

文章编号: 1000-0887(1999)08-0776-07

# 一类非线性动力系统混沌运动的研究<sup>\*</sup>

韩 强<sup>1</sup>, 张善元<sup>2</sup>, 杨桂通<sup>2</sup>

(1. 华南理工大学 交通学院 力学系, 广州 510641; 2. 太原工业大学 应用力学研究所, 太原 030024)

摘要: 讨论了含二次和三次非线性项的受迫振动系统  $\ddot{T} - \lambda_1 T + \lambda_2 T^2 + \lambda_3 T^3 = \varepsilon(g \cos \omega t - \dot{\varepsilon} T)$  的混沌运动, 利用 Melnikov 函数法给出了发生混沌的临界条件, 结合相平面轨迹、时程曲线和 Poincaré 映射判定系统是否发生混沌。

关键词: 混沌; Melnikov 函数法; 相平面轨迹; 时程曲线; Poincaré 映射

中图分类号: O343.5 文献标识码: A

## 引 言

近几年来, 非线性动力系统的混沌运动越来越受到了人们的广泛关注<sup>[1~3]</sup>, 人们已将混沌运动视为非线性振动理论研究对象的自然延伸。在物理、力学和许多其它领域的非线性振动问题中, 有许多非线性振动的控制方程可用 Duffing 方程表示, 因此, 人们对 Duffing 方程进行了广泛而深入的研究, 对 Duffing 方程的混沌运动有了越来越深入的了解和认识<sup>[4]</sup>。本文则讨论了含二次和三次非线性项的受迫振动系统  $\ddot{T} - \lambda_1 T + \lambda_2 T^2 + \lambda_3 T^3 = \varepsilon(g \cos \omega t - \dot{\varepsilon} T)$  的混沌运动, Duffing 方程可以视为这一非线性动力方程的特殊情形, 同时, 它代表着许多非线性振动的控制方程<sup>[5]</sup>。本文利用 Melnikov 函数法给出了这一非线性动力方程发生混沌的临界条件, 结合相平面轨迹、时程曲线和 Poincaré 映射判定系统是否发生混沌, 对此类非线性动力系统的混沌运动做了一些有益的探讨。

## 1 混沌发生的临界条件

考虑方程:

$$\ddot{T} - \lambda_1 T + \lambda_2 T^2 + \lambda_3 T^3 = \varepsilon(g \cos \omega t - \dot{\varepsilon} T) \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0), \quad (1)$$

式中  $\varepsilon$  为一小量。方程(1)和 Duffing 方程比较类似, 只是其中有一个二次非线性项, 它对应的动力系统为:

$$\begin{cases} \dot{y} = T, \\ \dot{T} = \lambda_1 T - \lambda_2 T^2 - \lambda_3 T^3 + \varepsilon(g \cos \omega t - \dot{\varepsilon} T). \end{cases} \quad (2)$$

这个动力系统对应的无扰动系统是:

$$\ddot{T} - \lambda_1 T + \lambda_2 T^2 + \lambda_3 T^3 = 0, \quad (3)$$

它有一个首次积分, 即:

\* 收稿日期: 1997.08.13; 修订日期: 1999.01.27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19672038), 山西省留学回国人员基金资助项目(97A1)

作者简介: 韩强(1963~), 男, 教授, 博士, 发表论文 40 余篇。

$$\frac{1}{2}T^2 - \frac{1}{2}\lambda_1 T^2 + \frac{1}{3}\lambda_2 T^3 + \frac{1}{4}\lambda_3 T^4 = H, \tag{4}$$

对于不同的  $H$  值, 它代表相平面上不同的曲线,  $H$  值由振动的初始条件确定. 由无扰动系统确定的动力系统又可写为:

$$\begin{cases} \dot{y} = T^2, \\ \dot{T} = \lambda_1 T - \lambda_2 T^2 - \lambda_3 T^3. \end{cases} \tag{5}$$

令  $y = \dot{y} = 0$ , 可求出无扰动系统的三个不动点分别为:

$$O(0, 0), A\left[\frac{-\lambda_2 - \sqrt{\lambda_2^2 + 4\lambda_1\lambda_3}}{2\lambda_3}, 0\right], B\left[\frac{-\lambda_2 + \sqrt{\lambda_2^2 + 4\lambda_1\lambda_3}}{2\lambda_3}, 0\right],$$

其中  $O(0, 0)$  为双曲型不动点, 另外二个分别位于坐标原点的两侧, 是稳定的不动点.

$$\text{取: } \xi_1 = \frac{-\lambda_2 - \sqrt{\lambda_2^2 + 4\lambda_1\lambda_3}}{2\lambda_3} < 0, \xi_2 = \frac{-\lambda_2 + \sqrt{\lambda_2^2 + 4\lambda_1\lambda_3}}{2\lambda_3} > 0, \tag{6}$$

由此可见, 无扰动系统存在三个不动点的条件是:

$$\begin{cases} H \geq \frac{1}{2}\lambda_1\xi_1^2 + \frac{1}{3}\lambda_2\xi_1^3 + \frac{1}{4}\lambda_3\xi_1^4, \\ H \geq \frac{1}{2}\lambda_1\xi_2^2 + \frac{1}{3}\lambda_2\xi_2^3 + \frac{1}{4}\lambda_3\xi_2^4. \end{cases} \tag{7}$$

现在来求无扰动动力系统的同宿运动, 为此取  $H = 0$ , 由(4)式:

$$T^* = \pm \sqrt{\lambda_1 T^{*2} - \frac{2}{3}\lambda_2 T^{*3} - \frac{1}{2}\lambda_3 T^{*4}} \tag{8}$$

$$\text{即 } \int \frac{dT^*}{T^* \sqrt{\lambda_1 - \frac{2}{3}\lambda_2 T^* - \frac{1}{2}\lambda_3 T^{*2}}} = \pm t + C_1, \tag{9}$$

其中  $C_1$  为常量. 积分即得同宿轨道为:

$$-\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{\lambda_1 - (2/3)\lambda_2 T^* - (1/2)\lambda_3 T^{*2}} + \sqrt{\lambda_1}}{T^*} - \frac{\lambda_2}{3\sqrt{\lambda_1}} \right| = C_1 \pm t \tag{10}$$

$$\text{或 } \left| \frac{\sqrt{\lambda_1 - (2/3)\lambda_2 T^* - (1/2)\lambda_3 T^{*2}} + \sqrt{\lambda_1}}{T^*} - \frac{\lambda_2}{3\sqrt{\lambda_1}} \right| = C_2 e^{\pm \sqrt{\lambda_1} t}. \tag{11}$$

图 1 是无扰动系统相平面的轨迹.

当  $H < 0$  时, 得绕  $A, B$  二点的两闭轨道, 代表在稳定平衡位置附近的振动; 当  $H$  增大时, 振动的周期增大. 当  $H > 0$  时, 代表另一类型的周期性振动. 定义 Melnikov 函数为:

$$M(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} T^* \cdot \phi(T^*, T^*, \omega(t + \tau)) dt, \tag{12}$$

$$\text{其中 } \phi = \phi(T, T^*, \omega) = g \cos \omega t - \dot{\epsilon} T^*, \tag{13}$$

$$\text{故 } M(\tau) = -\dot{\epsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} T^{*2} dt + g \int_{-\infty}^{+\infty} T^* \cos \omega(t + \tau) dt. \tag{14}$$

其中第一个积分表示同宿轨道围成的面积, 显然同宿轨道关于  $T$  轴对称. 在(4)式中取  $H = T^2 = 0$ , 可得  $C, D$  二点坐标(如图 1 所示).

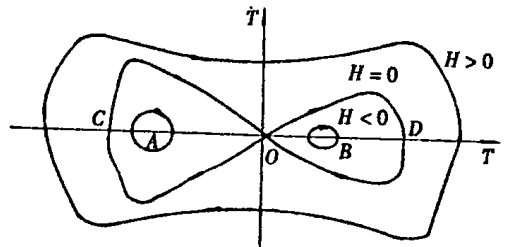


图 1 相平面轨迹

$$\begin{cases} a = \frac{-\frac{2}{3}\lambda_2 - \sqrt{\frac{4}{9}\lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_3}}{\lambda_3} < 0, \\ b = \frac{-\frac{2}{3}\lambda_2 + \sqrt{\frac{4}{9}\lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_3}}{\lambda_3} > 0, \end{cases} \quad (15)$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} T^{*2} dt = \int_a^b T^{*2} dT^* = - \int_a^0 T^* \sqrt{\lambda_1 - \frac{2}{3}\lambda_2 T^* - \frac{1}{2}\lambda_3 T^{*2}} dT^* + \int_0^b T^* \sqrt{\lambda_1 - \frac{2}{3}\lambda_2 T^* - \frac{1}{2}\lambda_3 T^{*2}} dT^*. \quad (16)$$

经过繁琐的积分运算, 有:

$$\int_{-\infty}^{\infty} T^{*2} dt = \frac{4}{3\lambda_3} \left[ \lambda_1^{3/2} + \frac{\lambda_2^2 \sqrt{\lambda_1}}{3\lambda_3} + \lambda_2 \cdot \frac{2\lambda_2^2 + 9\lambda_1\lambda_3}{9\lambda_3 \sqrt{2\lambda_3}} \arcsin \frac{\sqrt{2}\lambda_2}{\sqrt{2\lambda_2^2 + 9\lambda_1\lambda_3}} \right]. \quad (17)$$

注意到由式(11)给出的同宿轨道又可表为:

$$T^* = \frac{2C_2 \sqrt{\lambda_1} e^{\pm \sqrt{\lambda_1} t}}{\left[ C_2 e^{\pm \sqrt{\lambda_1} t} + \frac{\lambda_2}{3\sqrt{\lambda_1}} \right]^2 + \frac{1}{2}\lambda_3}, \quad (18)$$

其中  $C_2$  为常数, 由初始条件确定. 例如, 初始条件为:  $T^*(0) = 0, T'(0) = b > 0$ , 则由式(11) 不难确定:

$$C_2 = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{b} - \frac{\lambda_2}{3\sqrt{\lambda_1}} > 0. \quad (19)$$

现在来考虑式(14)中的第二个积分:

$$\int_{-\infty}^{\infty} T^{*2} \cos \omega(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega(t + \tau) dT^* = 2C_2 \sqrt{\lambda_1} \omega \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{\lambda_1} t} \sin \omega(t + \tau)}{\left[ C_2 e^{\sqrt{\lambda_1} t} + \frac{\lambda_2}{3\sqrt{\lambda_1}} \right]^2 + \frac{1}{2}\lambda_3} dt. \quad (20)$$

考虑回路积分:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{DABCD} \frac{e^{\sqrt{\lambda_1} z} \sin \omega(z + \tau)}{\left[ C_2 e^{\sqrt{\lambda_1} z} + \frac{\lambda_2}{3\sqrt{\lambda_1}} \right]^2 + \frac{\lambda_3}{2}} dz.$$

先求极点, 由

$$C_2 e^{\sqrt{\lambda_1} z} = -\frac{\lambda_2}{3\sqrt{\lambda_1}} \pm i \sqrt{\frac{\lambda_3}{2}}, \quad (21)$$

取  $z = \xi_+ + i\eta_+$ , 可得:

$$\begin{cases} e^{\sqrt{\lambda_1} \xi_+} \cos \sqrt{\lambda_1} \eta_+ = -\frac{\lambda_2}{3C_2 \sqrt{\lambda_1}}, & \begin{cases} e^{\sqrt{\lambda_1} \xi_+} \cos \sqrt{\lambda_1} \eta_+ = -\frac{\lambda_2}{3C_2 \sqrt{\lambda_1}}, \\ e^{\sqrt{\lambda_1} \xi_+} \sin \sqrt{\lambda_1} \eta_+ = \frac{1}{C_2} \sqrt{\frac{\lambda_3}{2}}, \end{cases} \\ e^{\sqrt{\lambda_1} \xi_+} \sin \sqrt{\lambda_1} \eta_+ = -\frac{1}{C_2} \sqrt{\frac{\lambda_3}{2}}, & \begin{cases} e^{\sqrt{\lambda_1} \xi_+} \cos \sqrt{\lambda_1} \eta_+ = -\frac{\lambda_2}{3C_2 \sqrt{\lambda_1}}, \\ e^{\sqrt{\lambda_1} \xi_+} \sin \sqrt{\lambda_1} \eta_+ = \frac{1}{C_2} \sqrt{\frac{\lambda_3}{2}}, \end{cases} \end{cases} \quad (22)$$

故此被积函数有两个极点  $z_1 = \xi_+ + i\eta_+$  和  $z_2 = \xi_+ + i\eta_+$ , 其中:

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \ln \left[ \frac{1}{3C_2} \sqrt{\frac{2\lambda_2^2 + 9\lambda_1\lambda_3}{2\lambda_1}} \right], \\ \eta_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \left[ \pi + \arctan \left( \frac{3}{\lambda_2} \sqrt{\frac{\lambda_1\lambda_3}{2}} \right) \right], \\ \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \left[ \pi - \arctan \left( \frac{3}{\lambda_2} \sqrt{\frac{\lambda_1\lambda_3}{2}} \right) \right]. \end{cases} \quad (23)$$

在二极点  $z_1, z_2$  处留数为:

$$\begin{cases} \operatorname{res}f(z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \left( \frac{z - z_1}{C_2 e^{\sqrt{\lambda_1}z} + \frac{\lambda_2}{3\sqrt{\lambda_1}} + \frac{1}{2}\lambda_3} e^{\sqrt{\lambda_1}z} \sin \omega(z + \tau) \right) = \frac{\sin \omega(\xi + \tau) \operatorname{ch} \omega \eta_1 + i \cos \omega(\xi + \tau) \operatorname{sh} \omega \eta_1}{-iC_2 \sqrt{2\lambda_1\lambda_3}}, \\ \operatorname{res}f(z_2) = \lim_{z \rightarrow z_2} \left( \frac{z - z_2}{C_2 e^{\sqrt{\lambda_1}z} + \frac{\lambda_2}{3\sqrt{\lambda_1}} + \frac{1}{2}\lambda_3} e^{\sqrt{\lambda_1}z} \sin \omega(z + \tau) \right) = \frac{\sin \omega(\xi + \tau) \operatorname{ch} \omega \eta_2 + i \cos \omega(\xi + \tau) \operatorname{sh} \omega \eta_2}{iC_2 \sqrt{2\lambda_1\lambda_3}}. \end{cases} \quad (24)$$

因此, 由留数定理:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{DABCD} \frac{e^{\sqrt{\lambda_1}z} \sin \omega(z + \tau)}{\left[ C_2 e^{\sqrt{\lambda_1}z} + \frac{\lambda_2}{3\sqrt{\lambda_1}} + \frac{1}{2}\lambda_3 \right]^2} dz = 2\pi \cdot \frac{\sin \omega(\xi + \tau) (\operatorname{ch} \omega \eta_2 - \operatorname{ch} \omega \eta_1) + i \cos \omega(\xi + \tau) (\operatorname{sh} \omega \eta_2 - \operatorname{sh} \omega \eta_1)}{C_2 \sqrt{2\lambda_1\lambda_3}}. \quad (25)$$

积分路径如图 2 所示.

由此不难确定:

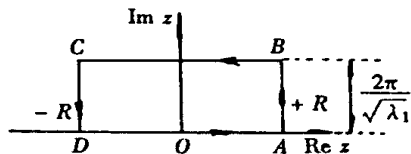


图 2 积分路径

$$\begin{cases} f(z) = \frac{e^{\sqrt{\lambda_1}z} \sin \omega(z + \tau)}{\left[ C_2 e^{\sqrt{\lambda_1}z} + \frac{\lambda_2}{3\sqrt{\lambda_1}} + \frac{1}{2}\lambda_3 \right]^2} \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{AB} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{CD} f(z) dz = 0, \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{DA} f(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\sqrt{\lambda_1}t} \sin \omega(t + \tau)}{\left[ C_2 e^{\sqrt{\lambda_1}t} + \frac{\lambda_2}{3\sqrt{\lambda_1}} + \frac{1}{2}\lambda_3 \right]^2} dt, \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{BC} f(z) dz = -\operatorname{ch} \frac{2\pi\omega}{\sqrt{\lambda_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\sqrt{\lambda_1}t} \sin \omega(t + \tau)}{\left[ C_2 e^{\sqrt{\lambda_1}t} + \frac{\lambda_2}{3\sqrt{\lambda_1}} + \frac{1}{2}\lambda_3 \right]^2} dt - \\ i \operatorname{sh} \frac{2\pi\omega}{\sqrt{\lambda_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\sqrt{\lambda_1}t} \cos \omega(t + \tau)}{\left[ C_2 e^{\sqrt{\lambda_1}t} + \frac{\lambda_2}{3\sqrt{\lambda_1}} + \frac{1}{2}\lambda_3 \right]^2} dt. \end{cases} \quad (26)$$

将式(26)代入(25)中并分开实部和虚部有:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{\lambda_1}t} \sin \omega(t + \tau)}{\left[ C_2 e^{\sqrt{\lambda_1}t} + \frac{\lambda_2}{3\sqrt{\lambda_1}} \right]^2 + \frac{1}{2} \lambda_3} dt = 2\pi \cdot \frac{\sin \omega(\xi + \tau) (\operatorname{ch} \omega \Omega_2 - \operatorname{ch} \omega \Omega_1)}{C_2 \sqrt{2\lambda_1 \lambda_3} \left[ 1 - \operatorname{ch} \frac{2\pi\omega}{\sqrt{\lambda_1}} \right]} \quad (27)$$

代入(14)式中, Melnikov 函数如下表示:

$$M(\tau) = -\frac{4\epsilon'}{3\lambda_3} \left[ \lambda_1^{3/2} + \frac{\lambda_2^2 \sqrt{\lambda_1}}{3\lambda_3} + \lambda_2 \cdot \frac{2\lambda_2^2 + 9\lambda_1 \lambda_3}{9\lambda_3 \sqrt{2\lambda_3}} \arcsin \frac{\sqrt{2}\lambda_2}{\sqrt{2\lambda_2^2 + 9\lambda_1 \lambda_3}} \right] + \frac{4\pi g \omega \sin \omega(\xi + \tau) (\operatorname{ch} \omega \Omega_1 - \operatorname{ch} \omega \Omega_2)}{\sqrt{2\lambda_3} \left[ \operatorname{ch} \frac{2\pi\omega}{\sqrt{\lambda_1}} - 1 \right]} \quad (28)$$

这个 Melnikov 函数如果有根, 则稳定流形和不稳定流形相交, Poincaré 映射有马蹄, 从而存在着奇怪的不变集合, 对我们研究的耗散系统, 就有可能出现混沌.  $M(\tau) = 0$  得:

$$\sin \omega(\xi + \tau) = \frac{\gamma \left[ \operatorname{ch} \frac{2\pi\omega}{\sqrt{\lambda_1}} - 1 \right]}{6\sqrt{2}f\omega \sqrt{\lambda_3} (\operatorname{ch} \omega \Omega_1 - \operatorname{ch} \omega \Omega_2)} \times \left[ \lambda_1^{3/2} + \frac{\lambda_2^2 \sqrt{\lambda_1}}{3\lambda_3} + \lambda_2 \cdot \frac{2\lambda_2^2 + 9\lambda_1 \lambda_3}{9\lambda_3 \sqrt{2\lambda_3}} \arcsin \frac{\sqrt{2}\lambda_2}{\sqrt{2\lambda_2^2 + 9\lambda_1 \lambda_3}} \right] \quad (29)$$

为使方程(29)有根, 必须:  $\sin \omega(\xi + \tau) \leq 1$ , 故此, 发生混沌的临界条件是:

$$\frac{f}{\gamma} \geq \frac{\operatorname{ch} \frac{2\pi\omega}{\sqrt{\lambda_1}} - 1}{6\sqrt{2}\omega \sqrt{\lambda_3} (\operatorname{ch} \omega \Omega_1 - \operatorname{ch} \omega \Omega_2)} \times \left[ \lambda_1^{3/2} + \frac{\lambda_2^2 \sqrt{\lambda_1}}{3\lambda_3} + \lambda_2 \cdot \frac{2\lambda_2^2 + 9\lambda_1 \lambda_3}{9\lambda_3 \sqrt{2\lambda_3}} \arcsin \frac{\sqrt{2}\lambda_2}{\sqrt{2\lambda_2^2 + 9\lambda_1 \lambda_3}} \right] = R(\omega) \quad (30)$$

## 2 数值分析和讨论

通过混沌的理论分析, 我们可以得出以下一些主要结论:

1) 对于一定的外频率  $\omega$ , 激励力  $f$  和阻尼系数  $\gamma$  之比要超过一定的阈值才可能发生混沌, 这个阈值曲线如图3所示. 对已知系统的三个参量  $\gamma, f$  和  $\omega$ ,  $f/\gamma$  如果落在  $R(\omega)$  之下, 系统中不会出现混沌.

2) 在式(30)得以满足的条件下, 也只是可能出现混沌, 因为即便奇怪吸引子存在, 也可能有其它平庸吸引子与之共存.

3) 本文得到的 Melnikov 函数及其发生混沌的临界条件, 是针对形如  $\dot{T} - \lambda_1 T + \lambda_2 T^2 + \lambda_3 T^3 = \epsilon(g \cos \omega t - \epsilon' T)$  的非线性动力系统的, 而且由此不难看出, Duffing 方程及其混沌运动的有关结论是本文的一个特例, 即本文讨论的非线性动力方程当  $\lambda_2 = 0$  时就退化为 Duffing 方程.

4) 形如  $\dot{T} + \lambda_1 T + \lambda_2 T^2 + \lambda_3 T^3 = \epsilon(g \cos \omega t - \epsilon' T)$  的非线性动力系统代表着一类实际

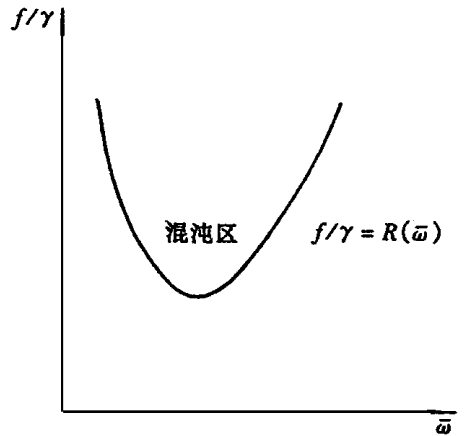
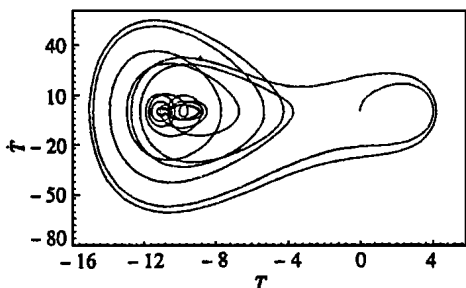
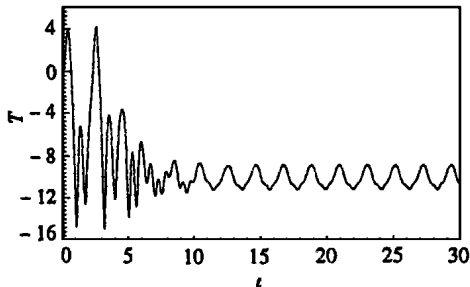


图3 发生混沌的临界条件

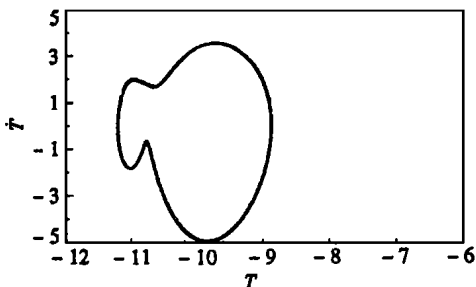
结构受迫振动的非线性控制方程, 如  $\lambda_1 < 0, \lambda_2, \lambda_3 > 0$  时对应着轴压弹性圆柱壳后屈曲受迫振动的非线性控制方程;  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$  时对应着轴压弹性圆柱壳前屈曲受迫振动或弹性拱的非线性控制方程;  $\lambda_2 = 0$  时退化为 Duffing 方程时的情形;  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 = 0$  时是一种新的非线性动力系统, 它有一个中心型奇点和一个双曲型鞍点, 同样也可能发生混沌。因此, 对此类非线性动力系统混沌问题的深入研究, 有助于我们更好地把握许多基本结构单元混沌问题的主要特征。



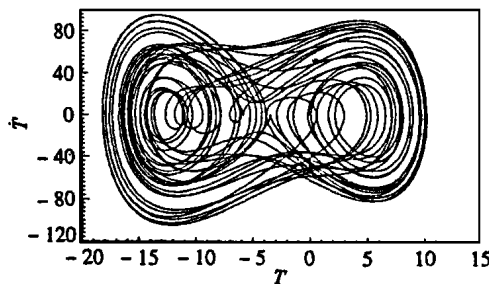
(a) 相平面轨迹



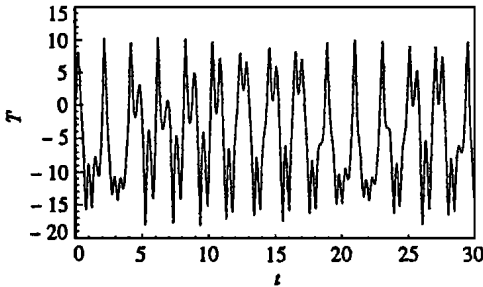
(b) 时程曲线



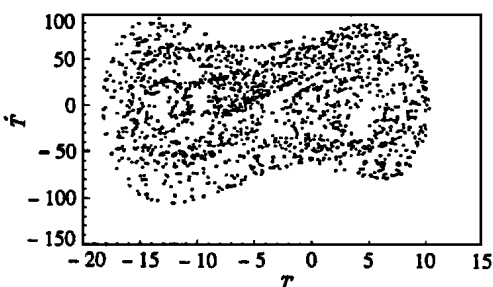
(c) Poincaré 映射



(a) 相平面轨迹



(b) 时程曲线



(c) Poincaré 映射

图 4  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 10, \lambda_3 = 1,$   
 $\omega = 3, g = 100, \epsilon' = 1$

图 5  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 10, \lambda_3 = 1,$   
 $\omega = 3, g = 530, \epsilon' = 1$

图 4 和图 5 中曲线计算了 3 000 个点, 初始条件为  $T(0) = T\dot{(}0) = 0.01$ 。图 4 代表一个定常运动; 图 5 中的时程曲线毫无规律, 相平面轨迹恰似一倾斜倒置的 8, Poincaré 映射很象一麻花, 结合这组参数已落在了 Melnikov 函数给定的混沌区, 因此, 我们可以判定图 5 代表着混沌运动。

由上述分析不难看出, 含二次和三次非线性项的受迫振动系统  $\ddot{T} - \lambda_1 T + \lambda_2 T^2 + \lambda_3 T^3$

$= \varepsilon(g \cos \omega t - \dot{\varepsilon} T)$  代表着许多非线性振动的控制方程, 对此类非线性动力系统的进一步研究, 无疑有助于我们更好地理解其混沌运动的本质特征。

### [参 考 文 献]

- [1] Lee J Y, Symonds P S. Extended energy approach to chaotic elastic-plastic response to impulsive loading[J]. Internat J Mech Sci, 1992, 34(2): 139~ 157.
- [2] Moon F C, Shaw S W. Chaotic vibration of a beam with nonlinear boundary conditions[J]. Non Linear Mech, 1983, 18(6): 230~ 240.
- [3] Baran D D. Mathematical models used in studying the chaotic vibration of buckled beams[J]. Mechanics Research Communications, 1994, 21(2): 189~ 196.
- [4] Holms P, Marsden J. A partial differential equation with infinitely many periodic orbits: chaotic oscillation of a forced beam[J]. J Arch Rat Mech Anal, 1981, 76(2): 135~ 165.
- [5] 韩强. 几种结构的动力屈曲、分叉和混沌运动研究[D]. (博士学位论文). 太原: 太原工业大学, 1996.

## The Study on the Chaotic Motion of a Nonlinear Dynamic System

Han Qiang<sup>1</sup>, Zhang Shanyuan<sup>2</sup>, Yang Guitong<sup>2</sup>

(1. Department of Mechanics, College of Traffic and Communications,  
South China University of Technology, Guangzhou 510641, P R China;

2. Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, P R China)

**Abstract:** In this paper the system of the forced vibration  $\dot{T} - \lambda_1 T + \lambda_2 T^2 + \lambda_3 T^3 = \varepsilon(g \cos \omega t - \dot{\varepsilon} T)$  is discussed, which contains square and cubic items. The critical condition that the system enters chaotic states is given by the Melnikov method. By Poincaré map, phase portrait and time-displacement history diagram, whether the chaos occurs is determined.

**Key words:** chaos; Melnikov method; Poincaré map; phase portrait; time-displacement diagram