

文章编号: 1000-0887(1999)05-0445-07

三维非局部弹性场中裂纹问题的分析方法^{*}

赵明¹, 程昌钧², 刘元杰¹, 刘国宁¹, 张石山¹¹ 机械工业部 郑州机械研究所, 郑州 450052;² 上海市应用数学和力学研究所, 上海大学 力学系, 上海 200072)

摘要: 通过求解得到了三维非局部弹性力学对称情形的单位集中不连续位移基本解。基于该基本解和三维局部(经典)弹性力学的不连续位移边界积分方程——边界元方法, 提出了三维非局部弹性力学中的平片裂纹 I 型问题的通用解法, 并给出了算例。

关键词: 非局部弹性力学; 断裂力学; 边界积分方程方法

中图分类号: O364 1; O343 **文献标识码:** A

引言

非局部力学理论极大发展了经典的连续统力学理论, 至今已有一系列的非局部力学理论的公理化体系^[1,2]; 在应用方面, 非局部力学理论应用于断裂力学的研究也取得了非常突出的成就^[3-5]。文[6]给出了一种非局部理论的实验验证, Ramabraham 和 Rao^[7]给出在非均布载荷作用下直线裂纹问题的解, 程品三^[8]给出了 I、II、III 型三种基本型裂纹的弹性应力场, 虞吉林和郑哲敏^[9]进行了弹塑性断裂力学分析, 作者在文[10]中求解了非局部弹性力学平面问题的单位集中不连续位移基本解, 在此基础上基于经典(局部)弹性力学的不连续位移边界积分方程——边界元方法, 提出了一种非局部弹性力学平面问题的通用解法, 并给出了在断裂力学中的应用。高键和戴天民^[11]研究了三维圆盘裂纹问题。

非局部弹性力学理论之所以在三维裂纹问题方面的研究工作极少, 其根本原因在于三维非局部弹性力学问题的解法这一重要问题没有得到很好地解决。本文旨在给出一般三维非局部弹性力学问题的通用解法, 用于分析解决三维裂纹问题。鉴于三维问题的复杂性, 本文暂只讨论三维弹性体中平片裂纹的 I 型问题。

1 三维非局部弹性力学的单位集中不连续位移基本解

在不考虑体力时, 三维线弹性非局部力学问题的位移场 u_i 、应变场 e_{ij} 和应力场 t_{ij} 应满足的基本方程为^[13]:

$$\text{平衡方程} \quad t_{ij,j} = 0, \quad (1)$$

$$\text{本构关系} \quad t_{ij}(x, y, z) = \int_{\Omega} \alpha(x, y, z; x', y', z') \alpha_{ij}(x', y', z') d\Omega(x', y', z'), \quad (2a)$$

* 收稿日期: 1998_01_23; 修订日期: 1999_01_23

基金项目: 本文受国家自然科学基金(59375192)、机械工业技术发展基金(95JA10102)和河南省自然科学基金资助项目(984052100)

作者简介: 赵明 (1963~), 男, 高级工程师, 研究室主任, 已在国内外发表论文 30 多篇。

$$\alpha_{ij} = \lambda_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \delta_{ij}, \quad (2b)$$

$$\text{几何关系 } e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (3)$$

式中的 $i, j = 1, 2, 3$ (或 x, y, z); $\alpha(x, y, z; x', y', z')$ 为非局部核函数

$$\alpha(x, y, z; x', y', z') = \pi^{-\frac{3}{2}} \left[\frac{k}{a} \right]^2 \left\{ \left[\frac{k}{a} \right]^2 [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2] \right\}, \quad (4)$$

其中 a 为晶格常数. 由分子动力学模型得出常数

$$k = 1.65 \quad (5)$$

从上述的基本方程可以看出, 非局部和局部弹性力学的主要差别在于本构关系, 局部弹性力学的本构关系认为应力和应变在物质点上——对应, 而非局部本构关系则表明一点的应力和所有物质点上的应变有关. 正因为如此, 给非局部弹性力学问题的求解带来了很大困难.

我们先给出本文所要求的对称情形的单位集中不连续位移基本解的提法.

假设在无限大体中有一半半径为 a_c 的圆盘裂纹, 位于 Oxy 平面内, 圆心在坐标系原点, 裂纹面记为 S , 在裂纹上、下表面的位移差记为:

$$\times u_i' = u_i(x, y, 0^+) - u_i(x, y, 0^-) \quad (i = 1, 2, 3, (x, y) \in S). \quad (6)$$

本文所要求的单位集中不连续位移基本解即是满足基本方程(1)~(3)及下述条件的解:

$$\lim_{a_c \rightarrow 0} \left\{ \int_S \times u_x' dS, \int_S \times u_y' dS, \int_S \times u_z' dS \right\} = \{0, 0, 1\}. \quad (7)$$

众所周知, 对于圆盘裂纹, 在裂纹上、下表面上作用均布压力 p_0 时的经典(局部)解是一个轴对称问题, 由 Sneddon^[14] 解决, 并且解析地给出了相应的位移场 u_i 和应力场 α_{ij} . 这里我们根据该解求解上述提出的非局部弹性力学的对称情形下的单位集中不连续位移基本解.

首先, 由 Sneddon^[14] 解的位移场 u_i , 得到裂纹面上的不连续位移(或位移间断):

$$\times u_r' = \times u_\theta' = 0, \quad (8a, b)$$

$$\times u_z' = \frac{8(1-\nu^2)p_0 \cdot a_c}{\pi \cdot E} \left[1 - \left(\frac{r}{a_c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \text{内外} \quad (8c)$$

由问题的对称性, 为方便起见, 有时也使用相应的柱坐标系 r, θ, z .

将(8a, b, c)式沿整个圆盘裂纹面积分, 即可得到裂纹面上不连续位移的总和:

$$\times U_i' = \int_S \times u_i' dS, \quad (9)$$

即

$$\times U_r' = \times U_\theta' = 0, \quad (10a, b)$$

$$\times U_z' = \frac{16(1-\nu^2)p_0}{3E} a_c^3. \quad (10c)$$

如果不管裂纹尺寸 a_c 的大小, 始终让裂纹面上的不连续位移总和为单位 1, 这时得出裂纹面上的均布压力 p_0 与圆盘裂纹半径 a_c 的关系为:

$$p_0 = \frac{3E}{16(1-\nu^2)} \cdot \frac{1}{a_c^3}. \quad (11)$$

将此代入 Sneddon 解的应力场 α_{ij} , 由(2a)式当 $a_c \rightarrow 0$ 时, 我们就得到了单位集中不连续位移基本解. 由于本文只讨论平片裂纹的 I 型问题, 主要关心的是正应力 t_{zz} , 下面仅给出 t_{zz} 的推导过程.

由 Snedden 的经典解, 由(11)式得到应力分量^[14]

$$\sigma_{zz}(\rho, \zeta) = \frac{3\mu}{4(1-\nu)\pi} \frac{1}{a_c^3} \cdot \sigma_{zz}^0(\rho, \zeta), \quad (12)$$

其中 $\sigma_{zz}^0(\rho, \zeta) = [-S(0, -1) - \zeta S(0, 0) + I(0, 1) + \mathcal{Q}(0, 2)]$, (13a)

式中

$$\left. \begin{aligned} S(0, -1) &= \tan^{-1} \left[\frac{L \cdot \sin \omega + R^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2} \phi}{L \cdot \cos \omega + R^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} \phi} \right], \\ S(0, 0) &= R^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2} \phi, \quad I(0, 1) = R^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} \phi, \\ \mathcal{Q}(0, 2) &= L \cdot R^{-\frac{3}{2}} \cos \left(\frac{3}{2} \phi - \omega \right), \quad L = \sqrt{1 + \zeta^2}, \\ \tan \omega &= \frac{1}{\zeta}, \quad R = \sqrt{(\rho^2 + \zeta^2 - 1)^2 + 4\zeta^2}, \\ \tan \phi &= \frac{2\zeta}{\rho^2 + \zeta^2 - 1} \end{aligned} \right\} \quad z \quad (13b)$$

这里使用了量纲一的坐标

$$\rho = \frac{r}{a_c}, \quad \zeta = \frac{z}{a_c} \quad (13c)$$

将(12)代入(2a)式得非局部应力

$$\begin{aligned} t_{zz}(r, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \sigma_{zz}(r', z') \cdot \alpha(r, \theta, z; r', \theta', z') r' d\theta' dr' dz' = \\ &= \frac{3\mu}{4(1-\nu)\pi^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{k}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \sigma^0(\rho', \zeta') \exp \left[\left(\frac{k}{a} a_c \right)^2 [\rho'^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta - \theta') + (\zeta - \zeta')^2] \right] \cdot \rho' d\theta' d\rho' d\zeta' \right] \end{aligned} \quad (14)$$

由于: $\int_0^{2\pi} \exp(\beta \cdot \cos x) \cos(mx) dx = 2\pi I_m(\beta)$, (15)

式中 I_m 为修正的 Bessel 函数

所以(14)式可写为

$$t_{zz}(r, z) = \frac{3\mu}{2(1-\nu)\pi^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{k}{a} \right)^3 t_{zz}^0(r, z) \quad (16)$$

式中

$$\begin{aligned} t_{zz}^0(r, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \sigma^0(\rho', \zeta') I_0 \left[2 \left(\frac{k}{a} a_c \right)^2 \rho \rho' \right] \cdot \exp \left[- (ka_c/a)^2 \right. \\ &\quad \left. [\rho^2 + \rho'^2 + (\zeta - \zeta')^2] \right] \cdot \rho' d\rho' d\zeta' \end{aligned} \quad (16a)$$

如前所述, 令 $a_c \rightarrow 0$, 由(16)式得到非局部基本解的应力分量:

$$t_{zz}^*(r, z)_{\text{非局}} = \frac{3\mu}{2(1-\nu)\pi^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{k}{a} \right)^3 \lim_{a_c \rightarrow 0} t_{zz}^0(r, z) = \frac{3\mu}{2(1-\nu)\pi^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{k}{a} \right)^3 t_{zz}^{0*}(r, z) \quad (17)$$

由于上述积分的计算十分繁复, 本文的基本解采用数值方法计算给出. 在 $z = 0$ 的平面

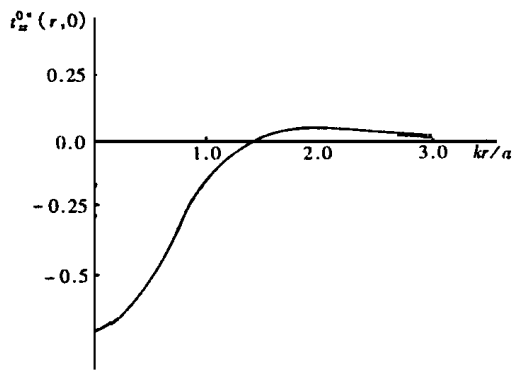


图1 $z = 0$ 平面上基本解的变化

内,基本解的变化如图1所示。

2 三维非局部弹性力学问题的解

我们基于三维局部(经典)的弹性力学的不连续位移边界积分方程——边界元方法,利用三维非局部弹性力学的单位集中不连续位移基本解,给出三维非局部弹性力学问题的通用解法。

设任意三维有限域 Ω , 边界为 S , 根据局部弹性力学中的不连续位移边界积分方程的思想,把有限域 Ω 看成是无限大域中的一部分,而把边界 S 看成是位移不连续边界(其中包括不封闭的曲面,即裂纹)。

由经典弹性力学的单位集中不连续位移基本解,得到以不连续位移表示的积分方程^[12]:

$$\int_S T_{ij}^*(p, q) \times u_j(q) \, dS(q) = C_{ij}^* t_j(q), \quad (18)$$

其中 t_i 为 i 方向上的面力, T_{ij}^* 为经典单位集中不连续位移基本解对应的的面力, C_{ij}^* 为常数。

在方程(18)中引入边界条件,求解积分方程(复杂问题一般采用数值方法即边界元方法),可得到边界上的不连续位移 $\times u_i$ 。由文[17]的非局部线弹性力学问题的求解框架,根据非局部弹性力学的单位集中不连续位移的基本解 t_{ijk}^* , 通过积分即可求得非局部应力场

$$t_{ij} = \int_S t_{kij}^* \times u_k \, dS, \quad (k = 1, 2, 3), \quad (19)$$

式中的 t_{ijk}^* 表示在 k 方向上作用单位集中不连续位移时的基本解所对应的应力分量。

特别,由于本文仅讨论对称问题,即 I 型裂纹,因此,在(19)式中对 k 求和也只有 $k = 3$ (即沿 z 方向)的分量 $\times u_z$ 不为 0, 其他两个分量为 0。

3 算例

3.1 无限大体中的圆盘裂纹

圆盘裂纹的半径为 l , 在裂纹的上、下表面作用均布压力 t_0 。

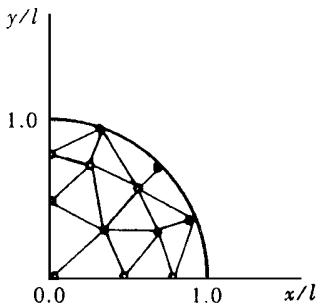


图2 边界元的划分

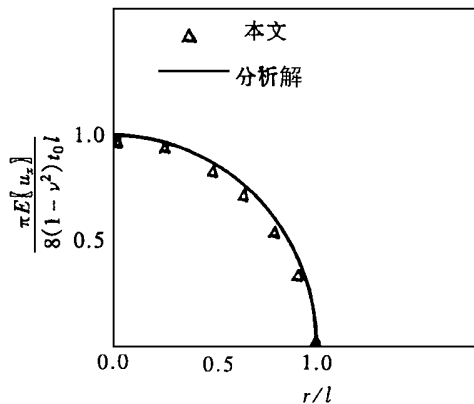


图3 裂纹面上的不连续位移

首先进行局部(经典)弹性力学的三维不连续位移边界元分析。在裂纹面上的单元划分如图2,边界元计算结果如图3所示。

根据上述边界元方法的结果,利用本文提出的三维非局部弹性力学问题的解法,进行非局

部弹性力学分析得到裂纹前沿沿半径方向上的非局部应力 t_z 。对于不同的裂纹尺寸, 裂纹前沿的应力通过:

$$\frac{T_z}{t_0} = \frac{t_z}{t_0} + 1 \tag{20}$$

在图 4 中给出。

从计算结果可以看出, 裂纹前沿的最大应力不在裂纹尖端, 而是在距裂尖约 a/k 的范围内。

3.2 椭圆裂纹的非局部应力分析

椭圆裂纹的长、短半轴分别用 l_1, l_2 表示, 在椭圆裂纹的上、下表面分别作用均布的压力 t_0 。同样, 按上述方法进行非局部应力分析。

应力分析结果表明, 对于椭圆裂纹, 在短半轴的延长线上有较大的应力集中。在图(5)中给出了长半轴 $kl_1/a = 40$ 、短半轴 $kl_2/a = 20$ 的椭圆裂纹在其两个半轴延长线上的应力分布, 其中短半轴裂尖附近的应力集中比长半轴前沿的应力集中约高 60%, 而 $kl_1/a = kl_2/a = 20$ 的圆盘裂纹的应力集中介于二者之间。

图(6)给出了不同椭圆度的椭圆裂纹在短半轴延长线上的应力分布。从计算结果可知椭圆越扁, 应力集中程度越高。

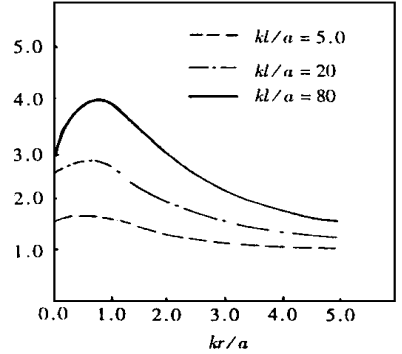
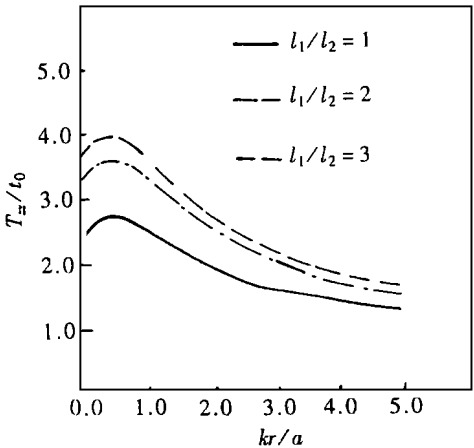
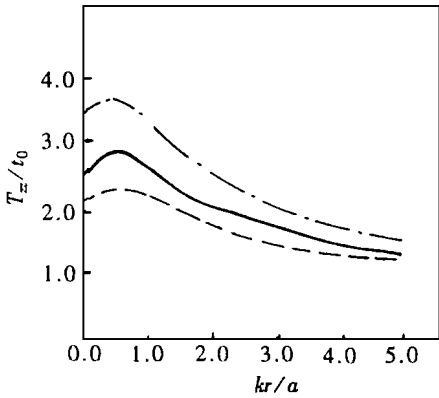


图 4 裂纹前沿的非局部应力



- 长半轴延长线上的应力分布
- - 短半轴延长线上的应力分布
- ($kl_1/a = 40, kl_2/a = 20$)
- 圆盘裂纹半径延长线上的应力分布
- ($kl_1/a = kl_2/a = 20$)

图 5

图 6 椭圆裂纹短半轴延长线上的应力
($kl_2/a = 20$)

关于椭圆裂纹的非局部应力分析尚未见文献报导, 属本文首次。

4 结 论

本文的解法从表面上看没有直接涉及应力边值问题怎样提这一问题,而是根据非局部弹性力学问题的不连续位移边界积分方程方法,利用本文给出的三维非局部弹性力学问题对称情形的单位集中不连续位移基本解,给出了平片裂纹 I 型问题的通用解法。这里的基本解是该解法的关键。若增加非对称情形下的单位集中不连续位移基本解,便可给出一般问题的解法,因数值分析方面的工作量很大,这项工作正在进行。

致谢: 感谢雷慰宗教授对本文的帮助。

参 考 文 献

- [1] Edelen D G B. In: Eringen A C ed. Nonlocal Field Theories in Continuum Physics, IV[C]. New York: Academic Press, 1976.
- [2] Eringen A C. Nonlocal Polar Field Theories [M]. New York: Academic Press, 1976.
- [3] Eringen A C, Speziale C G, Kim B S. Crack tip problem in nonlocal elasticity[J]. J Mechanics and Physics of Solids, 1977, **25**(5): 339~ 355.
- [4] Eringen A C. Line crack subject to shear[J]. Int J Fracture, 1978, **14**(4): 367~ 379.
- [5] Eringen A C. Line crack subject to antiplane shear[J]. Engng Fract Mech, 1979, **12**(2): 211~ 219.
- [6] Ilcewicz L, Narasimhan M, Wilson J. An experimental verification of nonlocal fracture criterion[J]. Engng fracture Mech, 1981, **14**(4): 801~ 808.
- [7] Ramabrahram B, Rao M P. Line crack in an elastic plate subject to varying internal pressure in nonlocal elasticity[J]. Indian J Pure Appl Math, 1985, **16**(6): 661~ 672.
- [8] 程品三. 脆性断裂的非局部力学理论[J]. 力学学报, 1992, **24**(3): 329~ 672
- [9] 虞吉林, 郑哲敏. 一种非局部弹塑性连续体模型与裂纹尖端附近的应力分布[J]. 力学学报, 1984, **16**(5): 487~ 494.
- [10] 赵明, 程昌钧, 刘国宁等. 裂纹问题的非局部弹性力学分析[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(2): 135~ 143.
- [11] 高键, 戴天民. 用非局部弹性场研究圆盘裂纹问题[J]. 固体力学学报, 1989, **10**(4): 289~ 309.
- [12] Zhao Minghao(赵明), Liu Yuanjie(刘元杰), Cheng Changjun(程昌钧). Boundary integral equation and the boundary element method for three dimensional fracture mechanics[J]. Engng Analysis with Boundary Elements, 1994, **13**(4): 333~ 338.
- [13] Eringen A C. Edge dislocation in nonlocal elasticity[J]. Int J Engng Sci, 1977, **15**(3): 177~ 183.
- [14] Sneddon I N. Fourier Transforms [M]. New York: McGraw_Hill, 1951.
- [15] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Table of Integrals, Series and Products [M]. New York: Academic Press, 1965.
- [16] Brebbia C A, Walker S. Boundary Element Techniques in Engineering [M]. London: Butterworths, 1980.
- [17] 王锐. 非局部弹性理论中的混合边值问题[J]. 科学通报, 1989, **34**(6): 412~ 414.

The Method of Analysis of Crack Problem in Three_Dimensional Non_Local Elasticity

Zhao Minghao¹, Cheng Changjun², Liu Yuanjie¹, Liu Guoning¹, Zhang Shishan¹

(¹Zhengzhou Research Institute of Mechanical Engineering, Zhengzhou, Henan 450052, P R China;

²Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Department of Mechanics,
Shanghai University, Shanghai 200072, P R China)

Abstract: In this paper, the displacement discontinuity fundamental solution (DDFS) corresponding to the unit concentrated displacement discontinuity for three dimensional (3D) non_local elasticity under symmetrical condition is obtained. Based on the displacement discontinuity boundary integral equation (DDBIE) and boundary element method (DDBEM) of local (classical) elasticity, a method of analysis of crack in 3D non_local elasticity with a generalized application is proposed with the DDFS. By use of the method, several important problems of fracture mechanics are analysed.

Key words: non_local elasticity; fracture mechanics; boundary_integral equation method