应用数学和力学, 第 20 卷 第 5 期(1999 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 05_0486_05

二维平板可压缩边界层的二次稳定性分析

范绪箕, 楼卓时

(上海交通大学二系 1011 室, 上海 200030)

(周哲玮推荐)

摘要: 本文在二维可压缩边界层中应用 Floquet 分析, 建立了控制次谐波稳定性的方程组, 研究在二维可压缩边界层转捩过程中二维有限振幅的 T_S 波对三维线性小扰动的作用, 并计算了来流马赫数对次谐波的产生和发展情况的影响, 从中可以看出二维和三维扰动波相互作用对二维可压缩流动边界层的发展过程所产生的影响

关 键 词: 可压缩边界层; 二次失稳; 扰动
中图分类号: V211 3 文献标识码: A

引 言

近来, 在边界层从层流到湍流的转捩问题研究中, 二维和三维扰动波的相互作用问题引起了人们极大的兴趣, 这是由大量的试验研究表明, 在边界层转捩过程的中后期, 三维性的发展起着很重要的作用; 而且, 在二维扰动波出现后不远的下游, 三维扰动就出现了, 这时虽然二维扰动的振幅还很小, 但是, 流动对于三维扰动来说已经变得不稳定了, 这称为二次失稳 目前, 在二次失稳问题的研究中, 对于不可压缩流动有了显著的成果, Herbert[1] 应用 Floquet 分析的基本思想分析了二维有限振幅的T_S 波和三维线性小扰动的相互作用问题, 计算了三维小扰动的增长和次谐波转捩问题 但是, 对于可压缩流动问题却研究较少 本文基于这个目的, 在二维可压缩边界层中应用 Floquet 分析, 建立了控制次谐波稳定性的方程组, 研究了在二维可压缩边界层转捩过程中二维有限振幅的T_S 波和三维线性小扰动的相互作用, 并计算了来流马赫数对次谐波的产生和发展情况的影响, 从中可以看出二维和三维扰动波相互作用对二维可压缩流动边界界层的发展过程所产生的影响

1 分 析

可压缩层流边界层的流动情况可由下面一组方程描述:

$$\frac{\quad}{t} + (\ V) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{(\ V)}{t} + (\ VV) = - \ p + \frac{1}{e} \ , \tag{2}$$

收到日期: 1997_01_26; 修订日期: 1999_03_20
作者简介: 范绪箕(1914~) , 男, 教授, 上海交大前校长, 发表论文 40 余篇, 获 1978 年全国科学大会一等奖, 1985 年国家科技进步奖等多项国家级奖励.

$$\left(\frac{}{t} + V \right) = (\hat{} - 1) M^2 \left[\frac{p}{t} + V \quad p + \frac{1}{Re} \right] + \frac{1}{Re \quad Pr} \left(\quad \right) \tag{3}$$

界一层分析

$$\hat{} M^2 p = \quad , \tag{4}$$

上述方程中 Raphson 各量均为量纲一参数, 其参考量分别如下: 长度, $L = (v \quad x/ U \quad)^{1/2}$; 速度, U ; 时间, L/ U ; 压力, U^2 ; 气体(假设为理想气体) 的密度、温度、比热、粘性系数和导热系数均采用相应的来流参数作为参考量　　和　　分别为量纲一应力张量和耗散项, 定义为:

$$= [\quad V + (\quad V)^T] + \quad VI, \tag{5}$$

$$= \quad V, \tag{6}$$

其中, Re 为雷诺数, $Re = \quad U \quad L/ \quad$; Pr 为普朗特数, $Pr = c_p \quad / k$

我们按照 Floquet[2] 的基本思想, 假设二维平板可压缩流场由以下三部分组成:

1) 二维平行定长流 $q_0(y)$;

2) 振幅为有限量 A 的二维 T_S 波, $A q_1(x, y, t)$;

3) 三维线性小扰动 $q_2(x, y, z, t)$

这样, 总流场为:

$$q(x, y, z, t) = q_0(y) + A [q_1(y) e^{i(\ x- \ t)} + cc] + q_2(x, y, z, t), \tag{7}$$

其中, $A = A(x) = A_0 e^{- \ _i dx}$, 我们忽略 $A(x)$ 随时间的变化　cc 为共轭复数项

这样, 我们认为(1) + (2) 为平均流场, 它只沿流向作周期性变化　这部分的特征值问题我们可以采用 Mack[3] 的六阶系统求出, 其中密度扰动量 $_1$ 和压力扰动量 p_1 的关系可通过状态方程建立:

$$\hat{} M^2 p_1 = \quad _1 \ _0 + \quad _0 \ _1 \tag{8}$$

粘性系数扰动量 $_1$ 可认为是温度扰动量 $_1$ 的线性函数, 即

$$_1 = \frac{d \ _0}{d \ _0} \quad _1 \tag{9}$$

为了求解二次失稳问题, 我们按 Flopuet 分析方法设流场中的三维扰动量为:

$$q_2(x, y, z, t) = e^{\ x+ \ t} e^{i \ z} \quad (x, y, t) \tag{10}$$

其中, 　为展向波数, $= \ _r + i \ _i$ 和 $= \ _r + i \ _i$ 为两个特征复参数, 按特征值理论只能求出其中的两个实参量, 还必须补充另外两个参数, 我们采用次谐波空间幅展理论, 取 $_r = 0$, $_i = - \quad /2$　这样, $_r$ 表示次谐波的增长率, $_i$ 表示二维 T_S 波和三维扰动的相互作用 (x, y, t) 为和平均流场的周期 $x - \quad t/$ 　相同的周期函数, 我们按 Fourier 级数展开, 可得

$$q_2(x, y, z, t) = e^{\ x+ \ t} e^{i \ z} \sum_{-} \ _n(y) e^{i (x- \ t/ \ ) n} \tag{11}$$

对于次谐波模式, 取 $n = 1, - 1$, 可得三维小扰动为:

$$q_2(x, y, z, t) = e^{\ x} e^{i \ z} [\ _1(y) e^{i(\ x- \ t)} + \ _{-1}(y) e^{- \ i(\ x- \ t)}], \tag{12}$$

mp

其中, $_{-1}(y) = \quad _1(y)$ 为 $_1(y)$ 的共轭复数

把式(7)、(11) 和(12) 代入到原控制方程组中, 忽略非线性项, 再把平均流场减去, 可得下式:

$$(\boldsymbol{a}D^2 + \boldsymbol{b}D + \boldsymbol{c}) \quad = A(\boldsymbol{d}D^2 + \boldsymbol{e}D + \boldsymbol{f}) \quad + A^2(\boldsymbol{g}D + \boldsymbol{h}) \quad , \tag{13}$$

其中,

$$(u_2, v_2, w_2, \quad _2, \quad _2)^{\mathrm{T}}, \quad D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y},$$

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}$ 为基于平均流常的 5 5 阶系数矩阵

上式中, 密度扰动量 $_2$ 和压力扰动量 p_2 的关系如下式:

$$\hat{\ }M^2 p_2 = \quad _0 \ _2 + \quad _2 \ _0 + A(\ _1 \ _2 + \quad _2 \ _1) \tag{14}$$

粘性系数扰动量 $_2$ 按 Taylor 级数展开, 取前二项, 可得

$$_2 = \frac{d \ _0}{d \ _0} \quad _2 + \frac{d^2 \ _0}{d \ _0^2} \quad _1 \ _2 \tag{15}$$

式(13) 为二维可压缩边界层的次谐波空间幅展控制方程, 其中 , , R 和 A 四个参变量, 所以问题最后归结为如下的特征质问题:

$$= \quad (\ , \ , R; A) \tag{16}$$

2 数值求解方法

1 平均流场的计算可按 Mack[4] 的打靶法, 应用 Runge_Kutta 积分求得;

2 三维小扰动的二次失稳问题可参考 Brown[5] 的方法, 即把式(13) 改写成 8 阶常微分方程组的形式:

$$Dz_m - \sum_{j=1}^{8} \boldsymbol{C}_{mj} z_j = A \sum_{j=1}^{8} \boldsymbol{l}_{mj} z_j, \tag{17}$$

其边界条件为:

$$\begin{aligned} &z_1 = z_3 = z_4 = z_7 = 0 \mid_{y=0}, \\ &z_1, z_3, z_4, z_7 \quad 0 \mid_{y} \quad , \end{aligned} \tag{18}$$

其中:

$$z_1 = u_2, \quad z_2 = Du_2, \quad z_3 = v_2, \quad z_4 = w_2,$$

$$z_5 = Dw_2, \quad z_7 = \quad _2, \quad z_8 = D \quad _2,$$

$\boldsymbol{C}_{mj}$ 和 $\boldsymbol{l}_{mj}$ 为 8 阶系数矩阵

求解此常微分方程组时, 我们把计算域分成两个部分:

1) $y \quad y_e$ 为边界层外部势流区, 其系数矩阵为常量, 可按 Crout[6] 求出其理论解;

2) $0 \quad y \quad y_e$ 为边界层内部区域, 可按文献[7] 的方法进行积分;

3) 在 $y = y_e$ 处, 按 1) 和 2) 计算得到的值必须相等, 由此才能保证原方程组的解在整个计算域内连续, 通过采用 Newton_方法不断修正各参变量的值, 我们可以控制计算精度为 10^{-5}

3 计算结果与讨论

应用上面所介绍的方法, 我们计算了二维平板可压缩边界层的二次稳定性问题, 计算结果如图 1~ 4 所示

图 1 所示为二维 T_S 波的增长率随雷诺数 Re 和马赫数(Ma 数) 的变化情况, 图中频率 $F = 10^6 \quad / R = 60$ 固定 从图中可以看出, 随着 Ma 数的增加, 扰动增长率逐渐减小, 但最大扰动增长率却逐渐向上游移动;

图 2 所示为 $Ma = 0 \ 8$, $Re = 850$, $F = 60$ 时次谐波增长率随展向波数 b 和不同的振幅 A 的

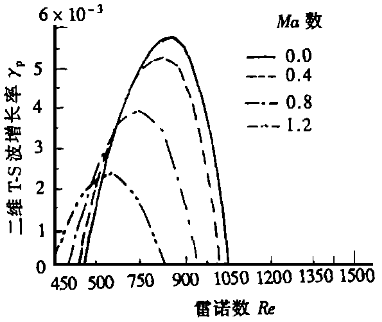

图 1　二维 T_S 波的增长
率 $_p$ 计算结果图

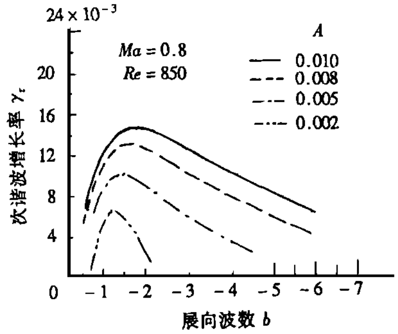

图 2　次谐波增长率
$_r$ 计算结果图

变化情况, 其中, 展向波数 $b = 10^3 / Re$　从图中可以看出, 随着 A 的下降, 次谐波最大增长率急剧下降, 这和不可压缩情形类似[8] ;

图 3 所示为二维 T_S 波和三维扰动相互作用后的扰动放大系数随雷诺数 Re 和马赫数(Ma 数) 的变化情况, 图中展向波数 b = 0 15(由图 2 中可知, 此时扰动增长率最大) , 频率 F 取为 60(同前)　从图中可以看出, 次谐波相对于二维 T_S 波来说对稳定性的影响要明显得多, 同时也可以看出, 随着马赫数的增加, 最大扰动放大系数急剧下降;

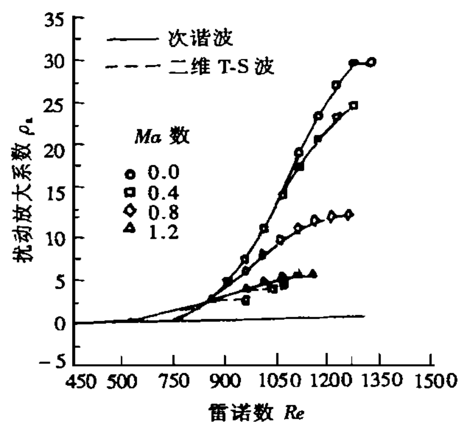

图 3　扰动放大系数 $_a$ 计算结果图

图 4 所示为 F = 60, A = 0 01, b = 0 15, Re = 850 时各扰动量在边界层厚度 Y 方向的变化情况　从图中可以看出:

1) 随着 Ma 数的增加, 临界层向壁面方向移动;
2) 对于次谐波各参数, Y 向二次扰动速度 v_2 相对来说要小得多;
3) 随着 Ma 数的增加, 展向二次扰动速度 w_2 将逐渐消失;
4) 随着 Ma 数的增加, 温度扰动量 $_2$ 相对于 $_1$ 来说, 要缓慢得多

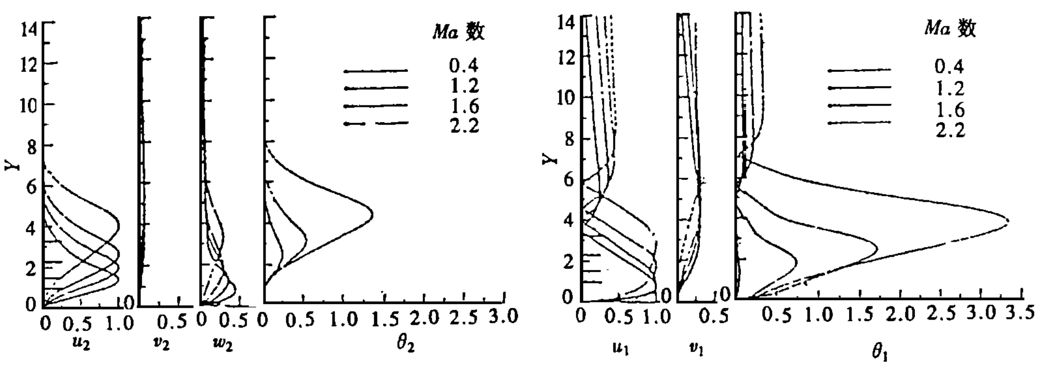

图 4　各扰动参量在边界层厚度方向的变化情况图

4 结　　论

通过上面的分析,我们可以得到以下几点结论:

1) 气体的可压缩性可以抑制扰动的增长,随着来流 Ma 数的增加,层流边界层将更为稳定,同时,边界层内的临界层也将向壁面移动;

2) 二次稳定性问题在层流边界层的稳定性问题中起着很大的作用,它可以抑制扰动的无限度增长;同时,在来流 Ma 数比较小时,展向扰动不可忽略,它将对沿流向涡的产生与发展有很大的影响;

3) 通过上面的研究表时,应用二次稳定性理论可以有效地分析层流边界层向湍流的转捩过程中二维和三维扰动的相互作用问题,对我们认识转捩的机理有很大的帮助

参　考　文　献

[1] Herbert T. Secondary instability of boundary layers[J]. Annual Rev of Fluid Mech, 1988, **20**: 487~652.

[2] 陈矛章编. 粘性流体动力学基础[M], 北京: 高等教育出版社, 1993.

[3] Mack L M. Review of linear compressible stability theory[A], Stability for Time Dependent and Spatially Varying Flows, edited by D L. Dwoyer and M Y Hussaini, New York: Springer_Verlag, 1985, 164~187.

[4] Mack L M. Boundary Layer Stability Theory, NASA CR_131501[R], 1969.

[5] Brown W B. Stability of compressible boundary layer[J]. AIAAJ, 1967, **5**(10): 1753~1759.

[6] Crout P D. A Short method of evaluating determinants and solving systems of linear equations[J]. Trans Am Inst Elec Engrs, 1941, **60**(1): 12~35.

[7] Scout M R, Wats H A. Computational solution of linear two_point boundary value problems via orthonormalization[J]. SIAM Jourmal of Numerical Analysis, 1977, **14**(1): 40~70.

[8] Nayfeh A H. Three_dimensional spatial secondary instability in boundary layer flows[R]. AIAA, 85_169, 1995.

Analysis and Calculation of Secondary Instability of Two_Dimensional Compressible Boundary Layer Flows of A Plate

Fan Xuji, Lou Zhuoshi

(Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P R China)

Abstract: Thia paper used the Floquet s three_dimensional linear stability theory in the analysis of two_dimensional compressible boundary layer, a set of stability equations is constructed, the effect of three dimensional linear small perturbation on the two_dimensional compressible boundary layer transition is studied, and the effect of coming flow Ma number on growth and development of the subharmonics is calculated. It can be seen from the calculations, the effect caused by the interaction of two_dimensional and three_dimensional perturbation waves on the development of two_dimensional compressible laminar boundary layer.

Key words: compressible boundary layer; secondary instability; perturbation