应用数学和力学, 第 20 卷 第 6 期(1999 年 6 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 06_0633_07

微分包含的周期生存轨道*

王 志 华

(山东电力研究院 经济研究所, 济南 250002)

(协平推荐)

摘要: 对微分包含的周期生存轨道进行了研究讨论• 首先给出微分包含生存问题的一约化性质; 然后, 利用投影微分包含的方法给出有限维空间中微分包含的周期生存轨道的一个存在性结果; 在此基础上, 利用 Galerkin 逼近方法得到 Hilbert 空间中偏微分包含周期生存轨道的存在性定理•

关 键 词: 微分包含; 相依锥; 生存轨道; Galerkin 方法
中图分类号: O177.5 文献标识码: A

1 一个约化性质

我们首先给出微分包含生存问题的一个约化性质, 这一结果允许我们将具有线性增长条件的生存问题归结为有界生存问题, 这对于生存问题的研究是极为方便的•

文中所用到的关于集值分析的基本概念和记号请参见文献[1]~[3]•

设X 是一个 Banach 空间, $I = [0, T]\ (T > 0) \subset R$, $F: I \times X \to 2^X \setminus \Phi$是一个集值映象•我们考察如下微分包含的初值问题

$$x'(t) \in F(t, x(t)) \text{ a.e.},\ x(0) = x_0 \in X• \tag{1}$$

定义 $x(\cdot): I \to X$ 称为是问题(1) 的一个解, 如果$x(\cdot)$ 绝对连续, 对几乎所有的 $t \in T$, $x'(t) \in F(t, x(t))$, 且 $x(0) = x_0$•

设$K \subset X$ 是一个非空闭集• 称(1) 的一个解$x(\cdot)$ 于K 内生存, 如果有$x(t) \in K$, $t \in I$•此时又称 $x(\cdot)$ 是问题(1) 的一个生存解• 一个生存问题可以从数学上描述如下

$$x(t) \in F(t, x(t)), x(0) = x_0,\ x(t) \in K,\ \forall t \in I• \tag{2}$$

形如(2) 的生存问题广泛地出现于控制论和经济学等领域中, 并于近一时期得到了系统的研究, 参见文献[2]• 为了得到生存问题(2) 的整体解, 通常需要对集值映象 F 增加一个线性增长条件:

$$\| F(t, x) \| = \sup\{ \| y \| : y \in F(t, x)\} \leqslant C(t)(1 + \| x \|),$$
$$(t, x) \in I \times X, \tag{3}$$

其中 $C(\cdot) \in L^1[I, R_+]$ 是一个可积函数•

我们现在要证明, 对于生存问题(2), 关于集值映象的线性增长条件(3) 可以改为如下更简单的有界性条件:

$$\| F(t, x) \| \leqslant 1, \qquad (t, x) \in I \times X• \tag{4}$$

* 收稿日期: 1997_01_23; 修订日期: 1998_11_10
作者简介: 王志华(1959~), 男, 副教授, 博士.

定义　称非空闭集 $K\subset X$ 是 F 的生存域, 如果有

$$F(t,x)\cap T_K(x)\neq\Phi,\qquad (t,x)\in I\times K\cdot \tag{5}$$

(5) 中的 $T_K(x)$ 表示 K 在 $x\in K$ 的相依锥, 相依锥的有关性质见文献[1]～[3]•

命题 1　对于生存问题(2), 设 F 取闭凸值并满足(5)•　又以 $S_K^1(F)$ 和 $S_K^2(F)$ 表示 F 满足(3) 和(4) 时生存问题(2) 的解集•　则有

$$S_K^1(F)=S_K^2(F)\cdot$$

证明　设 $x(\cdot)\in S_K^1(F)$•　则有 $\|x'(t)\|\leqslant C(t)(1+\|x(t)\|)$ a. e.•　因为 $x(\cdot)$ 是绝对连续的, 从而有

$$x(t)=x_0+\int_0^t x'(s)\mathrm{d}s,\ t\in I\cdot$$

于是由条件(3) 得到

$$\|x(t)\|\leqslant\|x_0\|+\int_0^t\|x'(s)\|\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\|x_0\|+\int_0^t C(s)(1+\|x(s)\|)\mathrm{d}s\cdot$$

利用 Gronwall 不等式, 我们得到存在 $M>1$ 使得 $\|x\|=\max\{\|x(t)\|;t\in I\}\leqslant M$•

定义一个连续函数 $\varphi(r)=1,\ r\leqslant M;\ \varphi(r)=0,\ r>M+1$, 而在$(M,M+1)$ 中, φ 是线性的•　又令 $F(t,x)=\varphi(\|x\|)F(t,x),(t,x)\in I\times K\cap B_{M+1}(0)$•　以 $S_K^3(F)$ 表示用 F 代替生存问题(2) 中映象 F 时相应的解集, 则显然有 $S_K^1(F)=S_K^3(F)$•　事实上, 因为 $T_K(\cdot)$ 是闭锥, 从而有 $\alpha T_K(x)\subset T_K(x),\ \forall\alpha>0$•　记 $K=K\cap B_{M+1}(0)$•　则由(5) 可以得到 $F(t,x)\cap T_K(x)\neq\Phi,(t,x)\in I\times K$•　此时又有 $x(\cdot)\in S_K^3(F)$•　注意到

$$\|F(t,x)\|=\varphi(\|x\|)\|F(t,x)\|\leqslant$$
$$\varphi(\|x\|)C(t)(1+M+1)\leqslant kC(t),$$

即线性增长条件(3) 中的因子$(1+\|\cdot\|)$ 可以忽略•　现在我们不妨设 $C(t)>1$•　定义函数 Φ 为

$$\Phi(t)=\int_0^t C(s)\mathrm{d}s,\qquad t\in I,$$

则 Φ 是单调的, 因此存在反函数, 记为 $\psi:[0,T]\to[0,T]$•　其中

$$T=\int_0^T C(s)\mathrm{d}s\cdot$$

令 $z(t)=x(\psi(t))$•　则我们得到如下的一个等价问题

$$z'(t)\in F(t,z(t)),\ z(0)=x_0,\ F(t,z)=C(\psi(t))^{-1}F(\psi(t),z)\cdot \tag{6}$$

但此时有 $\|F(t,z)\|\leqslant 1,(t,z)\in I\times K$•　综上, 我们得到 $S_K^1(F)=S_K^2(F)$•

注 1　在文献[4]中, Frankowska 和 Plaskacz 曾对微分包含的初值问题(1) 得到一个约化性质, 但仅将线性增长条件(3) 中的后一个因子去掉•

2　引　　理

引理 1　设 K 是 $X=R^n$ 中的非空闭集, 以 $\pi_K:X\to 2^X$ 表示由 X 到 K 的度量投影, 即 $\pi_K(x)=\{y\in K:\|y-x\|=d(x,K)\}$•　则当 K 是紧集时, $\pi_K(\cdot)$ 是取非空紧值的上半连续映象•　如果 K 又是凸集, 则 $\pi_K(\cdot)$ 取凸值•

引理 2　设 $X=R^n,I=[0,T]\subset R,K\subset X$ 是一个闭凸集•　则微分包含

$$x'(t) \in F(t, \pi_K(x)),\ x(0) = x_0 \in K \tag{7}$$

的任一个解 $x(\cdot)$ 都满足 $x(t) \in K,\ \forall t \in I$.

证明　设 $x(\cdot)$ 是问题(7) 的任一个解, 我们证明有 $x(t) \in K,\ \forall t \in I$.

令 $\varphi(t) = d^2(x(t), K)$. 因为 d 是 Lipschitz 映象, $X(\cdot)$ 绝对连续, 从而 φ 是绝对连续的. 又 K 是凸集, 因此, π_K 是单值的, 并且有

$$\| \pi_K(x) - \pi_K(y) \| \leqslant \| x - y \|,\ \langle y - \pi_K(x), x - \pi_K(y) \rangle \leqslant 0,\quad \forall y \in K. \tag{8}$$

设 $\psi(x) = 0.5 d^2(x, K),\ x \in X$. 由[5] (p221), 我们得到

$$[d^2(x, K)]' = x - \pi_K(x). \tag{9}$$

利用这一结果, 我们有 $\varphi'(t) = 2\langle x(t) - \pi_K(x(t)), x'(t) \rangle$. 由相依锥的定义, 我们又得到 $x'(t) \in T_K(\pi_K(x(t)))$ a. e. $t \in I$. 从而存在 $\lambda_n \geqslant 0,\ k_n \in K$ 使得

$$x'(t) = \lim \lambda_n (k_n - \pi_K(x(t))) \quad (n \to \infty).$$

于是由(8) 得到 $\varphi'(t) \leqslant 0$ a. e. $t \in I$. 这样我们有 $\varphi(t) = 0,\ t \in I$, 即 $x(t) \in K,\ t \in I$.

引理 3　设 X、Y 是 Banach 空间, F_1、$F_2: X \to 2^Y \setminus \Phi$ 取闭凸值且下半连续. 如果 $F = F_1 \cap F_2$ 取有界值且 $\operatorname{int} F \neq \Phi,\ x \in X$. 则 F 下半连续.

证明　取 $x_0 \in X,\ M = \| F(x_0) \|$. 由假设, 存在 $r > 0$ 使得 $B_r(y_0) \subset F(x_0)$. 取 δ 满足 $0 < \delta < M$, 令

$$\Omega = \frac{\delta}{M} y_0 + \left(1 - \frac{\delta}{M}\right) F(x_0),$$

则当 $\varepsilon = \delta r / M$, 必有

$$\Omega + B_\delta(0) \subset F(x_0) \subset \Omega + B_{2\delta}(0).$$

因为 F_1、F_2 是下半连续的, 从而存在一个 $\alpha > 0$ 使得 $F_i(x_0) \subset F_i(x) + B_\delta(0),\ x \in B_\alpha(0),\ i = 1, 2$. 于是有

$$\Omega + B_\delta(0) \subset F_i(x) + B_\delta(0), \qquad x \in B_\alpha(x_0),\ i = 1, 2.$$

我们证明必有 $\Omega \subset F_i(x),\ x \in B_\alpha(x_0),\ i = 1, 2$. 如果不然, 存在 $z \in \Omega \setminus F_i(x),\ x \in B_\alpha(x_0)$. 由凸集分离定理, 存在 $f \in Y^*$ 使得 $f(z) > \beta \geqslant f(y),\ y \in F_i(x)$, 于是我们得到

$$\sup\{ f(s + u): s \in \Omega,\ u \in B_\delta(0) \} > \beta + \sup\{ f(u): u \in B_\delta(0) \} \geqslant \sup\{ f(y + u): y \in F_i(x),\ u \in B_\delta(0) \}.$$

这是一个矛盾. 于是 $\Omega \subset F(x),\ x \in B_\alpha(x_0)$. 即有

$$F(x_0) \subset F(x) + B_{2\delta}(0), \qquad x \in B_\alpha(x_0).$$

从而 F 在 x_0 下半连续.

利用与[1] 中类似的方法([1], p86, Theorem 1), 我们可以得到如下的逼近引理.

引理 4　设 X、Y 是两个 Banach 空间, $I = [0, T] \subset R,\ F: I \times X \to 2^Y \setminus \Phi$ 取闭凸值. 记 $r_n = 3^{-n}$, $(\Omega_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ 是 X 的开复盖 $\{B_{r_n}(x)\}_{x \in X}$ 的一个局部有限的加细开复盖, $(\psi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ 是从属于 $(\Omega_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ 的一个局部 Lipschitz 单位分解. 记

$$x_\lambda \in \Omega_\lambda \subset B_{r_n}(x_\lambda),$$

令
$$F_n(t, x) = \sum_\lambda \psi_\lambda(x) C_\lambda,\quad C_\lambda = \overline{\operatorname{conv}} F(t, B_{3r_n}(x)).$$

则有

1) $F(t, x) \subset F_{n+1}(t, x) \subset F_n(t, x) \subset \overline{\operatorname{conv}} F(t, B_{3r_n}(x)),\ \forall (t, x) \in I \times X$;

2) 当 $F(\cdot, x)$ 可测时, $F_n(\cdot, x)(n \geqslant 1)$ 可测;

3) 当 F 一致局部有界时, 对充分大的 n, F_n 是局部 Lipschitz 映象;

4) 如果 $F(t, \cdot)$ 上半连续, 则 $d_H(F(t, x), F_n(t, x)) \to 0(n \to \infty)$;

其中, $d_H(A, B)$ 表示非空闭集 A 和 B 之间的 Hausdorff 距离•

3 有限维结果

本节我们在有限维空间中证明生存问题(2)周期轨道的存在性• 这一结果既是文献[1]中相应结果([1], p237, Theorem 4)的一个本质改进, 同时也是本文下节研究的基础•

定理 1 设 $X = R^n$, $I = [0, T](T > 0) \subset R$, $K \subset X$ 是一个紧凸集• 又设 $F: I \times X \to 2^X \setminus \Phi$ 取闭凸值, 且满足

1) $F(\cdot, x)$ 可测, $F(t, \cdot)$ 上半连续;

2) $F(t, x) \cap T_K(x) \neq \Phi, (t, x) \in I \times K$;

3) $\| F(t, x) \| \leqslant C(t)(1 + \| x \|), (t, x) \in I \times K, C(\cdot) L^1[I, R_+]$•

则生存问题(2)存在一个解 $x(\cdot)$ 满足 $x(0) = x(T)$•

证明 由命题 1, 我们可设 $\| F(t, x) \| \leqslant 1, (t, x) \in I \times K$•

记 $K_\delta = \left\{ d(x, K) \leqslant \delta \right\}$, $\delta > 0$• 令 $G(t, x) = F(t, \pi_K(x)), (t, x) \in I \times X$• 由引理 1, $G(\cdot, x)$ 可测, $G(t, \cdot)$ 上半连续• 利用引理 4, 存在 $F_n(\cdot, \cdot)$, $n \geqslant 1$ 满足引理 4 中的结论 1) ~ 4)• 记 $F_n = F_n + B_\delta(0)$, $n \geqslant 1$• 则由 $F(t, x) \cap T_K(x) \neq \Phi, (t, x) \in I \times K$ 知必有 $G(t, x) \cap T_{K_\delta}(x) \neq \Phi, (t, x) \in I \times K_\delta$ 自然也有 $F_n(t, x) \cap T_{K_\delta}(x) \neq \Phi, (t, x) \in I \times K_\delta$ 由构造, 容易看出有 $\operatorname{int}(F_n(t, x) \cap T_{K_\delta}(x)) \neq \Phi, \forall (t, x) \in I \times K_\delta$ 因为 F_n 有界, 可取一个适当的 $R > 0$ 使得 $G_n = F_n \cap B_R(0)$ 仍然具有以上性质, 但此时 G_n 下半连续• 又由[1](p220, Theorem 1), $T_{K_\delta}(\cdot)$ 下半连续• 于是由引理 3 知 $G_n \cap T_{K_\delta}(n \geqslant 1)$ 下半连续, 且取闭凸值• 由 Michael 选择定理([1], p82, Theorem 1), 存在连续的 f_δ• $I \times K_\delta \to X$ 使得

$$f_\delta(t, x) \in F_n(t, x) \cap T_{K_\delta}(x), \qquad (t, x) \in I \times K_\delta \tag{10}$$

我们再定义 $f_\delta(t, x) = f_\delta(t, \pi_{K_\delta}(x))$ 则 f_δ• $I \times X \to X$ 连续• 利用局部 Lipschitz 逼近引理([6], p47, 引理 3.1.1), 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在局部 Lipschitz 函数 g_δ 使得

$$\| f_\delta(t, x) - g_\delta(t, x) \| \leqslant \varepsilon, \qquad (t, x) \in I \times X \tag{11}$$

考察初值问题

$$u'(t) = g_\delta(t, u(t)), \ u(0) = x \in K_\delta, \tag{12}$$

(12)存在唯一的解 $u_\delta(\cdot, x)$ 满足

$$\| u'_\delta(t, x) - f_\delta(t, \pi_{K_\delta}(x)) \| \leqslant \varepsilon \tag{13}$$

注意到算子 $\pi_{K_\delta} u(T, x): K_\delta \to K_\delta$ 连续, 又 K_δ 是紧凸集, 从而由 Brouwer 不动点定理知, 存在唯一的 x_δ 使得 $u_\delta(T, x_\delta) = x_\delta = u_\delta(0, x_\delta)$•

我们取一列单调下降趋于零的正数 ε_n, $n \geqslant 1$• 则得到初值问题(12)的一个解序列 $u_{\delta_n}(t, x)$ 满足 $u_{\delta_n}(T, x_{\delta_n}) = u_{\delta_n}(0, x_{\delta_n})$• 注意到 K_δ 是紧集, 于是由引理 2 和常规的方法可知, 如果令 $n \to \infty$, 则得到 $u' = f_\delta(t, u)$ 的一个解 u_δ 满足 $u_\delta(T) = u_\delta(0)$, $u_\delta(t) \in K_\delta$, $t \in I$• 我们再取一列单调下降且趋于零的正数 δ_n, $n \geqslant 1$, 则当 $n \to \infty$ 时, 得到微分包含 $x'(t) \in F_n(t, x(t))$ 的一个解 $x_n(\cdot)$, 满足 $x_n(T) = x_n(0)$ 且有 $x_n(t) \in K$, $t \in I$• 最后, 我们令 $n \to \infty$, 并注意到引理 4 中的结论 4), 即得到生存问题(2)的一个周期生存解•

注 2　即便是在微分方程的情形, 定理 1 的结论也是新的•

4　偏微分包含的周期生存解

本节我们对于一类偏微分包含问题证明周期生存解的存在性, 所采用的方法是 Galerkin 逼近方法•

设 V, H 是两个 Hilbert 空间• V 的内积和范数记为$(\cdot, \cdot)$ 和 $\|\cdot\|$, H 中的内积和范数记为$\langle\cdot, \cdot\rangle$ 和$|\cdot|$• 假设线性空间 $V \subset H$, 并且当 $v \in V$ 时, 有 $\|v\| \leqslant c|v|$, 其中 $c > 0$ 是一个常数• 即 V 嵌入H 是连续的• 同时设 V 在H 中稠密• 记 V 的对偶空间为V', V' 的内积和范数记为$(\cdot, \cdot)'$ 和 $\|\cdot\|'$• 将H 的对偶空间H' 与H 等同• 则有以下关系:

$$V \subset H = H' \subset V' \cdot \tag{14}$$

在嵌入关系(14) 中, 相应的嵌入都是连续的, 并且 V 在H 中稠密, H 在V' 中稠密又有$\langle\cdot, \cdot\rangle = (\cdot, \cdot)_{V\times V'}$• 以 $J \in L(V, V')$ 表示对偶算子• 由 Riesz_Fredholm 理论([7], p236), 存在J^{-1} 的一个特征向量序列$\{e_n\}_{n\geqslant 0}$ 和一个对应的特征值序列$\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ 使得

1) $e_n = \lambda_n J e_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, 其中 $\lambda_0 \geqslant \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots$, $\lim \lambda_n = 0\ (n \to \infty)$;

2) $\langle e_j, e_k\rangle = \delta_{jk}$, $(e_j, e_k) = \lambda_j^{-1}\delta_{jk}$, $(e_j, e_k) = \lambda_j\delta_{jk}$;

3) $\forall u \in V'$, $u = \sum_{n=0}^{\infty}\langle u, e_n\rangle e_n$•

以 $V_n \subset V$ 表示由$\{e_0, e_1, \cdots e_n\}$ 生成的子空间, 则 V_n 满足

1) $\forall u \in V$, $d(u, V_n) \to 0\ (n \to \infty)$;

2) 对于给定的 $u \in V'$, $P_n u = \sum_{j=0}^{n}\langle u, e_j\rangle e_j \in V_n$ 是从$V'(V, H)$ 到 V_n 上的投影•

设K 是H 中的一个非空闭集, 如果存在 V 的一个闭子空间序列$\{V_n\}$ 使得

$$V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n \cdots \subset V,\ \forall u \in H,\ |u - P_n u| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

并且 $K_n = P_n K = K \cap V_n$ 是紧的, $n = 0, 1, \ldots$, 则称 K 具有内逼近性质[8]•

称算子 $A \in L(V, V')$ 是一个 V_椭圆算子, 如果存在正常数 c 使得

$$\forall v \in V,\ \langle Av, v\rangle \geqslant c\|v\|^2 \cdot \tag{15}$$

记　$W(0, T) = \{x(\cdot) \in L^2[I, V] : x'(\cdot) \in L^2[I, V']\} \subset C[I, X]$•

我们需要以下的假设:

(HA) $A \in L(V, V')$ 满足

1) A 是单调的 V_椭圆算子;

2) $\|Ax\|' \leqslant \beta(1 + \|x\|)$, $\forall x \in V$•

(HF) $F: I \times K \to 2^H \setminus \Phi$ 取闭凸值, 满足

1) $F(\cdot, x)$ 可测, $F(t, \cdot)$ 上半连续;

2) $|F(t, x)| \leqslant k(t)(1 + |x|)$, $K(\cdot) \in L^1[I, R_+]$, $(t, x) \in I \times K$;

3) $\forall t \in I$, $x \in K \cap V$, $(F(t, x) - Ax) \cap T'_K(x) \neq \Phi$, 其中 $T'_K(x)$ 表示 K 在$x \in K$ 关于空间 V' 的相依锥•

(HK) $K \subset H$ 是一个非空闭凸集, 且具有内逼近性质•

定理 2　设假设(HA), (HF) 和(HK) 成立• 则偏微分包含生存问题

$$x'(t) + Ax(t) \in F(t, x(t)) \qquad \text{a. e. } x(t) \in K,\ t \in I \tag{16}$$

存在一个周期解•

证明　首先由[3](Ch. 8)易知 $P_nF(\cdot, x)$ 可测, 注意到 V 是Hilbert 空间, 又知 $P_nF(t, \cdot)$ 上半连续· 以下我们分三步证明定理2·

1. 构造问题(16)的 Galerkin 逼近问题

$$x_n'(t) + P_nAx_n(t) \in P_nF(t, x_n(t)), \qquad x_n(t) \in K_n = P_nK· \tag{17}$$

因为 $\forall (t, x) \in I \times P_nK, (F(t, x) - Ax) \cap T_K'(x) \neq \Phi$· 从而我们有

$$\forall (t, x) \in I \times P_nK, \ P_n(F(t, x) - Ax) \cap P_nT_K'(x) \neq \Phi· \tag{18}$$

但由于 $P_nx = x, x \in P_nK, P_nT_K'(x) \subset T_{P_nK}(P_nx)$ ([7], p440), 于是我们得到

$$\forall (t, x) \in I \times P_nK, (P_nF(t, x) - P_nAx) \cap T_{P_nK}'(x) \neq \Phi· \tag{19}$$

注意到 P_nK 是紧凸集, 因此由定理1, 问题(17)存在一个解满足 $x_n(0) = x_n(T)$· 这样我们得到问题(17)的一个解序列 $\{x_n(\cdot)\}_{n\geqslant 1}, x_n(0) = x_n(T), n \geqslant 1$·

对[8]中的证明过程作明显的修正, 我们可以证明 $\{x_n(\cdot)\}_{n\geqslant 1}$ 在 $W(0, T)$ 中有界, 从而可以假设存在两个正常数 M_1、M_2 使得

$$\| x_n(t) \|_{L^2[I, V]} \leqslant M_1, \quad \| x_n'(t) \|_{L^2[I, V']} \leqslant M_2, \qquad n \geqslant 1· \tag{20}$$

2. 由(20), 我们有 $x_n \xrightarrow{w} x(W(0, T))$· 因为 $W(0, T)$ 能够紧嵌入到 $L^2[I, H]$ 中, 从而又有 $x_n \xrightarrow{s} x(L^2[I, H])$· 由解的定义, 我们知道存在 $f_n \in L^2[I, H], f_n(t) \in F(t, x_n(t))$ a. e· 使得

$$x_n'(t) + P_nAx_n(t) = P_nf_n(t) \text{ a. e.}, \ x_n(0) = x_n(T), \ x_n(t) \in K_n· \tag{21}$$

由(HF) 2)和(20), 我们有 $| f_n(t) | \leqslant k(t)(1 + M_1)$ a. e., 从而可设

$$f_n \xrightarrow{w} f(L^2[I, H])· \tag{22}$$

因为在 $d(f, S^1_{F(\cdot, x(\cdot))}) \leqslant \liminf d(f_n, S^1_{F(\cdot, x_n(\cdot))}) = 0(n \to \infty)$, 从而得到 $f \in S^1_{F(\cdot, x(\cdot))}$· 我们记 $(\cdot, \cdot)_1$ 为空间 $L^2[I, V]$ 和 $L^2[I, V']$ 之间的对偶积, 即

$$(f, g)_1 = \int_0^T \langle f(t), g(t) \rangle \mathrm{d}t, \qquad f \in L^2[I, V], \ g \in L^2[I, V']· \tag{23}$$

由(21), 我们有

$$(x_n', x_n - x)_1 + (P_n(Ax_n)(t), x_n - x)_1 + ((P_nf_n)(t), x_n - x)_1· \tag{24}$$

利用 $W(0, T)$ 中的分部积分公式(例如参见[9], p422), 则得

$$((P_nf_n)(t), x_n - x)_1 = (f_n, x_n - P_n^*x)_0 = (f_n, x_n - P_n^*x)_{L^2[I, H]} =$$
$$(f_n, x_n - x)_{L^2[I, H]} + (f_n, x - P_n^*x)_{L^2[I, H]} = (f_n, x_n - x)_{L^2[I, H]} +$$
$$\int_0^T (f_n(t), x(t) - P_n^*x(t))\mathrm{d}t·$$

3. 因为有 $(f_n, x_n - x)_{L^2[I, H]} \to 0(n \to \infty), | x(t) - P_n^*x(t) | \to 0$, 从而得到 $(P_nf_n, x_n - x)_1 \to 0(n \to \infty)$· 这样再由(24)我们可以得到

$$\lim(P_nAx_n, x_n - x)_1 = 0 \qquad (n \to \infty)· \tag{25}$$

注意到(HA) 2), (20)及 $(Ax_n, x_n - P_n^*x)_1 \to 0, \| P_n^*x - x \|_{L^2[I, H]} \to 0(n \to \infty)$· 我们得到 $\lim(Ax_n, x_n - x)_1 = 0$· 由(HA)和[9](p583), 我们有

$$Ax_n \xrightarrow{w} Ax(L^2[I, V'])· \tag{26}$$

对于任意的 $v \in L^2[I, V]$, 我们有

$$(P_nAx_n, v)_1 = (Ax_n, P_n^*v)_1 \to (Ax, v)_1, \ 即 \ P_nAx_n \xrightarrow{w} Ax(L^2[I, V'])·$$

综上, 我们得到

$$x_n' + P_n A x_n \xrightarrow{w} x' + Ax(L^2[I, V']),\ f_n \xrightarrow{w} f(L^2[I, H]),$$

从而有

$$x'(t) + Ax(t) = f(t) \in F(t, x(t)), x(0) = x(T), x(t) \in K \bullet$$

即偏微分包含问题(16) 存在一个周期生存解•

参 考 文 献

[1] Aubin J P, Cellina A. Differential Inclusions [M]. New York: Springer_Verlag, 1984.

[2] Aubin J P. Viability Theory [M]. Boston: Birkauser, 1991.

[3] Aubin J P, Frankowska H. Set_Valued Analysis [M]. Boston: Birkauser, 1992.

[4] Frankowska H. Plaskacz S. A measurable upper semicontinuous viability for tubes [J]. Nonlinear Analysis, TMA, 1996, **26**(3): 565~ 582.

[5] 李训经等• 最优控制系统的微分方程理论, 北京: 高等教育出版社, 1989.

[6] 郭大钧, 孙经先. 抽象空间中常微分方程理论[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1989.

[7] Aubin J P. Applied Functional Analysis [M]. New York: Wiley_Interscience, 1977.

[8] Shi Shuzhong. Nagumo type conditions for partial differential inclusions [J]. Nonlinear Analysis TMA, 1988, **12**(9): 951~ 957.

[9] Zeidler E. Nonlinear Functional Analysis and Its Applications [M]. Vol. 2, New York: Springer_Verlag, 1990.

Periodic Viable Trajectories of Differential Inclusions

Wang Zhihua

(Institute of Economics, Shangdong Electric Power Research Institute, Jinan 250002, P R China)

Abstract: In this paper the periodic viable trajectories of differential inclusions are discussed. Firstly, a simplified proprety of differential inclusions is given. Then, an existence theorem of periodic viable trajectories of differential inclusions in a finite dimensional space is proved. With the above results and Galerkin' s approximation, an existence theorem of periodic viable trajectories of partial differential in a Hilbert space is proved.

Key words: differential inclusion; contigent cone; viable trajectory; Galerkin approximation