应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999)08_0829_06

关于一类广义 Navier_Stokes 方程的稳定性*

唐 一鸣

(上海大学 理学院 数学系, 上海 200072)

(钱伟长推荐)

摘要: 应用分层理论, 通过证明所论方程是 l_简单的, $l \geqslant 1$, 证明了其不稳定性· 以大气动力学中的强迫耗散非线性系统方程组解的不唯一性, 作为这一结果的例证·

关 键 词: 本方程; l_简单; 不稳定方程
中图分类号: O175.29 文献标识码: A

本文所讨论的属于第二类广义 Navier_Stokes 方程的稳定性问题, 涉及到流体力学、大气动力学等学科中一系列重要问题的研究· 我们将使用分层理论提供的方法, 证明它是 l_简单的, $l \geqslant 1$, 因而不存在任何 $C^k(k \geqslant 2)$ 稳定解· 这与作为它的特殊情形的 Navier_Stokes 方程的不稳定性质完全一致· 为了证明这一事实, 先将本文中引用的符号与定义简单介绍如下, 详细定义请参看[1], [2], [3], [4]·

1 有关的符号、定义与引用的定理

先介绍本文所用的一些符号

$J^k(R^n, R^m)$ $(k = -1, 0, 1, 2, \cdots)$ ——R^n 到 R^m 的 k 阶 Ehresmann 空间;

$\alpha_k^{k'}$ —— 典则对应;

$j^k u$ ——u 的 k 阶典则截口(k_ime section cauonique de u), 这里, 对应

$u: R^n \to R^m$,

而 $j^k u: R^n \to J^k(R^n, R^m)$;

e_b ——Ehresmann 对应 e 的第 b 分量;

$V(f)$ ——$J^k(R^n, R^m)$ 的子集合, 它由对应 f 的零点构成, $f: J^k(R^n, R^m) \to R$ 并且, 以 $V(f_1, f_2, \cdots, f_h) = V(f_1) \cap V(f_2) \cap \cdots \cap V(f_h)$ 代表由对应 $f_1, f_2, \cdots, f_h: J^k(R^n, R^m) \to R$ 的零点构成的 $J^k(R^n, R^m)$ 的子集合;

$D'_* = \bigcup_r D'_r$ $(D'_r \subseteq J^r(R^n, R^m))$ ——D 的准本方程;

$D_* = (D'_*)^\# = \bigcup_r D_r$ $(D_r \subseteq J^r(R^n, R^m))$ ——D 的本方程;

关于 D'_*、D_* 的详细定义请参看[1]·

---

* 收稿日期: 1998_01_05; 修订日期: 1999_01_21
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(95zd14025)
作者简介: 唐一鸣(1942~)男, 教授, 上海大学数学系副主任.

设 $D \subseteq J^{k_0}(R^{m_1}, R^{m_2})$ 是一个 k_0 阶偏微分方程组[5], $x = (x_1, x_2, \cdots, x_{m_1}) \in R^{m_1}$ 是自变量, $u = (u_1, u_2, \cdots, u_{m_2}) \in R^{m_2}$ 是未知函数组, D 的一个 C^∞ 解 u 如果满足以下条件, 就说它在点 $x_0 \in R^{m_1}$ 是稳定的•

存在一个超曲面 Σ_0, $x_0 \in \Sigma_0 \subseteq R^{m_1}$, 使得由初始条件 $j^{k_0-1}u \mid_{\Sigma_0}$ 所构成的Cauchy 问题是适定的[1]•

如果不存在任何点 x, $x \in R^{m_1}$, 使得 D 的解 u 是稳定的, 就说 u 是 D 的一个不稳定解•

定义 1 设 $D \subseteq J^{k_0}(R^{m_1}, R^{m_2})$ 是一个 k_0 阶偏微分方程组, 如果 D 的所有 C^∞ 解都是不稳定的, 就说 D 是一个不稳定方程组[1]•

例 1 描述粘性不可压缩流体的 Navier_Stokes 方程是不稳定方程• 特别需要指出的是, Navier_Stokes 方程不存在任何 C^2 的稳定解[1]•

定义 2 设 $D \subseteq J^{k_0}(R^{m_1}, R^{m_2})$ 是一个 k_0 阶偏微分方程组, 如果存在 l, $l \in N$, 使得 $(D'_{k_0+l})_* = (D'_{k_0+l})'_*$, 而 $(D'_{k_0+l-1})_* \neq (D'_{k_0+l-1})'_*$, 就称 D 是 l_简单的• 特别, 如果 $l = 0$, 就说 D 是简单的[2]•

这时有

$$D_* = (D'_{k_0+l})_* = (D'_{k_0+l})'_* •$$

例 2 广义相对论中的 Einstein 方程是简单的[2]•

例 3 一般流体完备方程组, 即 Landau_Lifchitz 方程, 以及不可压缩无粘性流体的 Euler 方程都是简单的[1]•

例 4 粘性、不可压缩流体的 Navier_Stokes 方程是 1_简单的[3]•

定理 设 $D \subseteq J^{k_0}(R^{m_1}, R^{m_2})$ 是一个 k_0 阶偏微分方程组, 如果 D 是 l_简单的, 并且 $l \geqslant 1$, 那么 D 是一个不稳定方程组•

定理的证明请参看[3]•

设 n 是一个固定的整数, $n \in \mathbf{N}_+$, 考虑如下的二阶拟线性方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_4} + (\boldsymbol{u} \cdot \therefore)\boldsymbol{u} = a\,\mathrm{grad}\,u_4 + \nu \Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}(x, v, \partial v), \\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{4} A_{ij}^{hp}(x, \mu, \partial \mu) \frac{\partial^2 v_h}{\partial x_i \partial x_j} = g_p(x, \mu, \partial \mu) • \end{cases} \tag{*}$$

将它记为 $D_{F,g,A}$, 那末 $D_{F,g,A} \subseteq J^2(R^4, R^{n+4})$, 式中

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \text{ 是自变量• 未知函数组是}$$

$$\mu = (u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, \cdots, v_n) \in R^{n+4},$$

$$v = (v_1, \cdots, v_n), \quad \boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3),$$

$$(\boldsymbol{u} \cdot \therefore) = u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3} •$$

此外, a、ν 是两个非零常数, 并假设 $\boldsymbol{F}$、g_p、A_{ij}^{hp} 都是 C^∞ 类函数•

很明显, 在 $D_{F,g,A}$ 中, 如果 $n = 0$、$a = 1/\rho$、$A_{ij}^{hp} = g_p = 0$、$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x)$, 那末它就是通常的 Navier_Stokes 方程• 如果 $n = 1$, $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, t) \in R^4$,

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) = (u, v, w),$$
$$\mu = (u_1, u_2, u_3, u_4; v_1) = (u, v, w, p, T) \in R^{4+1},$$
$$\boldsymbol{F} = (0, 0, g\varepsilon T),$$
$$g_1 = \frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z},$$
$$A_{11}^{11} = A_{22}^{11} = A_{33}^{11} = \chi(\neq 0), \text{其他 } A_{ij}^{hp} = 0\cdot$$

那末 $D_{F,g,A}$ 就是大气动力学中强迫耗散系统方程组, 以后我们还会讨论它• 由于 $D_{F,g,A}$ 的形式包含了 Navier_Stokes 方程, 再加上我们即将证明的其不稳定性质也与 Navier_Stokes 方程相似, 所以我们将它称为一类广义 Navier_Stokes 方程•

2 定 理 及 证 明

设 A、g、F 代表由 $D_{F,g,A}$ 中的 A_{ij}^{hp}、g_p、$\boldsymbol{F}$ 所定义的 3 个 C^{∞} 对应:

$$A:\ J^1(R^4, R^{n+4}) \to M_{n,10n},$$
$$g:\ J^1(R^4, R^{n+4}) \to M_{n,1},$$
$$F:\ J^1(R^4, R^{n+4}) \to M_{3,1},$$

设 $\beta \in J^1(R^4, R^{n+4})$, 那末定义:

$$A(\beta) = \| A_{ij}^{hp} \|_{n\times 10n},$$
$$\boldsymbol{g}(\beta) = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}(\beta) = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix},$$

这里 $M_{r,q}$ 代表由 r 行 q 列矩阵构成的矩阵空间, 以 $M_{n,10n}^{0}$ 代表 $M_{n,10n}$ 中所具有最大秩的矩阵构成的子空间•

定理 设 $D \subseteq J^2(R^4, R^{n+4})$ 是一个 $D_{F,g,A}$ 型方程, 并假设对应 A,

$$A:\ J^1(R^4, R^{n+4}) \to M_{n,10n},$$

满足条件 $\mathrm{Im}\,A \subseteq M_{n,10n}^{0}$, 那末方程组 D 是一个不稳定方程组• 特别, 它不存在任何 C^2 稳定解•

证明 定理证明要点简述如下:

首先, 我们使用 $J^2(R^4, R^{n+4})$ 的局部坐标将方程组(*), 即 $D_{F,g,A}$ 改写为比较简单的形式:

设 $\beta = (x_1, \cdots, x_4; u_1, \cdots, u_4; v_1, \cdots, v_n; p_1^1, \cdots, p_{44}^{n+4})$, (我们将 $(u_1, u_2, u_3, u_4; v_1, \cdots, v_n)$ 记为 $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \cdots, u_{n+4})$) 那末, (*) 可写成:

$$(D)\begin{cases} f_q:\ \nu(p_{11}^q + p_{22}^q + p_{33}^q) + ap_q^4 - (u_1p_1^q + u_2p_2^q + u_3p_3^q + p_4^q) + F_q = 0, \\ f_4:\ p_1^1 + p_2^2 + p_3^3 = 0, \\ G_p:\ \sum_{h=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{4} A_{ij}^{hp}\cdot p_{ij}^h - g_p = 0, \end{cases} \tag{1}$$
$$(q = 1, 2, 3;\ p = 1, 2, \cdots, n)\cdot$$

将上式左端依次记为 $f_1, f_2, f_3, f_4, G_1, \cdots, G_n$, 那末

$$D = V(f_1, f_2, f_3, f_4, G_1, \cdots, G_n)\cdot$$

以下我们将通过计算 D 的准本方程与本方程, 证明它是 1_简单的• 根据第 1 节中的定理, D 是一个不稳定方程•

根据准本方程的定义[1], 由(1)式就有

$$
\begin{aligned}
D'_{*} &= \bigcup_r D'_r,\\
D'_{-1} &= R^4,\\
D'_0 &= J^0(R^4, R^{n+4}) = R^4 \times R^{n+4},\\
D'_1 &= V(f_4) = \left\{p^1_1 + p^2_2 + p^3_3 = 0\right\} \subseteq J^1(R^4, R^{n+4}),\\
D'_2 &= V(f_1, f_2, f_3, f_4, e_b(f_4), G_1, G_2, \cdots, G_n) \subseteq J^2(R^4, R^{n+4})\\
&\qquad (b = 1, 2, 3, 4),\\
D'_3 &= V(e_{b_1}(f_q), e_{b_1}(G_p), e_{bb_1}(f_4), f_1, f_2, f_3, f_4, G_p) \subseteq J^3(R^4, R^{n+4})\\
&\qquad (b, b_1 = 1, 2, 3, 4; q = 1, 2, 3; p = 1, 2, \cdots, n)\bullet
\end{aligned}
$$

如果 $D'_k = V(x_1, x_2, \cdots, x_\lambda) \subseteq J^k(R^4, R^{n+4})$, 那末

$$
\begin{aligned}
D'_{k+1} &= V(e_{b_{k-2}}(x_1), \cdots, e_{b_{k-2}}(x_\lambda), x_1, \cdots, x_\lambda) \subseteq J^{k+1}(R^4, R^{n+4})\\
&\qquad (b_{k-2} = 1, 2, 3, 4),
\end{aligned}
$$

等等•

由于定理中条件的保证, 即 $\| A^{hp}_{ij} \|$ 取最大秩, 因而在构造 D'_{*} 的饱和集的过程中, 其结果与通常的 Navier_Stokes 方程完全相似, 即有

$$
\begin{aligned}
D_{-1} &= J^{-1}(R^4, R^{n+4}) = R^4,\\
D_0 &= J^0(R^4, R^{n+4}) = R^4 \times R^{n+4},\\
D_1 &= V(f_4) \subseteq J^1(R^4, R^{n+4}),\\
D_2 &= V(f_1, f_2, f_3, f_4, e_b(f_4), G_1, \cdots, G_n) \cap V(f_5),
\end{aligned}
$$

这里的 f_5 表示下列关系式的左端:

$$
\begin{aligned}
&a[p^4_{11} + p^4_{22} + p^4_{33}] + [(p^1_1)^2 + (p^2_2)^2 + (p^3_3)^2 + 2p^1_2 p^2_1 + 2p^1_3 p^3_1 + 2p^2_3 p^3_2] -\\
&\left[\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right] = 0\bullet
\end{aligned}
\tag{2}
$$

在 $k = 3, 4$ 时有

$$
\begin{aligned}
D_3 = {}& V(e_{b_1}(f_q), e_{b_1}(G_p), e_{bb_1}(f_4), f_1, f_2, f_3, f_4, e_b(f_4), G_p) \cap V(e_{b_1}(f_5), f_5)\\
&\qquad (b, b_1 = 1, 2, 3, 4; p = 1, 2, \cdots, n; q = 1, 2, 3),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
D_4 = {}& V(e_{b_1 b_2}(f_q), e_{b_1 b_2}(G_p), e_{bb_1 b_2}(f_4), e_{b_1}(f_q), e_{b_1}(G_p), e_{bb_1}(f_4), f_4, f_q, G_p) \cap\\
& V(e_{b_1 b_2}(f_5), e_{b_1}(f_5), f_5)\\
&\qquad (b, b_1, b_2 = 1, 2, 3, 4; p = 1, 2, \cdots, n; q = 1, 2, 3),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

等等• 显然有以下关系

$$
D_2 \neq D'_2, \quad (D'_2)'_{*} \neq (D'_2)_{*}, \quad (D'_3)'_{*} = (D'_{2+1})'_{*} = (D'_3)_{*}\bullet
\tag{5}
$$

这正是我们要证明的事实, 即方程组(1)是 1_简单的• 根据已证明的定理[3], 任何 l_简单的方程组, 如果 $l \geqslant 1$, 那末它不存在任何稳定解• 所以方程组(1), 即 $D_{F,g,A}(*)$ 是一个不稳定方

程组•

例 5 大气动力学中的强迫耗散非线性系统由以下方程组描述[6]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial p}{\partial x}-\nu\nabla^2 u=0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial p}{\partial y}-\nu\nabla^2 v=0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}+\dfrac{\partial p}{\partial z}-\nu\nabla^2 w-g\varepsilon T=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0, \\ \dfrac{\partial T}{\partial t}+u\dfrac{\partial T}{\partial x}+v\dfrac{\partial T}{\partial y}+w\dfrac{\partial T}{\partial z}-\chi\nabla^2 T=0\text{•} \end{cases} \tag{6}$$

这是一个 $D_{F,g,A}$ 型方程组:

$$n=1,$$

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x,y,z,t)\in R^4,$$

$$\mu=(u_1,u_2,u_3,u_4,v_1)=(u,v,w,p,T)\in R^{4+1}=R^5,$$

$$\boldsymbol{F}=(0,0,g\varepsilon T),$$

$$g_1=\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z},$$

$$A_{11}^{11}=A_{22}^{11}=A_{33}^{11}=\chi,\ \text{其他}\ A_{ij}^{hp}=0,$$

其中 g, ε, χ 是三个非零常数•

考虑以下两组实代数函数 $\boldsymbol{U}^{(i)}=(u^{(i)},v^{(i)},w^{(i)},p^{(i)},T^{(i)}),\ (i=1,2)$:

$$\boldsymbol{U}^{(1)}\begin{cases} u^{(1)}=-\dfrac{1}{2}t^2y, \\ v^{(1)}=-\dfrac{1}{2}t^2x, \\ w^{(1)}=(g\varepsilon T_0)t, \\ p^{(1)}=p_0+txy-\dfrac{1}{8}(x^2+y^2)t^4, \\ T^{(1)}=T_0 \end{cases}$$

和

$$\boldsymbol{U}^{(2)}\begin{cases} u^{(2)}=-\dfrac{1}{2}t^2y, \\ v^{(2)}=-\dfrac{1}{2}t^2x, \\ w^{(2)}=(g\varepsilon T_0)t-\dfrac{1}{24}t^4, \\ p^{(2)}=p_0+txy-\dfrac{1}{6}t^3z-\dfrac{1}{8}(x^2+y^2)t^4, \\ T^{(2)}=T_0\text{•} \end{cases}$$

可以立即验证, 它们都是方程组(6) 的解, 并且在超平面$\{t=0\}\subseteq R^4$ 上满足同样的初始条件:

$$\boldsymbol{U}^{(1)}\mid_{t=0}=\boldsymbol{U}^{(2)}\mid_{t=0}=(0,0,0,p_0,T_0)^{\mathrm{T}},\qquad (p_0,\ T_0\ \text{为非零常数})$$

并且

$$U^{(1)} - U^{(2)} = \left(0, 0, \frac{1}{24}t^4, -\frac{1}{6}t^3 z, 0\right)^T \neq 0 \cdot$$

可以用相似的方法, 构造出方程组(6)的其他边值问题的不唯一解• 这再一次证明了方程组(6)是一个不稳定方程组[4]•

注 1 Boussinesq 方程也属于 $D_{F,g,A}$ 型方程, 因而也是不稳定方程, 其不稳定性的例子可参看[7]•

注 2 定理中 $\| A_{ij}^{kp} \|$ 取最大秩的假设可以取消, 这时 $D_{F,g,A}$ 仍为 l_简单的, 但 $l \geqslant 1$•

注 3 根据 J. Hadamard 的理论, 一个不稳定的方程组不能描述任何实际的力学或物理现象[8], 因而对这样的不稳定方程进行任何形式的数值计算以求其数值解, 也是毫无意义的[9]•

[参 考 文 献]

[1] Shih W S. Solution Analytiques de Quelques Équations aux D rive s Partielles en M canique des Fluides[M]. Hermann Paris: Travaux en Course, 1992.

[2] Shih W S. Stratification et quations aux d rive s partielles[J]. IHES, M , 1995, **95**(3). (in France).

[3] 施惟慧, 唐一鸣. 关于不稳定非线性偏微分方程的一个数值不变量[J]. 上海大学学报, 1996, **2**(4): 355~359.

[4] 陈达段, 刘晓明, 施惟慧. 强迫耗散非线性系统的稳定性[J]. 应用数学和力学, 1996, **17**(6): 515~522.

[5] Ehresmann C. Introduction a La theorie des structures infinitesimales et des pseudo_proupes de Lie[A]. In: Calloque International de Geometrie Differentielle Strasbourge[C]. France, 1953, 97~110.

[6] 丑纪范. 大气动力学的新进展[M]. 兰州: 兰州大学出版社, 1990.

[7] Shin S A. Sur La saturation, La satabilit des syst mes d quations aux d rive s parielles et La calcul formel[D]. Paris: Universit Deuis Diderot, 1994.

[8] Hadamard J. La Th orie des Équations aux D rive s Partielles[M]. Beijing: Edition Scientifiqne, 1964.

[9] Marchonk G. Methode de Calcul Num rique[M]. Moscou: Edition Mir Moscou, 1980.

On the Stability of General Navier_Stokes Type Equation

Tang Yiming

(College of Science, Shanghai University, Shanghai 200072, P R China)

Abstract: In this paper, by proving that the equations discussed here are l_simple ($l \geqslant 1$) by stratification theory, the unstability of the equations is proved. And the un_uniqueness of the solution of forced dissipative non_linear system equations in atmospheric dynamics is used as an illustration for the result.

Key words: gradue; l_simple; unstable equation