned}$$

由此可得不等式(30),定理证毕.

[参 考 文 献]

[1] Liniger W. Global accuracy and A_stability of one and two_step integration formulae for stiff ordinary differential equations[A]. In: John, L. Morris Ed. Conference on Numerical Solution of Differential Equations[C], Dundee: Springer_Verlag, 1969, 188~193.

[2] Liniger W, Willoughby R A. Efficient integration methods for stiff systems of ordinary differential equations[J]. SIAM J Numer Anal, 1970, **7**(1): 47~66.

[3] 杨逢建. 怎样求函数 exp(q)的有理逼近[J]. 湘潭师范学院学报, 1990, **10**(3): 24~32.

[4] 李寿佛, 杨逢建. 函数 exp(q) 的可接受有理逼近[J]. 计算数学, 1992, **14**(4): 480~488.

[5] 袁兆鼎, 费景高, 刘德贵. 刚性常微分方程初值问题的数值解法[M]. 北京: 科学出版社, 1987.

[6] Lambert J D. Computational Methods in Ordinary Differential Equations[M]. New York: Wiley, 1973.

On Construction of High Order Exponentially Fitted Methods Based on Parameterized Rational Approximations to exp(q)

Yang Fengjian[1], Zhang Aiguo[2], Chen Xinming[3]

(1. Zhongkai Agrotechnical College, Guangzhou 510225, P R China;

2. Xiangtan Institute of Machinery and Electricity, Xiangtan, Hunan 411101, P R China;

3. Department of Mathematics and Physics, Wuyi University, Jiangmen, Guangdong 529042, P R China)

Abstract: By the discussion of the formula and properties of (4, 4) parametric form rational approximation to function exp(q), the fourth order derivative one_step exponentially fitted method and the third order derivative hybrid one_step exponentially fitted method are constructed, their order p satisfying $6 \leqslant p \leqslant 8$. The necessary and sufficient conditions for the two methods to be A_stable are given. Finally, for the fourth order derivative method, the error bound and the necessary and sufficient conditions for it to be median are discussed.

Key words: exponentially fitted method; order; A_stability