

文章编号: 1000-0887(1999)05-0477-09

初始缺陷和拉_弯耦合对于叠层板的振动、 屈曲和非线性动力稳定性的影响*

王列东, 刘正宁, 周承倜

(大连大学, 大连市经济技术开发区, 大连 116622)

摘要: 研究了复合材料叠层板的初始缺陷和拉伸_弯曲耦合对于其振动、屈曲和非线性动力稳定性的影响。推导了控制方程。这是一个修正的非线性 Mathieu 方程。进行了 5 种典型复合材料的数值计算, 它们是玻璃环氧 Scotch_1002, 芳纶环氧 Kevlar_49, 硼环氧 B4/5505, 石墨环氧 T300/5208, 和 AS/3501。结果表明: 由于初始缺陷耦合效应的存在, 使叠层板对于进入参数共振更加敏感, 并且其振幅大于无初始缺陷或者无耦合效应的叠层板。对于不同复合材料的叠层板, 尤其是层数较少的板, 耦合效应是不相同的。在板结构的屈曲和动力稳定性设计中, 如果忽略了耦合效应的影响, 其不安全性将超过 10% 以上。

关键词: 初始缺陷; 耦合效应; 非线性动力稳定性

中图分类号: O342 **文献标识码:** A

引 言

叠层板对于其中面叠层材料或叠层几何的不对称性将导致拉_弯耦合效应。已知, 它将使屈曲载荷和振动频率下降, 并使板的挠度增大。但是, 对于不同的复合材料, 它们的屈曲载荷和自振频率的下降百分比(%) 如何, 以及初始缺陷和耦合效应又如何影响复合叠层板的动力稳定性, 还仍然缺乏全面的研究。早在 80 年代, V. Birman^[1], R. S. Srinivasan^[2], 和 C. W. Bert^[3] 等, 研究了反对称角铺设叠层板的动力稳定性。但他们研究的都是线性问题, 只确定了板的主要动力不稳定性区域。我们在 1989 年研究了叠层板的非线性动力稳定性^[4], 又在 1993 年研究了 ARALL 板的非线性动力稳定性^[5]。本文将分析初始缺陷和拉_弯耦合刚度 B_{11} 和 B_{22} 对于振动、屈曲和非线性动力稳定性的影响。推导了控制方程, 它是一个修正的非线性 Mathieu 方程, 并已获得方程的解。计算了五种典型复合叠层板, 即玻璃环氧 Scotch_1002, 芳纶环氧 Kevlar_49, 硼环氧 B4/5505, 石墨环氧 T300/5208, 和 AS/3501。结果表明, 初始缺陷对叠层板的屈曲和动力稳定性的影响是重要的, 耦合效应对不同层数和不同材料的板来说, 它们对板的振动、屈曲和动力稳定性的性能很不相同。表 2 中列出由 B_{11} 和 B_{22} 所引起的屈曲载荷 N_{cr} 和自振频率 ω 的下降百分比 %。计算表明, 对于二层叠层板, 如果略去耦合效应, 对 N_{cr} 的设计的不安全性将可超过 30% (玻璃环氧除外)。如果层数超过 8 层, 耦合效应可略。当叠层板受到

* 收稿日期: 1997_06_09; 修订日期: 1998_12_18

基金项目: 辽宁省科学技术基金资助(972068) 和省教委高校科研资助项目(9826421184)

作者简介: 王列东(1956-), 男, 副教授, 系主任。

面内的动力压缩载荷时, 这时考虑板的动力不稳定的性能就有必要。对于反对称正交铺设的叠层板, 由于有 B_{11} 和 B_{22} 以及横向惯性力 ($\rho w, u$) 的存在, 它们对板的作用如同横向分布载荷, 这就使叠层板的前屈曲状态具有纵横弯曲形式。因此, 这种屈曲问题的控制方程不再是特征方程, 而是一种非齐次微分方程, 其非齐次项中包括板的耦合刚度、惯性力和初始缺陷等各项。板的动力不稳定的定义为: 当板的挠度和振幅发生无限增大时即达到板的动力不稳定状态^[6]。按照动力稳定性线性理论, 当板进入不稳定区域状态时, 振幅迅速增加, 并无限增大。但实验表明板的振幅不会无限增大。在第一阶段, 板的振幅可能迅速增加, 但当振幅超过小挠度范围而达到某一数值时, 将进入一个过渡阶段, 然后就可能转入一个具有较大振幅(大挠度范围)的稳定振动阶段, 或者也可能转入一个振幅较大的不稳定振动阶段, 这时振幅将继续增大。线性理论不可能解释这种自然现象, 因线性理论仅限于十分小的振幅。本文导出非线性 Mathieu 方程的解可以在大范围的外激振动频率下计算出大数值的振幅, 因此可以分析非线性动力稳定性的实验现象。

1 反对称正交铺设叠层板的非线性动力稳定性

内力_弯矩_应变_曲率的关系式为^[7]:

$$K \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & -B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ B_{11} & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & -B_{11} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad \text{它} \quad (1)$$

其中 A_{ij} 和 D_{ij} 分别为拉伸和弯曲刚度, B_{11} 和 $B_{22}(= -B_{11})$ 是板的拉_弯耦合刚度。设在一块反对称正交铺设叠层板的面内方向作用有沿边均布的周期性动力压缩载荷: $N_x(x, y, t) = -(N_0 + N_t \cos \Omega t)$, 这里 N_0 是常数力幅度, N_t 是随时间变化的力的幅度。叠层板四边嵌固边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} x = 0, \quad w = 0; \quad u = 0, \quad w, x = 0, \\ x = a, \quad w = 0; \quad w, x = 0, \quad N_x = -N_0 - N_t \cos \Omega t, \\ y = 0, \quad y = b; \quad w = 0, \quad v = 0, \quad w, y = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{Me} \quad (2)$$

对于叠层板的大挠度问题, 其变形几何关系为:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= u, x + \frac{1}{2}(w, x)^2; \\ \varepsilon_y &= v, y + \frac{1}{2}(w, y)^2; \quad \gamma_{xy} = u, y + v, x + (w, x)(w, y) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

为了满足叠层板的边界条件, 设挠度函数为:

$$w = f(t) \sin^2 \left[\frac{\pi x}{a} \right] \sin^2 \left[\frac{\pi y}{b} \right] \cdot d \quad (4)$$

如果略去面内的纵向惯性力, 平衡方程式为:

$$\left. \begin{aligned} N_{x, x} + N_{xy, y} = 0; \quad N_{xy, x} + N_{y, y} = 0; \\ M_{x, xx} + M_{y, yy} + 2M_{xy, xy} + q(x, y, t) = 0, \end{aligned} \right\} \quad \text{差,} \quad (5)$$

其中 $q(x, y, t) = N_x w, xx + 2N_{xy} w, xy + N_y w, yy - \rho w, u$ 。

将应变_位移方程(3)代入到本构方程(1), 然后将结果代入到平衡方程(5), 得到:

$$\left. \begin{aligned} & A_{11}u_{,xx} + A_{66}u_{,yy} + (A_{12} + A_{66})v_{,xy} - B_{11}w_{,xxx} + w_{,x}(A_{11}w_{,xx} + \\ & A_{66}w_{,yy}) + (A_{12} + A_{66})w_{,yw} = 0, \\ & (A_{12} + A_{66})u_{,xy} + A_{11}v_{,yy} + A_{66}v_{,xx} + B_{11}w_{,yyy} + w_{,y}(A_{11}w_{,yy} + A_{66}w_{,xx}) + \\ & (A_{12} + A_{66})w_{,xw} = 0, \\ & D_{11}(w_{,xxxx} + w_{,yyyy}) + 2(D_{12} + 2D_{66})w_{,xxyy} + B_{11}(v_{,yyy} - u_{,xxx}) + B_{11}[(w_{,yy})^2 - \\ & \text{和 } (w_{,xx})^2 + w_{,yw,yyy} - w_{,xw,xxx}] - N_x w_{,xx} - N_y w_{,yy} - 2N_{xy}w_{,xy} + Qw_{,u} = 0 \end{aligned} \right\} (6)$$

将方程(4)代入到方程(6)的前两个方程, 解出位移 u 和 v , 然后将 u, v 和 w 代入到方程(3) 和方
程(1), 求得内力 N_x, N_y 和 N_{xy} . 这里已经应用了力的边界条件: $\int_0^b (N_x)_{x=a} dy = - (N_0 + N_t \cos \theta t) b$. 在求得 u, v, N_x, N_y 和 N_{xy} 之后, 将它们代入方程(6) 的第三个方程得到一个非线性微分方程. 然后应用伽辽金变分法^[8] 以 $[1 - \cos(2\pi x/a)][1 - \cos(2\pi y/b)]$ 为权函数而获得此动力稳定性问题的控制方程:

$$f''(t) + \omega^2 \left[1 - \frac{N_0 + N_t \cos \theta t}{\rho a^2} \right] f(t) + \beta^2(t) + \psi^3(t) = 0, \quad (7)$$

其中

$$\omega^2 = \left\{ \frac{16}{9} \left[\frac{\pi^4}{\rho a^4} \right] \left[3(1 + \alpha^4) D_{11} + 2\alpha^2 (D_{12} + 2D_{66}) - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{B_{11}^2}{A_{11}} (2 + 2\alpha^4 + \eta_x - \alpha^4 \eta_y) \right] \right\}, \quad n \quad (8a)$$

$$N_{cr} = \left(\frac{4}{3} \right) \left(\frac{\pi^2}{\rho a^2} \right) \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{A_{12}}{A_{11}} \right) \right]; \quad \alpha = \frac{a}{b}, \quad (8b)$$

$$\beta = \frac{8}{9} \left[\frac{\pi^4}{\rho a^2 b^2} \right] B_{11} \zeta \left[1 + \left(\frac{1}{8} \alpha^{-2} \right) \right], \quad N \quad (8c)$$

$$\phi = \left[\frac{\pi^4}{9 \rho a^4} \right] \left[\left(\frac{17}{16} (F_{02} + \left(\frac{15}{36} \alpha^4 F_{20} + 2\alpha^4 F_{22} + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \frac{1}{2} \alpha^4 F_{24} + \left(\frac{1}{2} \alpha^4 F_{42} \right) \right) \right) \right]. \quad r \quad h \quad \text{使得} \quad t$$

此处

$$\eta_x = \frac{(1 + \alpha^4) A_{11} A_{66} + \alpha^2 (A_{11}^2 + \alpha^2 A_{11} A_{12})}{(1 + \alpha^4) A_{11} A_{66} + \alpha^2 (A_{11}^2 - A_{12}^2 - 2A_{12} A_{66})}$$

$$\eta_y = \frac{(1 + \alpha^4) A_{11} A_{66} + \alpha^2 A_{11}^2 + A_{11} A_{12}}{(1 + \alpha^4) A_{11} A_{66} + \alpha^2 (A_{11}^2 - A_{12}^2 - 2A_{12} A_{66})}$$

$$\zeta = \frac{(\alpha^4 - 1) A_{12} A_{66}}{(1 + \alpha^4) A_{11} A_{66} + \alpha^2 (A_{11}^2 - A_{12}^2 - 2A_{12} A_{66})}$$

$$F_{02} = F_{20} = \frac{(A_{11}^2 - A_{12}^2)}{A_{11}}$$

$$F_{22} = \frac{A_{66} (A_{11}^2 - A_{12}^2)}{(1 + \alpha^4) A_{11} A_{66} + \alpha^2 (A_{11}^2 - A_{12}^2 - 2A_{12} A_{66})}$$

$$F_{24} = \frac{M_y A_{66} (A_{11}^2 - A_{12}^2)}{(1 + 16\alpha^4) A_{11} A_{66} + 4\alpha^2 (A_{11}^2 - A_{12}^2 - 2A_{12} A_{66})}$$

$$F_{42} = \frac{A_{66}(A_{11}^2 - A_{12}^2)}{(16 + \alpha^4)A_{11}A_{66} + 4\alpha^2(A_{11}^2 - A_{12}^2 - 2A_{12}A_{66})} \bullet$$

引入以下方程(10)所定义的参数 Ω^2 和 η 于是方程(8)成为:

$$f''(t) + \Omega^2(1 - 2\eta \cos \theta t)f(t) + \mathcal{F}^2(t) + \mathcal{F}^3(t) = 0, \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \Omega^2 &= \omega^2 \left[1 - \frac{N_0}{N_{cr}} \right]; \\ \eta &= \frac{1}{2} \frac{N_t}{(N_{cr} - N_0)} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

方程(9)是一个修正的非线性Mathieu方程,其中 Ω 是板在面内纵向力作用下的振动频率, ω 是板的自振频率, η 是动力激振系数. 耦合效应由 $\omega^2, N_{cr}, \mathcal{F}^2(t)$, 和 $\mathcal{F}^3(t)$ 等各项确定. 此处, $\mathcal{F}^3(t)$ 项主要由非线性大挠度所引入, 而 $\mathcal{F}^2(t)$ 项则由耦合刚度所引入. 在线性理论中只考虑小挠度, 其应变几何关系为: $\epsilon_x = u, x; \epsilon_y = v, y; \gamma_{xy} = u, y + v, x$ 将它们代入方程(1), 再以其结果代入方程(5), 得到平衡方程:

$$\left. \begin{aligned} A_{11}u,_{xx} + A_{66}u,_{yy} + (A_{12} + A_{66})v,_{xy} - B_{11}w,_{xxx} &= 0, \\ (A_{12} + A_{66})u,_{xy} + A_{22}v,_{yy} + A_{66}v,_{xx} + B_{11}w,_{yyy} &= 0, \\ D_{11}w,_{xxxx} + D_{22}w,_{yyyy} + 2(D_{12} + 2D_{66})w,_{xxyy} - \\ B_{11}u,_{xxx} + B_{11}v,_{yyy} - q(x, y, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

和以前相同, 将方程(4)代入方程(11)的前两个方程, 解出 u 和 v 及 N_x, N_y, N_{xy} ; 然后再将它们代入方程(11)的第三个方程, 应用伽辽金变分方法可获得线性理论的控制方程:

$$f''(t) + \Omega^2(1 - 2\eta \cos \theta t)f(t) = 0 \bullet \quad (12)$$

这是一个正规的 Mathieu 方程, 动力稳定性的稳定区域和不稳定区域由此方程确定. 在非线性问题中, 如果略去方程(9)中的非线性项, 即 $\mathcal{F}^2(t), \mathcal{F}^3(t)$, 可以退化到一个渐近方程, 它与方程(12)相同. 所以非线性因数的各项并不影响非线性系统的动力不稳定区域的分布.

2 解, 数值算例和讨论

4

在方程(9)中由于 $\mathcal{F}^2(t)$ 项的存在, 因此方程(9)没有周期为 $2T$ 的解而只有周期为 T 的解. 设函数 $f(t)$ 为:

$$f(t) = b_0 + \sum_{k=2,4,6,\dots}^{\infty} \left[a_k \sin \left[\frac{k\theta t}{2} \right] + b_k \cos \left[\frac{k\theta t}{2} \right] \right] \quad (13)$$

将函数(13)代入方程(9), 取 $k=2$ 作为第一级近似以获得近似方程, 并略去所有 b_0 的高次项, 得到以下方程:

$$\left. \begin{aligned} b_0 \left[1 + \left(\frac{3\phi}{2\Omega^2} \right) A^2 + \left(\frac{\beta}{2\Omega^2} \right) A^2 - \eta b_2 \right] &= 0, \\ -2\eta b_0 + \left[1 - 4\omega_e^2 + \left(\frac{2\beta}{\Omega^2} \right) b_0 + \left(\frac{3\phi}{4\Omega^2} \right) A^2 \right] b_2 &= 0, \\ \left[1 - 4\omega_e^2 + \left(\frac{2\beta}{\Omega^2} \right) b_0 + \left(\frac{3\phi}{4\Omega^2} \right) A^2 \right] a_2 &= 0 \bullet \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其中 $\omega_e = (\theta/2\Omega), A^2 = (4\omega_e^2 - 1)/(3\phi/4\Omega^2), A$ 是振幅. 为了求解方程(14), 考虑两种情况: (1) $a_2 = 0$, 和(2) $a_2 \neq 0$. 它们的解分别如下:

(1) 当 $a_2 = 0$, 然后 $b_2 = A$, 和 $b_0 \neq 0$

$$b_0 \left[1 + \left(\frac{3\phi}{2\Omega^2} A^2 - \eta A + \left(\frac{\beta}{2\Omega^2} \right) A^2 \right) \right] A^2 = 0$$

$$- 2\eta b_0 + \left[\frac{4\omega_e^2}{3\phi/4\Omega^3} + 2 \left(\frac{\beta}{\Omega^2} \right) b_0 + \left(\frac{3\phi}{4\Omega^2} \right) A^2 \right] A = 0 \quad (15)$$

(2) 当 $a_2 \neq 0$, 然后 $b_2 \neq 0$, 和 $b_0 = 0$

$$\eta = \left[\frac{4\omega_e^2 - 1}{3\phi/4\Omega^3} \right]^{1/2}; \quad b_2 = \left[\frac{\beta}{2\eta\Omega^2} A^2 \right] \quad (16)$$

已经证明, 当 $\beta = 0$ 时, 方程(16)的解是不稳定解^[6]。这一情况在 $\beta = 0$ 时, 仍是如此, 这时方程(16)的解是不稳定解而方程(15)的解是稳定解。振幅 A 的数值可由方程(15)算出, 其中对 A 有影响的是 $(3\phi/4\Omega^2)$, (β/Ω^2) , η 以及激振频率 ω_e 各项。它们都与叠层板的铺设层数 n 有关。耦合刚度 B_{11} 和 $B_{22} (= -B_{11})$ 是由层数 n 确定的。当 $n = 2$ 时, 耦合刚度的数值达到最大(与长度为 a , 宽度为 b , 厚度为 h 的相同尺寸的板相比较)。对无限层数 ($n = \infty$) 的板, 耦合刚度为零 ($B_{11} = B_{22} = 0$), 这表示反对称铺设的无限层数板与对称正交铺设的有限层数板相同, 它们都具有正交各向异性性质。

由方程(9)的解计算振幅 A 时, 非线性因子 (β/Ω^2) 和 $(3\phi/4\Omega^2)$ 对 A 的数值有影响。但从计算结果知, (β/Ω^2) 的数值微小, 它对 A 的数值的直接影响微小, 但是它对于此动力系统的非线性振动的性质却是十分重要。如果在方程(9)中舍去 $\beta^2(t)$ 项, 则方程就具有周期为 T 和 $2T$ 的解。现在, 在本文的方程(9)中存在 β 项, 所以方程(9)只有周期为 T 的解。根据周期为 T 的解, 方程(9)只可能有第二参数共振, 与此相关的振幅 A_2 为:

$$A_2 = \left\{ \frac{[L(\theta^2/\Omega^2) - 1]}{(3\phi/4\Omega^2)} \right\}^{1/2}, \quad (17)$$

在上式中, 计算出 A_2 即得出第二参数共振时的振幅, 它与方程(16)的不稳定解相同。如果舍去 β 项, 则方程(9)成为:

$$f''(t) + \Omega^2(1 - 2\eta \cos \theta t)f(t) + \psi^3(t) = 0 \quad (18)$$

上式对应于考虑大挠度的对称正交铺设叠层板。方程(18)具有周期为 T 和 $2T$ 的解, 它具有第一参数共振, 其共振振幅 $A_1 < A_2$; 振幅 A_1 为:

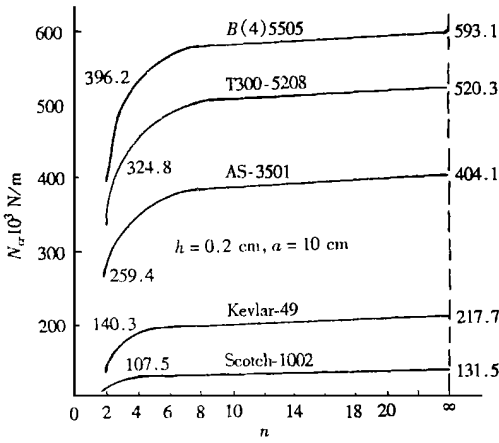
$$A_1 = \left\{ \frac{[L(\theta^2/4\Omega^2) - 1]}{(3\phi/4\Omega^2)} \right\}^{1/2}, \quad (19)$$

表 1 几种典型复合材料的弹性常数^[9]

复合材料	E_1 (Gpa)	E_2 (Gpa)	G_{12} (Gpa)	ν_{12}	密度 ρ (g/cm ³)
石墨环氧 T300_5208	181.1	10.3	7.17	0.28	1.6
硼环氧 B(4)_5505	204.1	18.5	5.59	0.23	2.0
石墨环氧 AS_3501	138.1	8.97	7.10	0.30	1.5
玻璃环氧 Scotch_1002	36.6	8.28	4.14	0.26	1.8
芳纶环氧 Kevlar_49	76.0	5.50	2.31	0.34	1.46

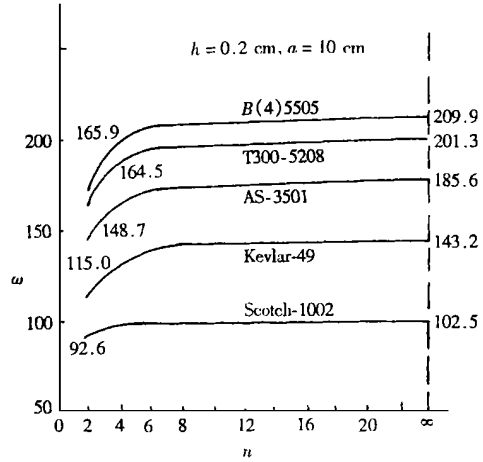
方程(9)和(18)的线性项相同, 动力不稳定区域的分布由方程的线性项确定, 所以此两方程具有相同的第一和第二不稳定区域^[6]。对于方程(18)的情况, 当作用的激振频率 $\omega_e = (\theta/2\Omega) > 1$ 时, 振动状态将进入第一参数共振, 其共振振幅为 A_1 。对于方程(9)的情况, 由于

存在 β 项, 当所作用的激振频率 $\omega_e = (\theta/2 \Omega) > 0.5$ 时, 将进入第二参数共振, 其共振振幅为 A_2 而且 $A_2 > A_1$ 。因此, 耦合效应将导致叠层板对于由外界的激振干扰而引发第二参数振动更为敏感, 并且具有较大的共振振幅 A_2 。这是拉-弯耦合效应的一个主要缺点。



正方叠层板 ($a/b = 1.0$)

图 1 临界载荷 N_{cr} 随层数 n 的变化



正方叠层板 ($a/b = 1.0$)

图 2 自振频率 ω 随层数 n 的变化

表 2 由耦合效应导致 N_{cr} 和 ω 下降的百分比%

材料	a/b	N_{cr} 的下降百分比 %				ω 的下降百分比 %			
		$n = 2$	$n = 4$	$n = 6$	$n = 8$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 6$	$n = 8$
石墨环氧 T300/5208	1	37.6	9.39	4.17	2.35	20.9	4.81	2.11	1.18
	2	21.6	5.39	2.39	1.35	11.4	2.73	1.20	0.68
	10	19.9	4.97	2.21	1.24	10.5	2.52	1.11	0.62
硼环氧 B(4)/5505	1	32.2	8.30	3.69	2.08	18.3	4.24	1.86	1.04
	2	18.9	4.73	2.10	1.18	9.96	2.40	1.06	0.59
	10	17.3	4.33	1.93	1.08	9.08	2.19	0.97	0.54
石墨环氧 AS/3501	1	35.8	8.96	3.98	2.24	19.9	4.58	2.01	1.13
	2	20.7	5.18	2.30	1.29	10.9	2.62	1.16	0.65
	10	19.2	4.81	2.14	1.20	10.1	2.43	1.07	0.60
玻璃环氧 Scotch1002	1	18.3	4.56	2.03	1.14	9.59	2.31	1.02	0.57
	2	10.7	2.69	1.19	0.67	5.52	1.35	0.60	0.34
	10	10.4	2.60	1.16	0.65	5.35	1.31	0.58	0.33
芳纶环氧 Kevlar_49	1	35.5	8.88	3.95	2.22	19.7	4.54	1.99	0.78
	2	20.3	5.08	2.26	1.27	10.7	2.57	1.13	0.29
	10	18.7	4.67	2.07	1.17	9.81	2.36	1.04	0.24

临界屈曲载荷 N_{cr} 和自振频率 ω 是评价叠层板的动力稳定性的两个主要因数。以下计算了 5 种典型的复合材料, 即石墨环氧 T300/5208, 硼环氧 B4/5505, 石墨环氧 AS/3501, 玻璃环氧 Scotch_1002, 芳纶环氧 Kevlar_49。它们的弹性常数在表 1 中列出。计算是用公式(8a) 和(8b) 进行的。与 $n = \infty$ 的无耦合效应的叠层板相较, 屈曲载荷 N_{cr} 和自振频率 ω 的下降百分比%

列于表2•

五种不同复合材料具有各种不同层数 n 的叠层板 ($a/b = 1.0$) 的屈曲载荷 N_{cr} 和自振频率 ω_c 分别示于图1和图2•

为了计算振幅 A , 用方程(15)的第一个方程解出以 A 的各项表达的 b_0 的表达式, 然后将 b_0 代入到方程(15)的第二个方程, 消去 b_0 于是得到计算振幅 A 的公式:

$$\left[4 \left(\frac{\theta}{2\Omega} \right)^2 - 1 - \left(\frac{3\Phi}{4\Omega^2} \right) \right] A^2 + \left\{ \frac{2[\eta - (\beta/\Omega^2)A][\eta - (1/2)(\beta/\Omega^2)A]}{[1 + 2(3\Phi/4\Omega^2)A^2]} \right\} = 0 \quad (20)$$

如果只保留方程(20)的前两项主要项, 略去第三项, 即得到:

$$\left[4 \left(\frac{\theta}{2\Omega} \right)^2 - 1 - \left(\frac{3\Phi}{4\Omega^2} \right) \right] A^2 = 0$$

或者 $A = \left\{ \frac{[4(\theta/2\Omega)^2 - 1]^{1/2}}{(3\Phi/4\Omega^2)} \right\}$!

以上方程(21)与第二参数共振的不稳定解 A_2 相同• 作为用方程(20)计算振幅 A 的算例, 在图3中示出石墨环氧T300/5208的叠层方板 ($a/b = 1$) 的振幅 A 随着铺设层数 n 和所作用的激振频率 (θ/Ω) 而变化的曲线• 在图3中, 选取动力载荷的比值为 $N_0/N_t = 0.5$, $N_t/N_{cr} = 0.4$, 和 $\eta = 0.4$ • 激振频率 (θ/Ω) 较微小时, 例如, $(\theta/\Omega) < 1.06$ 时, B_{11} 的耦合效应使振幅 A 值随着层数 n 的减少而减少, 而非线性因子 $(3\Phi/4\Omega^2)$ 的数值随着层数 n 的减少而增加• 对于本例所计算的7300/5208方板, 当 $n = \infty$ 时, 得到 $(3\Phi/4\Omega^2) = 4.35$, 而当 $n = 2$ 时, 得到 $(3\Phi/4\Omega^2) = 7.58$ • 为了显示在不同的激振频率 ($\theta/2\Omega$) 作用下, 刚度 B_{11} 的耦合效应对于振幅 A 的影响, 本文计算了三种材料, 即石墨环氧 T300/5208, 玻璃环氧 Scotch_1002, 和硼环氧 B(4)/5505 的矩形板 ($a/b = 2$)• 三种叠层板的计算结果比较列于表3•

表3 在不同激振频率 ($\theta/2\Omega$) 作用下, 不同层板振幅 A 的比较

复合材料叠层板	$(\theta/2\Omega) = 0.5$ $n = 2$ 板的 A 大于 $n = \infty$ 板的 A 的 %	$(\theta/2\Omega) = 1.0$ $n = 2$ 板的 A 小于 $n = \infty$ 板的 A 的 %	$(\theta/2\Omega) = 2.5$ $n = 2$ 板的 A 小于 $n = \infty$ 板的 A 的 %
T300/5208	+ 18.2%	- 23.8%	- 24.2%
B(4)/5505	+ 15.7%	- 20.6%	- 20.9%
Scotch/1002	+ 7.2%	- 11.1%	- 11.2%

3 叠层板的初始缺陷对动力稳定性的影响

为了研究初始缺陷单独对叠层板的动力稳定性的影响• 我们选取一块四边简支的对称正交铺设的叠层板• 采用和前文相同的推导步骤, 可以获得以下的基本方程:

$$f''(t) + \Omega^2(1 - 2\eta \cos \theta t)f(t) + \gamma^3(t) = 0, \quad (22)$$

其中

$$\gamma = \left[\frac{\gamma\pi}{(16ma)} \right] (A_{11} + 3a^2A_{22}) - \left[\frac{A_{12}^2}{(A_{11}A_{12})} \right] \epsilon^* \cdot \quad m = \rho h \quad (23)$$

在方程(22)中的最后一项 $\gamma^3(t)$ 是代表大挠度影响项• 当考虑板的初始缺陷影响时, 由于对于板的屈曲状态起主要作用的是初始缺陷波形中与屈曲波形相同的波形, 所以假定取初始缺

陷波形 w_0 为与板的屈曲波形相同的波形:

$$e \quad w_0 = f_0 \sin\left[\frac{\pi x}{a}\right] \sin\left[\frac{\pi y}{b}\right] \quad (24)$$

以上方程(24)满足板的四边简支的边界条件。引入初始缺陷因子 λ , 设 $\lambda = (1 + 2w/w_0)$ 。经过与前文相同的推导可以获得一个非线性的修正 Mathieu 方程:

$$f''(t) + \Omega^2(1 - 2\eta \cos \theta t)f(t) + 2\eta^2 f^2(t) + 3\eta f^3(t) + \eta^3(t) = 0 \quad (25)$$

在方程(25)中由于有 $f^2(t)$ 项的存在, 因此它只有周期为 T 的解而不存在周期为 $2T$ 的解。同时, 方程(22)却在没有初始缺陷 w_0 的情况下, 具有周期为 T 的 $2T$ 的解。因此, 方程(25)具有和方程(9)相同的特征。所以, 一块具有初始缺陷的叠层板, 即使它是对称正交铺设叠层板, 在激振频率的作用下将对于进入第二参数共振比没有初始缺陷的完善板要敏感得多, 而且它的共振振幅 A 也要比完善板的大许多。在复合材料叠层板的动力稳定性设计中, 无论是对称正交铺设的还是反对称正交铺设的板, 都应该要求在叠层的固化过程中必须对其初始缺陷进行谨慎的控制。在图4中示出外界激振频率 (θ/Ω) 和初始缺陷 f_0 的大小对于振幅 A 的影响。当 f_0 的数值微小时, 振幅 A 将随着激振频率 (θ/Ω) 的增加而缓慢增加。当初始缺陷 f_0 的数值达到某一个临界值时, 这时, 在 $(\theta/\Omega) \sim A$ 的曲线上将会有有一个极值点, 在该临界点处, 振幅 A 将会有有一个突然变化(跳跃)到一个大的振幅 A 值, 这可能会造成全板的屈曲破坏。所以在复合材料叠层工艺过程中控制 f_0 的数值, 使它低于临界值是有必要的。因此, 在复合材料叠层板的动力稳定性设计中考虑板的初始缺陷是重要的。

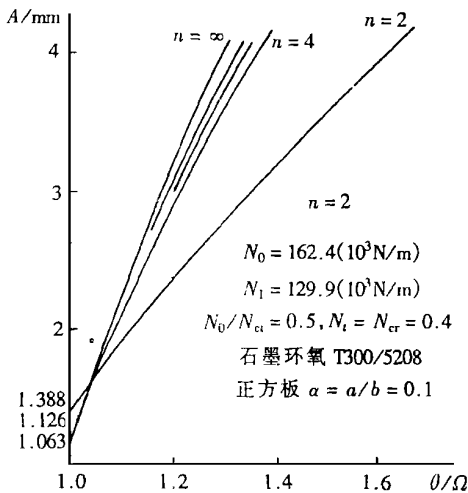


图3 振幅 A 随激振频率 (θ/Ω) 的变化

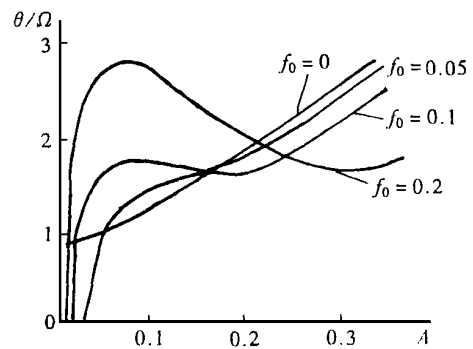


图4 初始缺陷 f_0 和激振频率 (θ/Ω) 对于振幅 A 的影响

参 考 文 献

- [1] Birman V. Dynamic stability of thick rectangular plates[J]. Mechanics Research Communication, 1987, 14(1): 37~ 42.
- [2] Srinivasan R S, Chellapandi P. Dynamic stability of rectangular laminated composite plates[J]. Computers and Structures, 1986, 24(2): 233~ 238.

- [3] Bert C W, Birman V. Dynamic instability of shear deformable anti_symmetric angle_ply plates[J]. International Journal of Solid Structures, 1987, 23(7): 1053~ 1061.
- [4] Zhou Chengti, Wang Litung, Jia Hongyu. The influence of transverse shear and rotational inertia on the dynamic instability of laminated composite plates[A]. In: The Seventh International Conference on Composite Materials, (ICCM_7) [C], Nov, 22~ 24, 1989, Guangzhou, China. Proceedings Vol. Oxford, New_York, Beijing, Tokyo, Frankfurt, Sydney, Toronto, Sao Paulo: Published by Pergamon Press Co. 455~ 462.
- [5] Zhou Chengti, Buckling, vibration, and dynamic stability of ARALL plates[A]. The Ninth International Conference on Composite Materials, (ICCM_9) [C], July, 12~ 16, 1993, Madrid, Spain. Proceedings Vol. VI, pp. 455~ 462. Madrid, Spain: Published by University of Zaragoza, Woodhead Publishing Ltd.
- [6] Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем [М]. Москва: ГИИТ, 1956.
- [7] Jones Robert M. Mechanics of Composite Materials [M]. Washington U S A: Hemisphere Publishing Co, (now Taylor & Francis Co), 1975.
- [8] Alexander Chajes, Principals of Structural Stability Theory [M]. Massachusetts: Published in Massachusetts State University: Prentice_Hall Inc, U S A 1974.
- [9] Stephen W, Tsai, Hahn H, Thomas. Introduction to Mechanics of Composite Materials [M]. Westport, California: Technomic Publishing Co, U S A, 1980.

Influence of Initial Imperfection and Coupling Between Bending and Extension on Vibration, Buckling and Nonlinear Dynamic Stability of Laminated Plates

Wang Lie dong, Liu Zhengning, Zhou Chengti
(Dalian University, Dalian 116622, P R China)

Abstract: In this paper, the influence of initial imperfection and coupling between bending and extension on vibration, buckling and nonlinear dynamic stability of laminated plates is studied. The governing equation is derived. It is a nonlinear modified Mathieu Equation. Numerical solutions of 5 typical composite materials namely, Scotch_1002, Kevlar_49, B4/ 5505, T300/ 5208 and AS/ 3501 are computed. Results reveal that the existence of initial imperfection and coupling effect, make plates much more sensitive to entering parametric resonance with amplitude greater than that of perfect plates. Coupling effect for different laminates, especially, for that with few layers, is different. If coupling effect is neglected, design of plate structures for buckling and dynamic stability would be unconservative for more than 10% .

Key words: initial imperfection; coupling effect; nonlinear dynamic stability