应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999)06_0640_07

一类非线性积分偏微分方程的初值问题*

郭 艾

(甘肃工业大学 数学教研室, 兰州 730050)

(许政范推荐)

摘要: 讨论初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-au_{xxt}-p(u_x)_x-\int_0^t\lambda(t-s)q(u_x)_x\mathrm{d}s=f(x,t) & (-\infty<x<+\infty)\ t>0, \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x) & (-\infty<x<+\infty) \end{cases}$$

整体经典解的存在性• 该问题来源于粘弹性力学• 在关于已知函数的一些正则性假设和 $p'(s)\geqslant c_1>0$, $|q'(s)|\leqslant \mathrm{const}$, $\lambda(0)<0$, $\lambda'(0)<\lambda^2(0)$ 的条件下, 通过能量估计, 证明了该问题整体经典解的存在性•

关 键 词: 初值问题; 积分偏微分方程; 经典解
中图分类号: O175.6 文献标识码: A

1 问题的提出

考虑无限长均匀粘弹性杆的纵振动问题• 设杆在坐标为 x 处的截面于时刻 t 的位移为 $u(x,t)$, 所承受内力为 $N(x,t)$, 我们所讨论的粘弹性杆的非线性纵振动的本构关系为

$$N(x,t)=p(u_x)+\int_0^t\lambda_1(t-s)q(u_x(x,s))\mathrm{d}s+\mu u_{xt}(x,t),$$

其中 $\lambda_1(s)$ 为杆内部损耗的物理量, $\mu>0$ 为耗散常数• 设杆上分布有载荷 $F(x,t)$ 的作用, 易知该杆的纵振动方程为

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^3u}{\partial x^2\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}p\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{1}{\rho}\int_0^t\lambda_1(t-s)\frac{\partial}{\partial x}q\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}s+\frac{1}{\rho A}F(x,t),$$

其中 ρ 为单位体积质量, A 表示杆的横截面积•

在这个力学背景下, 本文讨论下列非线性积分偏微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} u_{tt}-au_{xxt}-p(u_x)_x-\int_0^t\lambda(t-s)q(u_x)_x\mathrm{d}s=f(x,t), & x\in R^1,\ t>0, & (1) \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x), & x\in R^1• & (2) \end{cases}$$

对于方程(1), 当 $p(s)=q(s)$ 时, 文献[1] 证明了只要 $p(s)\in C^2(R)$, 且 $p'(s)\geqslant 0$, 相应的初值问题便对任意充分光滑的初值函数存在整体经典解• 后来文献[2] 做了推广, 讨论了带有非线性外力 $f(u)$, 且 $f(u)$ 满足 $|f'(u)|\leqslant c$ 时的初边值问题, 证明了在 $p(s)$ 满足与[1] 相同的条件下整体强解的存在性• 当 $p(s)\neq q(s)$ 时, 本文将证明, 只要附加条件 $p'(s)\geqslant c_1$

* 收稿日期: 1997_08_11; 修订日期: 1998_03_15
作者简介: 郭艾(1964~), 女, 讲师, 硕士.

>0, $|q'(s)|\leqslant \text{const}$, 我们仍然能够获得整体经典解的存在性.

本文我们假定

(ⅰ) $p(s)\in C^2(R)$, $q(s)\in C^2(R)$, $p(0)=0$, $q(0)=0$, $p'(s)\geqslant c_1>0$, 且 $|q'(s)|\leqslant \text{const}$, $\forall s\in R$;

(ⅱ) $\lambda(s)\in C^2(0,+\infty)$, $\lambda(0)<0$, $\lambda'(0)<\lambda^2(0)$;

(ⅲ) $f(x,t)\in H^2_{\text{loc}}([0,+\infty);H^2_0(R))$, 且对任意 $T>0$, $\partial^k f/\partial x^k\in L^2(R\times[0,T])$, $k=1,2$;

(ⅳ) $\varphi(x)\in H^3_0(R)$, $\psi(x)\in H^2_0(R)$.

本文的主要结果为

定理　在条件(ⅰ)~(ⅳ)下, 初值问题(1)~(2)在 $(-\infty,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上存在经典解.

2　初值问题解的局部存在性

引理 2.1　记 $f_1(x,t)=\int_0^t f(x,s)\mathrm{d}s+\psi(x)-a\varphi''(x)$. 则在已知函数满足条件(ⅰ)~(ⅳ)下, (1)~(2)等价于

$$\begin{cases} u_t-au_{xx}-\int_0^t p(u_x(x,s))_x\mathrm{d}s-\int_0^t q(u_x(x,s))_x\int_0^{t-s}\lambda(r)\mathrm{d}r\mathrm{d}s=f_1(x,t), & (3)\\ u|_{t=0}=\varphi(x), \quad (-\infty<x<+\infty), & (4)\end{cases}$$

证明直接, 从略.

令 $G(x,t)$ 为算子 $\partial/\partial t-a\partial^2/\partial x^2$ 的初值问题的基本解:

$$G(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{a\pi t}}e^{-x^2/4at}, & \text{当 } t>0\\ 0, & \text{当 } t\leqslant 0\end{cases}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

引理 2.2　记

$$Q_1(x,t)=\int_0^t G(x,s)\mathrm{d}s,$$

$$Q_2(x,t)=\int_0^t\int_0^{t-s}\lambda(r)\mathrm{d}rG(x,s)\mathrm{d}s,$$

$$f_2(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}G(x-\xi,t-\tau)f_1(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau+\int_{-\infty}^{+\infty}G(x-\xi,t)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

则(1)~(2)等价于

$$u(x,t)-\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}Q_1(x-\xi,t-\tau)p(u_\xi(\xi,\tau))_\xi\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau-$$
$$\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}Q_2(x-\xi,t-\tau)q(u_\xi(\xi,\tau))_\xi\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau=f_2(x,t). \tag{5}$$

证明从引理 2.1 导出, 从略.

利用引理 2.2, 运用 Picard 逐次迭代方法便可证明初值问题(1)~(2)的解的局部存在性, 即有

引理 2.3　在条件(ⅰ)~(ⅳ)下, 存在 $T_0>0$ 使初值问题(1)~(2)在$(-\infty,+\infty)\times[0,T_0)$ 上存在解 $u(x,t)$ 满足

$$u(x,t)\in C([0,T_0);H^2(R));$$

$$u_t(x,t)\in C([0,T_0);H^2(R));$$
$$u_{tt}(x,t)\in C([0,T_0);L^2(R))\cdot$$

下面我们将通过先验积分估计, 证明问题(1)~(2)的解在$(-\infty,+\infty)\times[0,+\infty)$上整体存在•

3 先验积分估计

在本节中, 我们用C表示与T无关的万用常数, 用$C(T)$表示仅与T有关的万用常数• 这里"万用"的意思是指它们在不同的表达式中可能有不同的值•

引理 3.1 在条件(ⅰ)~(ⅳ)下, 对任意$T>0$, $(1)\sim(2)$在$(-\infty,+\infty)\times[0,T)$上的解$u(x,t)$满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u_t^2\mathrm{d}x+c_1\int_{-\infty}^{+\infty}u_x^2\mathrm{d}x+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xt}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C(T),\qquad \text{当 } t<T\cdot$$

证 对方程(1)乘以u_t再关于x积分, 通过分部积分得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty}u_t^2\mathrm{d}x+a\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xt}^2\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{u_x}p(\eta)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}x=$$
$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t\lambda(t-s)q(u_x(x,s))u_{xt}(x,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,t)u_t\mathrm{d}x\cdot\tag{6}$$

由条件(ⅰ)知$|q(s)|\leqslant c|s|$, 由条件(ⅱ)知$|\lambda(s)|\leqslant C(T)$• 故

$$-\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda(t-s)q(u_x(x,s))u_{xt}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\leqslant$$
$$C(T)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t|u_x(x,s)||u_{xt}(x,t)|\mathrm{d}s\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xt}^2\mathrm{d}x+C(T)\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}u_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\cdot$$

又由条件(ⅰ)知$p(s)\cdot s\geqslant c_1s^2$, 故

$$\int_0^{u_x}p(\eta)\mathrm{d}\eta\geqslant c_1u_x^2,$$

因此有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{u_x}p(\eta)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}x\geqslant c_1\int_{-\infty}^{+\infty}u_x^2\mathrm{d}x\cdot$$

对(6)式关于t积分并注意到上面的不等式就有

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}u_t^2\mathrm{d}x+c_1\int_{-\infty}^{+\infty}u_x^2\mathrm{d}x+\frac{a}{2}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xt}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\leqslant$$
$$C(T)\int_0^\tau\left[\int_{-\infty}^{+\infty}u_t^2\mathrm{d}x+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}u_x^2\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_{-\infty}^{+\infty}f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+C(T),$$

应用 Gronwall 引理即得引理 3.1• 证毕•

引理 3.2 在条件(ⅰ)~(ⅳ)下, 对任意$T>0$, $(1)\sim(2)$在$(-\infty,+\infty)\times[0,T)$上的解$u(x,t)$满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}^2\mathrm{d}x\leqslant C(T)\cdot$$

证 对(1)式乘以$-u_{xx}$并关于x积分, 通过分部积分得

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}u_t\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xt}^2\mathrm{d}x+\frac{a}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}^2\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}p'(u_x)u_{xx}^2\mathrm{d}x=$$
$$-\int_{-\infty}^{+\infty}fu_{xx}\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t\lambda(t-s)q'(u_x(x,s))u_{xx}(x,s)u_{xx}(x,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}x\cdot\tag{7}$$

由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t \lambda(t-s)q'(u_x)u_{xx}(x,s)u_{xx}(x,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}x \leqslant C(T)\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}^2\mathrm{d}x + C(T)\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s,$$

又由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p'(u_x)u_{xx}^2\mathrm{d}x > 0,$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}fu_{xx}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}^2\mathrm{d}x,$$

把上列不等式代入(7)并关于 t 积分后,对 $\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}u_t\mathrm{d}x$ 运用 Cauchy 不等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}u_t\mathrm{d}x \leqslant \frac{a}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}^2\mathrm{d}x + \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}u_t^2\mathrm{d}x,$$

利用引理 3.1 最后得

$$\frac{a}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}^2\mathrm{d}x \leqslant C(T)\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + C(T),$$

由 Gronwall 引理即得引理 3.2• 证毕•

应用 Sobolev 嵌入不等式,由上述引理得:

推论 3.1 在条件(i)~(iv)下,对任意 $T>0$, (1)~(2)在 $(-\infty,+\infty)\times[0,T)$ 上的解 $u(x,t)$ 满足

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}|u_x(x,t)| \leqslant C(T)\text{•}$$

引理 3.3 在条件(i)~(iv)下,对任意 $T>0$, (1)~(2)在 $(-\infty,+\infty)\times[0,T)$ 上的解 $u(x,t)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xt}^2\mathrm{d}x + \int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}u_{tt}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C(T), \qquad \text{当 } t<T;$$

$$\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xxt}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C(T), \qquad \text{当 } t<T\text{•}$$

证 (1)式乘以 u_{tt} 关于 x 积分,通过分部积分得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u_{tt}^2\mathrm{d}x + \frac{a}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xt}^2\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}p'(u_x)u_{xx}(x,t)u_{tt}(x,t)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t\lambda(t-s)q'(u_x)u_{xx}(x,s)u_{tt}(x,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty}fu_{tt}\mathrm{d}x\text{•} \tag{8}$$

由推论 3.1 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p'(u_x)u_{xx}u_{tt}\mathrm{d}x \leqslant M(T)\int_{-\infty}^{+\infty}|u_{xx}u_{tt}|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}u_{tt}^2\mathrm{d}x + C(T)\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}^2\mathrm{d}x,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t\lambda(t-s)q'(u_x)u_{xx}(x,s)u_{tt}(x,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}u_{tt}^2\mathrm{d}x + C(T)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t u_{xx}^2(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x,$$

又由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}fu_{tt}\mathrm{d}x \leqslant C(T) + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}u_{tt}^2\mathrm{d}x,$$

将上述不等式代入(8)并利用引理3.2得

$$\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}u_{tt}^2\mathrm{d}x+\frac{a}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xt}^2\mathrm{d}x\leqslant C(T).$$

积分这一不等式得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xt}^2\mathrm{d}x+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}u_{tt}^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\leqslant C(T).$$

应用前面各引理，直接从(1)式可得

$$\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xxt}^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\leqslant C(T).$$

证毕.

引理3.4 在条件(i)~(iv)下，对任意 $T>0$，(1)~(2)在 $(-\infty,+\infty)\times[0,T)$ 上的解 $u(x,t)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xxx}^2\mathrm{d}x\leqslant C(T).$$

证 对(1)式乘以 u_{xxxx} 并关于 x 积分，通过分部积分得

$$\begin{aligned}&-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xxx}u_{xt}\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xxt}^2\mathrm{d}x+\frac{a}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xxx}^2\mathrm{d}x+\\&\quad\int_{-\infty}^{+\infty}p'(u_x)u_{xxx}^2\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}p''(u_x)u_{xx}^2u_{xxx}\mathrm{d}x-\\&\quad\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xxxx}\int_0^t\lambda(t-s)q'(u_x)u_{xx}(x,s)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}f_{xx}\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{9}$$

由于由条件(i)

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}p''(u_x)u_{xx}^2u_{xxx}\mathrm{d}x\right|\leqslant C(T)\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}^2|u_{xxx}|\mathrm{d}x\leqslant C(T)\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}^4\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xxx}^2\mathrm{d}x.$$

我们知道当 $1\leqslant q,r<+\infty$，$0<k<n$，$k/n\leqslant\theta<1$，$1/p=\theta/r+(1-\theta)/q-(n\theta-k)$ 时，成立Nirenberg_Gagliardo不等式

$$\left\|\frac{\mathrm{d}^kv}{\mathrm{d}x^k}\right\|_{L^2}\leqslant C\left\|\frac{\mathrm{d}^nv}{\mathrm{d}x^n}\right\|_{L^r}^{\theta}\cdot\|v\|_{L^q}^{1-\theta},$$

令 $v=u_{xx}$，$k=0$，$n=1$，$q=r=2$，$p=4$，$\theta=1/4$，有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}^4\mathrm{d}x&\leqslant C\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xxx}^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{3}{2}}\leqslant\\&\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xxx}^2\mathrm{d}x+\frac{C^2}{4}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}^2\mathrm{d}x\right)^3.\end{aligned}$$

又由于

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xxxx}\int_0^t\lambda(t-s)q'(u_x)u_{xx}(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x=\\&\quad\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xxx}(x,t)\int_0^t\lambda(t-s)[(-q''(u_x)u_{xx}^2(x,s))-q'(u_x)u_{xxx}(x,s)]\mathrm{d}s\mathrm{d}x\leqslant\\&\quad\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^tC(T)|u_{xxx}(x,t)|[u_{xx}^2(x,s)+|u_{xxx}(x,s)|]\mathrm{d}s\mathrm{d}x\leqslant\\&\quad C(T)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xxx}^2\mathrm{d}x+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xxx}^2(x,s)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}^4(x,s)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\right].\end{aligned}$$

将上述不等式代入(9)式后利用引理3.1~3.3，再关于 t 积分后，利用不等式

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xxx}u_{xt}\mathrm{d}x \geqslant -\frac{a}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xxx}^2\mathrm{d}x - \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xt}^2\mathrm{d}x$$

得

$$\frac{a}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xxx}^2\,\mathrm{d}x \leqslant C(T)\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xxx}^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + C(T),$$

由 Gronwall 引理即得 $\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xxx}^2\,\mathrm{d}x \leqslant C(T)$• 证毕•

由 Sobolev 嵌入不等式, 从以上引理得

推论 3.2　在条件(i)~(iv) 下, 对任意 $T>0$, (1) ~ (2) 在 $(-\infty,+\infty)\times[0,T)$ 上的解 $u(x,t)$ 满足

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} |u_{xx}(x,t)| \leqslant C(T)\text{•}$$

引理 3.5　在条件(i)~(iv) 下, 对任意 $T>0$, (1) ~ (2) 在 $(-\infty,+\infty)\times[0,T)$ 上的解 $u(x,t)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xxt}^2\mathrm{d}x + \int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xtt}^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \leqslant C(T),\qquad \text{当 } t<T;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_{tt}^2\mathrm{d}x \leqslant C(T)\text{•}$$

证　(1) 式乘以 $-u_{xxtt}$ 再关于 x 积分, 通过分部积分得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xtt}^2\mathrm{d}x + \frac{a}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xxt}^2\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty} p'(u_x)u_{xxt}u_{xx}\mathrm{d}x -$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p'(u_x)u_{xxt}^2\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{+\infty} p''(u_x)u_{xx}u_{xt}u_{xxt}\mathrm{d}x =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xtt}f_x\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xtt}\int_0^t \lambda(t-s)q(u_x)_{xx}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\text{•}$$

利用引理 3.1~ 3.4 及 $p(s)$、$q(s)$ 所满足的条件, 类似于前面引理的证明技巧便可证得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xtt}^2\mathrm{d}x + \int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xtt}^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \leqslant C(T),$$

利用此不等式及前面各引理, 可从(1)式直接推出

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_{tt}^2\mathrm{d}x \leqslant C(T)\text{•}$$

证毕•

推论 3.3　在条件(i)~(iv) 下, 对任意 $T>0$, (1) ~ (2) 在 $(-\infty,+\infty)\times[0,T)$ 上的解 $u(x,t)$ 满足

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} |u_{xt}(x,t)| \leqslant C(T)\text{•}$$

引理 3.6　在条件(i)~(iv) 下, 对任意 $T>0$, (1) ~ (2) 在 $(-\infty,+\infty)\times[0,T)$ 上的解 $u(x,t)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xxxt}^2\mathrm{d}x + \int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xxtt}^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant C(T),\qquad \text{当 } t<T;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xtt}^2\mathrm{d}x \leqslant C(T)\text{•}$$

证　对(1)式关于 x 求一次导数后乘以 $-u_{xxxtt}$, 然后关于 x 积分, 通过分部积分得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xxtt}^2\mathrm{d}x + \frac{a}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xxxt}^2\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty} p'(u_x)u_{xxx}u_{xxxt}\mathrm{d}x -$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p'(u_x)u_{xxxt}^2 \mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{+\infty} p''(u_x)u_{xt}u_{xxx}u_{xxxt}\mathrm{d}x =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{xx}u_{xxtt}\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t \lambda(t-s)q(u_x)_{xxx}u_{xxtt}(x,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}x.$$

利用前面的引理及推论, 可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xxxt}^2 \mathrm{d}x + \int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xxtt}^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant C(T),$$

利用此不等式, 从(1)式直接可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xtt}^2 \mathrm{d}x \leqslant C(T).$$

证毕.

根据以上各引理, 运用标准的方法(见[3])可以证明在条件(i)~(iv)下, (1)~(2)的解 $u(x,t)$ 可以延拓到 $(-\infty,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上, 又运用 Sobolev 嵌入定理可知(1)~(2)的上述解为经典解. 至此, 定理得证.

参 考 文 献

[1] 崔尚斌. 一类非线性积分微分方程的整体解[J]. 应用数学学报, 1993, **16**(2): 191~200.

[2] 王书彬. 半线性拟双曲型积分微分方程的初边值问题和初值问题[J]. 应用数学学报, 1995, **18**(4): 567~578.

[3] Greenberg J M, MacCamy R C, Mizel V J. On the existence, uniqueness and stability of solutions of the equation $\sigma(u_x)u_{xx} + u_{xxt} = u_{tt}$ [J]. J Math Mech, 1968, **17**: 707~728.

[4] MacCamy R C. A model for one dimensional nonlinear viscoelasticity[J]. Quart Appl Math, 1977, **35**: 21~33.

Initial Value Problems for a Class of Nonlinear Integro_Partial Differential Equations

Guo Ai

(Gansu University of Technology, Lanzhou 730050, P R China)

Abstract: In this paper, the problem of global existence of solutions to the following initial value problem is studied:

$$\begin{cases} u_{tt} - au_{xxt} - p(u_x)_x - \int_0^t \lambda(t-s)q(u_x)_x \mathrm{d}s = f(x,t) & (-\infty < x < +\infty)\, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) & (-\infty < x < +\infty), \end{cases}$$

which comes from viscoelastic mechanics. By making use of integral estimates method, it is proved that this problem has a global soluton if, in addition to certain regularity assumptions on the given functions, the following conditions are satisfied:

$$p'(s) \geqslant c_1 > 0, \ |q'(s)| \leqslant \text{const}, \ \lambda(0) < 0, \ \lambda'(0) < \lambda^2(0).$$

Key words: initial value problem; integro_partial differential equation; classical solution