应用数学和力学, 第 20 卷 第 7 期(1999 年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 07_0743_06

# 模糊随机变量及其变分原理*

杨绿峰[1], 李桂青[2]

(1. 广西大学 土木工程学院, 南宁 530004;
2. 武汉工业大学 抗震所, 武汉 430070)

(周焕文推荐)

摘要: 从模糊事件的概率出发, 定义了峰型模糊随机变量及其真值的期望概念• 直接将参数的模糊随机性引入总势能泛函中, 利用小参数摄动法建立了模糊随机变分原理• 并阐明了它的应用•

关 键 词: 变分原理; 模糊随机; 峰型模糊数
中图分类号: O176.3 文献标识码: A

## 引 言

不确定性主要包括模糊性和随机性两方面, 它们是工程结构的固有特性• 在结构数值计算方面, 不确定性是指参数在取值上的模糊性和随机性• 参数的随机性体现在参数在时空分布上的变异性; 参数的模糊性体现在参数在取值上的不精确性, 造成模糊性的根源在于认识主体对客观事物的认识与客观事物本身之间存在的偏差• 例如对工程结构的弹性模量 $E$ 而言, $E$ 的随机性是指 $E$ 在结构中不同的部位通常有不同的取值; $E$ 的模糊性是指我们在计算时所取的 $E$ 的值与 $E$ 的真实值(简称为真值) 之间存在的偏差• 可以这样认为, 参数的随机性反映了参数在时空中不同点上的取值特性; 而其模糊性则反映了参数在时空中某一点上的取值特性•

现行的随机有限元法、模糊有限元法及其它随机、模糊数值方法基本上都是按如下思路推导的: 在确定性有限元方程中引入参数和变量的随机性、模糊性, 得到一个不确定性方程• 然后按照摄动理论或模糊数的分解定理, 得到一组确定性方程• 从而将不确定性方程的求解问题转化为一组确定性方程的求解问题• 这种推导随机、模糊有限元方程的方法称为直接刚度法•

通常, 确定性有限元方程是通过对结构确定性的总势能(或余能) 泛函求变分得到的• 由于结构的控制参数都具有不确定性, 所以结构的总势能(余能) 泛函也具有不确定性• 故而可以这样认为, 直接刚度法走一条"先忽略后引入"的弯路: 即首先在结构的总势能(余能) 泛函中忽略参数和变量的不确定性, 得到一个确定性泛函, 在此基础上根据变分原理求得确定性有限元方程• 然后再将参数的不确定性引入确定性有限元方程中, 由此求得不确定性有限元方程• 在这样一个"先忽略后引入"的过程中是否存在错误? 直接刚度法本身并不能从理论上

* 收稿日期: 1998_07_06; 修订日期: 1999_03_11
作者简介: 杨绿峰(1966~ ), 男, 博士, 副教授, 已发表论文 20 余篇.

作出回答•

只有在总势能(余能)泛函中引入参数的随机性,由此出发,根据泛函极值理论(即不确定性变分原理)求得不确定性有限元法的控制方程,才能在理论上克服直接刚度法的缺陷,为模糊随机数值理论和方法的发展打下坚实的理论基础•

## 1 峰型模糊数[1]

定义1 有界闭模糊数 $A$ 称为峰型模糊数,如果 $A$ 满足下列条件:

1) $A$ 的左、右展形函数 $L_A(x)$, $R_A(x)$ 严格单调且连续,且 $0 \leqslant L_A, R_A < 1$•

2) 集合 $\mathrm{Ker}A$ 有且只有一个元素 $A^\circ$•

这类模糊数的隶属函数在 $A^\circ$ 点取得唯一的一个极大值(即最大值)1,在 $A^\circ$ 点左右隶属函数曲线单调下降,呈山峰状,故称之为峰型模糊数• $A$ 可以记为:

$$A = [A^\circ, L_A(x), R_A(x)]• \tag{1}$$

$A^\circ$ 称为模糊数 $A$ 的真值• 它是确定性量• 我们通常采用的数值是一个比较接近 $A^\circ$ 的数值• 也就是说,$A$ 的取值具有绕 $A^\circ$ 点上下波动的性质,故而可将 $A$ 分解为:

$$A = A^\circ + \beta_A, \tag{2}$$

式中,$\beta_A$ 是模糊数 $A$ 的摄动微量,且:

$$\beta_A = [0, L_A(x + A^\circ), R_A(x + A^\circ)]• \tag{3}$$

根据工程实际情况,左、右展形函数 $L_A(x)$, $R_A(x)$ 可采用线性函数或非线性函数• 有时也可采用幂函数的形式• 当采用线性函数时,称 $A$ 为线性峰型模糊数• 这时有:

$$\left.\begin{aligned} L_A(x) &= \begin{cases} a_L(x - A^\circ) + 1 & (A^\circ \geqslant x > A^\circ - a/a_L), \\ 0 & (x \leqslant A^\circ - 1/a_L), \end{cases} \\ R_A(x) &= \begin{cases} a_R(A^\circ - x) + 1 & (A^\circ \leqslant x < A^\circ + 1/a_R), \\ 0 & (x \geqslant A^\circ + 1/a_R), \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

式中,$a_L$, $a_R$ 分别表示线性峰型模糊数 $A$ 的左、右展形函数的倾斜度• 二者都是正数•

当 $A$ 可能的变化范围为 $[A_t, A_s]$ 时,其左、右展形曲线的倾斜度为:

$$a_L = \frac{1}{A^\circ - A_t'}, \quad a_R = \frac{1}{A_s' - A^\circ}, \tag{5}$$

这里,

$$A_t' = \begin{cases} 2A_t - A^\circ & (A^\circ < 2A_t) \\ 0 & (A^\circ \geqslant 2A_t); \end{cases} \qquad A_s' = 2A_s - A^\circ• \tag{6}$$

具体计算时,$A^\circ$ 可近似取确定性分析时的值•

## 2 峰型模糊随机变量

这里,我们采用模糊事件的概率来定义模糊随机变量和模糊随机数• 即认为具有随机性的变量或数值是模糊的,而其概率是确定的• 这样做便于将模糊随机变量和模糊随机数的模糊性和随机性分离开•

对于某一模糊随机量 $A$,当然它具有模糊性,所以我们可以将 $A$ 在其真值 $A^\circ$ 处按式(2)分解• 在时空坐标系中的任一点上,$A^\circ$ 都有一个确定性的值• 但是由于 $A$ 具有随机性,所以在不同的坐标点上 $A^\circ$ 有不同的值,其大小通常将在其均值 $A^\circ$(亦称为真值的期望)附近上下扰

动• 故而可将 $A^\circ$ 在其均值$A^\circ$ 附近分解为:

$$A^\circ = A^\circ + \alpha_A \bullet \tag{7}$$

综合式(2)、(7),模糊随机量 $A$ 可以表示为:

$$A = A^\circ + \alpha_A + \beta_A = A^\circ + \gamma_A, \tag{8}$$

式中:

$$\gamma_A = \alpha_A + \beta_A, \tag{9}$$

这里, $\alpha_A$ 是均值为零的随机小量, 称之为随机摄动量;

$\beta_A$ 是真值为零的模糊小量, 称之为模糊摄动量;

$\gamma_A$ 是模糊随机小量, 且其真值的期望为零, 称之为模糊随机摄动量•

当 $\beta_A$ 是一峰型模糊数时, $A$ 及 $\gamma_A$ 将是峰型模糊随机量•

文[1]中推导了峰型模糊数及模糊随机数的运算法则, 限于篇幅, 这里不再重述•

## 3 模糊随机变分原理

在弹性小变形前提下, 结构受外力作用而变形时, 其模糊随机总势能泛函为:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \left\{\varepsilon\right\}^{\mathrm{T}}[D]\left\{\varepsilon\right\}\mathrm{d}V - \int_{S_u}\left\{u\right\}^{\mathrm{T}}\left\{T\right\}\mathrm{d}S - \int_V \left\{u\right\}^{\mathrm{T}}\left\{F\right\}\mathrm{d}V, \tag{10}$$

式中: $\left\{u\right\}$, $\left\{\varepsilon\right\}$, $[D]$, $\left\{T\right\}$, $\left\{F\right\}$, $\Pi$ 分别表示结构的位移、应变、弹性矩阵、面力列阵、体力列阵及总势能泛函, 它们都是模糊随机量• 其中$[D]$ 的元素由弹性模量 $E$ 和泊松比$\nu$组合而成, $E$ $\nu$以及$\left\{T\right\}$, $\left\{F\right\}$ 通常都是模糊随机量• 它们和其它能够影响工程结构受力及变形的模糊随机量可以模型化为一个具有 $n$ 个分量的模糊随机场$\left\{X\right\}$:

$$\left\{X\right\} = [X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n]^{\mathrm{T}} \bullet \tag{11}$$

如式(8)所述, $\left\{X\right\}$ 可表示为:

$$\left\{X\right\} = \left\{X^\circ\right\} + \left\{\gamma\right\}, \tag{12}$$

式中, $\left\{X^\circ\right\}$ 表示模糊随机场$\left\{X\right\}$ 的真值的期望, 它是确定性量• 且:

$$\left\{X^\circ\right\}^{\mathrm{T}} = [X^\circ_1, X^\circ_2, \cdots, X^\circ_n],$$

$$\left\{\gamma\right\} = [\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \cdots \quad \gamma_n]^{\mathrm{T}} \bullet$$

由于$\left\{u\right\}$, $\left\{\varepsilon\right\}$, $[D]$, $\left\{T\right\}$, $\left\{F\right\}$, $\Pi$ 等都依赖于模糊随机场$\left\{X\right\}$, 所以可将它们在$\left\{X\right\}$ 的真值的均值$\left\{X^\circ\right\}$ 处按如下的泰勒级数展开:

$$\left\{u\right\} = \left\{u^\circ\right\} + \sum_{i=1}^{n}\gamma_i\left\{u\right\}_{,i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_i\gamma_j\left\{u\right\}_{,ij}, \tag{13}$$

式中, $\left\{u^\circ\right\}$ 表示$\left\{u\right\}$ 的真值在模糊随机场的真值的期望$\left\{X^\circ\right\}$ 处之值•

$\left\{u\right\}_{,i}$ 表示$\left\{u\right\}$ 的真值对$X_i$ 的一阶偏导数在$\left\{X^\circ\right\}$ 处之值,

$\left\{u\right\}_{,ij}$ 表示$\left\{u\right\}$ 的真值对$X_i$, $X_j$ 的二阶偏导数在$\left\{X^\circ\right\}$ 处之值•

同理, $\left\{\varepsilon\right\}$, $[D]$, $\left\{T\right\}$, $\left\{F\right\}$, $\Pi$都可以仿上式按泰勒级数展开• 将这些级数展式代入式(10), 可得 $\Pi$的摄动展式:

$$\Pi^\circ = \frac{1}{2}\int_V \left\{\varepsilon^\circ\right\}^{\mathrm{T}}[D^\circ]\left\{\varepsilon^\circ\right\}\mathrm{d}V - \int_{S_u}\left\{u^\circ\right\}^{\mathrm{T}}\left\{T^\circ\right\}\mathrm{d}S - \int_V \left\{u^\circ\right\}^{\mathrm{T}}\left\{F^\circ\right\}\mathrm{d}V, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\Pi_{,i} = {} & \frac{1}{2}\int_V \left(\left\{\varepsilon^\circ\right\}^{\mathrm{T}}[D^\circ]_{,i}\left\{\varepsilon^\circ\right\} + 2\left\{\varepsilon^\circ\right\}^{\mathrm{T}}[D^\circ]\left\{\varepsilon\right\}_{,i}\right)\mathrm{d}V - \int_{S_u}\left(\left\{u^\circ\right\}^{\mathrm{T}}\left\{T\right\}_{,i} + \right. \\ & \left.\left\{u\right\}_{,i}^{\mathrm{T}}\left\{T^\circ\right\}\right)\mathrm{d}S - \int_V \left(\left\{u^\circ\right\}^{\mathrm{T}}\left\{F\right\}_{,i} + \left\{u\right\}_{,i}^{\mathrm{T}}\left\{F^\circ\right\}\right)\mathrm{d}V \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),\end{aligned} \tag{15}$$

$$\Pi_{ij} = \frac{1}{2}\int_V \Big(\{\varepsilon^{\circ}\}^{\mathrm{T}}[D]_{ij}\{\varepsilon^{\circ}\} + 2\{\varepsilon\}_i^{\mathrm{T}}[D^{\circ}]\{\varepsilon\}_j + 2\{\varepsilon^{\circ}\}^{\mathrm{T}}[D]_i\{\varepsilon\}_j + 2\{\varepsilon^{\circ}\}^{\mathrm{T}}[D]_j\{\varepsilon\}_i + 2\{\varepsilon^{\circ}\}^{\mathrm{T}}[D^{\circ}]\{\varepsilon\}_{ij}\Big)\mathrm{d}V - \int_{Su}\Big(\{u^{\circ}\}^{\mathrm{T}}\{T\}_{ij} + \{u\}_{ij}^{\mathrm{T}}\{T^{\circ}\} + \{u\}_i^{\mathrm{T}}\{T\}_j + \{u\}_j^{\mathrm{T}}\{T\}_i\Big)\mathrm{d}S - \int_V\Big(\{u^{\circ}\}^{\mathrm{T}}\{F\}_{ij} + \{u\}_{ij}^{\mathrm{T}}\{F^{\circ}\} + \{u\}_i^{\mathrm{T}}\{F\}_j + \{u\}_j^{\mathrm{T}}\{F\}_i\Big)\mathrm{d}V \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n), \tag{16}$$

式中, $\{\varepsilon^{\circ}\}$, $[D^{\circ}]$, $\{T^{\circ}\}$, $\{F^{\circ}\}$, $\Pi^{\circ}$ 分别表示 $\{\varepsilon\}$, …, $\Pi$ 等的真值在 $\{X^{\circ}\}$ 处之值• $\{\varepsilon\}_i$, …, $\Pi_i$ 分别表示 $\{\varepsilon\}$, …, $\Pi$ 等的真值对 $X_i$ 的一阶偏导数在 $\{X^{\circ}\}$ 处之值• $\{\varepsilon\}_{ij}$, …, $\Pi_{ij}$ 分别表示 $\{\varepsilon\}$, …, $\Pi$ 等的真值对 $X_i$, $X_j$ 的二阶偏导数在 $\{X^{\circ}\}$ 处之值•

$\Pi^{\circ}$, $\Pi_i$ 以及 $\Pi_{ij}$ 的一阶变分分别为:

$$\delta\Pi^{\circ} = \int_V \delta\{\varepsilon^{\circ}\}^{\mathrm{T}}[D^{\circ}]\{\varepsilon^{\circ}\}\mathrm{d}V - \int_{Su}\delta\{u^{\circ}\}^{\mathrm{T}}\{T^{\circ}\}\mathrm{d}S - \int_V \delta\{u^{\circ}\}^{\mathrm{T}}\{F^{\circ}\}\mathrm{d}V, \tag{17}$$

$$\delta\Pi_i = \int_V[\delta\{\varepsilon^{\circ}\}^{\mathrm{T}}([D]_i\{\varepsilon^{\circ}\} + [D^{\circ}]\{\varepsilon\}_i) + \delta\{\varepsilon\}_i^{\mathrm{T}}[D^{\circ}]\{\varepsilon^{\circ}\}]\mathrm{d}V - \int_{Su}(\delta\{u^{\circ}\}^{\mathrm{T}}\{T\}_i + \delta\{u\}_i^{\mathrm{T}}\{T^{\circ}\})\mathrm{d}S - \int_V(\delta\{u^{\circ}\}^{\mathrm{T}}\{F\}_i + \delta\{u\}_i^{\mathrm{T}}\{F^{\circ}\})\mathrm{d}V, \tag{18}$$

$$\delta\Pi_{ij} = \int_V[\delta\{\varepsilon^{\circ}\}^{\mathrm{T}}([D]_{ij}\{\varepsilon^{\circ}\} + [D]_i\{\varepsilon\}_j + [D]_j\{\varepsilon\}_i + [D^{\circ}]\{\varepsilon\}_{ij}) + \delta\{\varepsilon\}_i^{\mathrm{T}}([D^{\circ}]\{\varepsilon\}_j + [D]_j\{\varepsilon^{\circ}\}) + \delta\{\varepsilon\}_j^{\mathrm{T}}([D^{\circ}]\{\varepsilon\}_i + [D]_i\{\varepsilon^{\circ}\}) + \delta\{\varepsilon\}_{ij}^{\mathrm{T}}[D^{\circ}]\{\varepsilon^{\circ}\}]\mathrm{d}V - \int_{su}(\delta\{u^{\circ}\}^{\mathrm{T}}\{T\}_{ij} + \delta\{u\}_{ij}^{\mathrm{T}}\{T^{\circ}\} + \delta\{u\}_i^{\mathrm{T}}\{T\}_j + \delta\{u\}_j^{\mathrm{T}}\{T\}_i)\mathrm{d}S - \int_V(\delta\{u^{\circ}\}^{\mathrm{T}}\{F\}_{ij} + \delta\{u\}_{ij}^{\mathrm{T}}\{F^{\circ}\} + \delta\{u\}_i^{\mathrm{T}}\{F\}_j + \delta\{u\}_j^{\mathrm{T}}\{F\}_i)\mathrm{d}V• \tag{19}$$

真实位移 $\{u^{\circ}\}$, $\{u\}$, $\{u\}_{ij}$ 必须使上述三式的一阶变分为零• 即:

$$\delta\Pi^{\circ} = 0, \quad \delta\Pi_i = 0, \quad \delta\Pi_{ij} = 0• \tag{20}$$

上述三式就是基于二阶摄动的模糊随机变分原理• 在这三个式中, 宗量 $\{u^{\circ}\}$ 要同时满足 $\Pi^{\circ}$, $\Pi_i$, $\Pi_{ij}$ 的变分要求, $\{u\}_i$ 必须满足 $\Pi_i$, $\Pi_{ij}$ 的变分要求, 而 $\{u\}_{ij}$ 只需满足 $\Pi_{ij}$ 的变分要求即可• 也就是说, $\Pi_i$ 的变分表达式中包含了 $\Pi^{\circ}$ 对 $\{u^{\circ}\}$ 的变分要求; $\Pi_{ij}$ 的变分表达式中不仅包含了 $\Pi^{\circ}$ 对 $\{u^{\circ}\}$ 的变分要求, 而且包含了 $\Pi_i$ 对 $\{u^{\circ}\}$, $\{u\}_i$ 的变分要求• 由此可以得出这样的结论: 模糊随机泛函的摄动展式中, 高阶展式对宗量的变分要求包含了所有比它低阶的摄动展式的变分要求• 所以, 这时只需对最高阶的展式求变分, 即可得到模糊随机计算所需的全部控制方程• 这正是本节着力揭示的摄动模糊随机变分原理内在的规律•

## 4　模糊随机变分原理的应用

模糊随机变分原理除了可以推导模糊随机有限元及其它模糊随机数值方法[1]外, 还可以直接用于结构的解析计算中• 以下以弹性直梁的横力弯曲为例加以说明•

当梁在横向外荷载 $q(x)$ 作用下发生小变形挠曲时, 其总势能泛函为:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^a \varepsilon^{\mathrm{T}} D\varepsilon \mathrm{d}x - \int_0^a u^{\mathrm{T}} q \mathrm{d}x, \tag{21}$$

式中, $u$ 表示梁的横向挠度, $D$ 表示梁的抗弯刚度·

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2}.$$

当我们考虑 $D$ 和 $q$ 的模糊随机性时, $\varepsilon$, $\Pi$ 和 $u$ 都具有模糊随机性· 即:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^a \varepsilon D\varepsilon \mathrm{d}x - \int_0^a u^{\mathrm{T}} q \mathrm{d}x. \tag{22}$$

根据小参数摄动法, 参照式(14) ~ (16), 可以得到 $\Pi$ 的摄动展式:

$$\Pi^{\circ} = \int_0^a \left( \frac{1}{2}\varepsilon^{\circ} D^{\circ}\varepsilon^{\circ} - u^{\circ} q^{\circ} \right) \mathrm{d}x, \tag{23}$$

$$\Pi_i = \int_0^a \left[ \frac{1}{2}(\varepsilon^{\circ} D_i \varepsilon^{\circ} + 2\varepsilon^{\circ}\overline{D^{\circ}}\varepsilon_i) - (u^{\circ} q_i + u_i q^{\circ}) \right] \mathrm{d}x, \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\Pi_{ij} = \int_0^a \Big[ & \frac{1}{2}(\varepsilon^{\circ} D_{ij} \varepsilon^{\circ} + 2\varepsilon_i \overline{D^{\circ}}\varepsilon_j + 2\varepsilon^{\circ} D_i \varepsilon_j + 2\varepsilon^{\circ} D_j \varepsilon_i + 2\varepsilon^{\circ} D^{\circ}\varepsilon_{ij}) - \\ & (u^{\circ} q_{ij} + u_{ij} q^{\circ} + u_i q_j + u_j q_j)) \Big] \mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{25}$$

根据模糊随机变分原理式(20), 对式(23) ~ (25) 求极值, 可得如下控制方程:

$$\left.\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[D^{\circ}\frac{\mathrm{d}^2 u^{\circ}}{\mathrm{d}x^2}\right] = q^{\circ}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[D^{\circ}\frac{\mathrm{d}^2 u_i}{\mathrm{d}x^2} + D_i\frac{\mathrm{d}^2 u^{\circ}}{\mathrm{d}x^2}\right] = q_i, \\ & \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[D_{ij}\frac{\mathrm{d}^2 u^{\circ}}{\mathrm{d}x^2} + D_i\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + D_j\frac{\mathrm{d}^2 u_i}{\mathrm{d}x^2} + D^{\circ}\frac{\mathrm{d}^2 u_{ij}}{\mathrm{d}x^2}\right] = q_{ij}. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

除了本质边界条件必须强迫满足外, 自然边界条件可通过变分求极值的过程得到· 这个过程同求控制方程的过程一样, 尽管比较繁琐, 但并不困难· 这里列出结果:

1) 固定端(本质边界条件):

$$u^{\circ} = \frac{\mathrm{d}u^{\circ}}{\mathrm{d}x} = 0, \quad u_i = \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}x} = 0, \quad u_{ij} = \frac{\mathrm{d}u_{ij}}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{27}$$

2) 简支端(本质边界条件和自然边界条件):

$$u^{\circ} = \frac{\mathrm{d}^2 u^{\circ}}{\mathrm{d}x^2} = 0, \quad u_i = \frac{\mathrm{d}^2 u_i}{\mathrm{d}x^2} = 0, \quad u_{ij} = \frac{\mathrm{d}^2 u_{ij}}{\mathrm{d}x^2} = 0. \tag{28}$$

3) 自由端(自然边界条件):

$$\frac{\mathrm{d}^2 u^{\circ}}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^3 u^{\circ}}{\mathrm{d}x^3} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}^2 u_i}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^3 u_i}{\mathrm{d}x^3} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}^2 u_{ij}}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^3 u_{ij}}{\mathrm{d}x^3} = 0. \tag{29}$$

上述控制方程及边界条件是通过对式(23) ~ (25) 分别求极值得到的综合结果· 事实上, 我们也可以仅对式(25) 通过变分求极值, 这样仍可得到上述控制方程和边界条件· 这正是基于摄动法的不确定性变分原理的一个特点·

根据上述控制方程和边界条件, 可以通过递归求解得到 $u^{\circ}$, $u_i$, $u_{ij}$· 代入 $u$ 的摄动展式(13) 中, 得到位移的表达式· 进而可得其均值和方差:

$$\begin{aligned} E[u] &= u^{\circ} + \sum_{i=1}^{n} E[\gamma_i] u_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} E[\gamma_i \gamma_j] u_{ij} = \\ & u^{\circ} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (E[\alpha_i \alpha_j] + \beta_i \beta_j) u_{ij}. \end{aligned} \tag{30}$$

由于随机场统计信息的高阶矩较难获得· 故而 $u$ 的方差可按下式计算:

$$\mathrm{var}[u] = \sum_{i,j=1}^{n} u_i u_j \left( E[\gamma_i \gamma_j] - E[\gamma_i] E[\gamma_j] \right) = \sum_{i,j=1}^{n} u_i u_j E[\alpha_i \alpha_j] \cdot \tag{31}$$

## 5 结　论

模糊随机变分原理不仅可以应用于模糊随机数值方法递归方程的推导, 同时避免了“先引入后忽略”的缺陷, 从而为模糊随机数值方法奠定了理论基础• 并且模糊随机变分原理为结构的模糊随机分析开劈了一条新的道路•

在模糊随机泛函的摄动展式中, 由于高阶展式对宗量的变分要求包含了所有比它低阶的摄动展式的变分要求• 所以, 这时只需对最高阶的展式求变分, 即可得到模糊随机计算所需的全部控制方程及边界条件• 对梁的模糊随机分析仍可证明这一点•

将峰型模糊随机参数在其真值的期望处按二阶摄动展开, 可以使参数的模糊性和随机性按同一格式处理, 从而大大简化计算•

[参 考 文 献]

[1] 杨绿峰. 模糊随机有限元法及其应用[D]. 博士学位论文. 武汉: 武汉工业大学, 1998.

[2] 李桂青等. 结构动力可靠性理论及应用[M]. 北京: 地震出版社, 1993.

# Fuzzy Stochastic Variable and Variational Principle

Yang Lufeng[1], Li Guiqing[2]

(1. College of Civil Engineering, Guangxi University, Nanning 530004, P R China;
2. Institute of Aseismatic, Structure Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, P R China)

**Abstract**: In this paper the peaky fuzzy stochastic variable and its mean of real value were proposed besed on the concept of fuzzy probability. Fuzziness and randomness were introduced into the functional of overall potential energy. So the fuzzy stochastic variational principle and its application were presented by means of perturbation method.

**Key words**: variational principle; fuzzy stochastic; peaky fuzzy number