

文章编号: 1000-0887(1999)05-0507-08

# 垂直分布荷载 $g_0/\cos^2\theta$ 作用下圆弧 双铰拱失稳临界力的解\*

潘 岳, 戚云松

(青岛建筑工程学院, 青岛 266520)

(周承侗推荐)

**摘要:** 在计入轴力对拱弯曲的影响后,建立了圆弧双铰拱在垂直分布荷载  $g_0/\cos^2\theta$  作用下的总势能。按 Ritz 法求得在该荷载作用下具有足够工程精度的拱失稳临界力的第 4 次近似值,并与圆弧双铰拱受径向均布荷载作用的情况作了比较,得到一些可供参考的结果。

**关键词:** 圆弧双铰拱; 垂直分布荷载  $g_0/\cos^2\theta$ ; 失稳临界力

**中图分类号:** O175.13 **文献标识码:** A

## 引 言

与受其他分布荷载作用相比,承受垂直分布荷载作用的拱的稳定问题是更具有实际背景和意义的。工程中遇到的垂直分布荷载可分为两类,一类是垂直均布荷载;另一类是垂直变分布荷载。地下工程中需要有较大跨度的无内柱地下空间的顶拱<sup>[1]</sup>,或其上采用沙土充填的有较大跨度的桥拱,都承受类似于图 1 中所示的跨中荷载集度较小而两端集度较大的垂直变分布荷载。抛物线拱是承受垂直均布荷载的合理拱轴,这是共知的。由于在图 1 中的垂直变分布荷载  $g_0/\cos^2\theta$  作用下,圆拱任一横截面的弯矩  $M(\theta)$  均为零。由曲杆平衡微分方程  $dM/ds - Q = 0$  知,该截面上剪力  $Q(\theta)$  为零,截面上唯一不为零的内力是轴力  $N(\theta)$ ,所以圆拱是承受垂直分布荷载  $g_0/\cos^2\theta$  的合理拱轴。关于确定荷载  $g_0/\cos^2\theta$  的详细过程请参见文[2,3]。

以圆弧拱轴上点的切向位移  $u(\theta)$  为变量建立的关于荷载  $g(\theta) = g_0/\cos^2\theta$  的用于求解临界力的稳定方程,是一个六阶变系数微分方程

$$EI(u^{(6)} + 2u^{(4)} + u'') + r_0g_0\left\{\frac{1}{\cos\theta}u^{(4)} + \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}u'' + \frac{\cos^2\theta + 2\sin^2\theta}{\cos^3\theta}u' + \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}u' + \frac{2}{\cos^3\theta}u\right\} = 0 \quad (a)$$

方程(a)首先由 аок д<sup>[2]</sup>得到的,但是,由于求不到方程(a)的通解。在将满足边界条件的拱轴位移函数与式(a)相乘后做积分有困难,用 Galerkin 法也无法奏效。采用 Ritz 法求解则要建立总势能。拱的总势能除包括弯曲应变能和荷载势能之外,还须计入轴力的影响。目

\* 收稿日期: 1997\_04\_08; 修订日期: 1999\_01\_08

基金项目: 冶金部资助项目, 山东自然科学基金资助项目(Y98\_A08011)

作者简介: 潘岳(1947~), 男, 副教授, 已发表论文近二十篇。

前除作者之外, 尚未见有通过考虑轴力的影响来建立拱的总势能, 用 Ritz 法求解拱失稳临界力的文献发表, 故上述问题一直未获解决。鉴于工程中对承受类似垂直分布荷载  $g_0/\cos^2\theta$  的拱及掌握这类拱的稳定性的需要, 作者拟按此思路采用 Ritz 法对图 1 由之导得拱失稳临界力的反对称失稳问题进行分析。

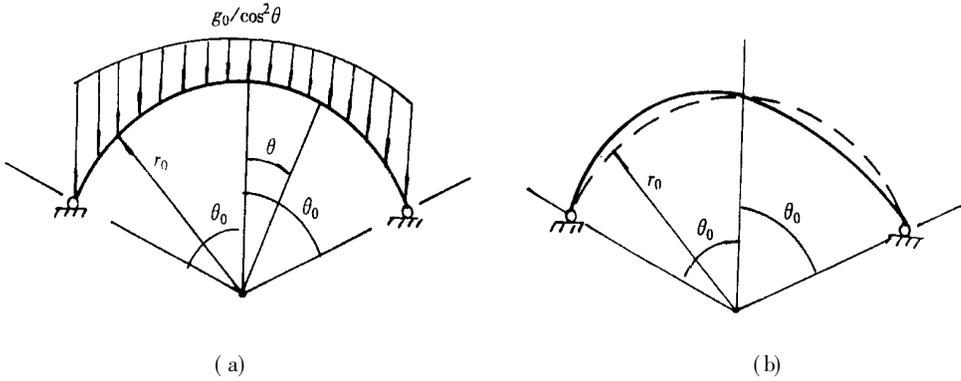


图 1 圆弧双铰拱受垂直分布荷载  $g_0/\cos^2\theta$

## 1 圆弧双铰拱的总势能及其变分

稳定问题中略去剪力影响和中层伸缩, 故拱的总势能

$$\Pi = U_b + U_m + V, \quad (1)$$

式中  $U_b$  为弯曲应变能

$$U_b = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{EI}{2} \kappa^2 r_0 d\theta = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{EI}{2} \left[ \frac{1}{r_0^2} \cdot \frac{d^2 w}{d\theta^2} + \frac{w}{r_0^2} \right]^2 r_0 d\theta, \quad (b)$$

式中  $\kappa$  为拱轴位移后的附加曲率<sup>[3,4]</sup>,  $w$  为拱轴上点的径向位移。在有位移之前拱横截面上无弯矩, 轴力  $N_g$  与荷载保持平衡。在拱有位移后, 由于假设拱无轴向伸缩, 故轴力  $N_g$  保持不变, 但拱横截面上产生了弯矩,  $N_g$  对此弯曲的影响相当于一个假想的径向分布力  $N_g \left[ \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{d\theta^2} + \frac{w}{2} \right]$ <sup>[4]</sup>。此径向分布力引起的应变能记为  $U_m$ 。由于该分布力是在拱轴有位移  $w$  时才产生的, 所以

$$U_m = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{2} N_g \left[ \frac{1}{r_0^2} \cdot \frac{d^2 w}{d\theta^2} + \frac{w}{r_0^2} \right] w r_0 d\theta \quad [5,6] \quad (c)$$

$V$  为荷载势能

$$V = - \left[ \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (g_0/\cos^2\theta) \cos\theta \cdot w r_0 d\theta + \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (g_0/\cos^2\theta) \sin\theta \cdot w r_0 d\theta \right], \quad (d)$$

式中  $u = \int w d\theta + c$ <sup>[3]</sup> 为与  $w$  对应的拱轴上点的径向位移。利用对称荷载  $g_0/\cos^2\theta$  的作用下, 在图 1 中  $\theta = 0$  截面上剪力为零的条件, 由静力平衡方程可得轴力

$$N_g = g_0 r_0 / \cos\theta \quad (2)$$

将式(b)、(c)、(d)、(2)代入式(1)中得系统总势能

$$\Pi = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \left[ \frac{EI}{2} \left( \frac{1}{r_0^2} \cdot \frac{d^2 w}{d\theta^2} + \frac{w}{r_0^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{g_0 r_0}{\cos\theta} \left( \frac{1}{r_0^2} \cdot \frac{d^2 w}{d\theta^2} + \frac{w}{r_0^2} \right) w \right] r_0 d\theta -$$

$$\text{稳问} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \left[ \left( \frac{g_0}{\cos^2\theta} \right) \cos\theta \cdot w + \left( \frac{g_0}{\cos^2\theta} \right) \right] \cos\theta \cdot w \, d\theta \quad (3)$$

由变分原理知, 可由  $\Pi$  的二阶变分

$$\delta^2 \Pi = 0 \quad (4)$$

来确定使系统失稳的临界荷载  $g_{ocr}$ . 对式(3) 取二阶变分得

$$\delta^2 \Pi = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \left[ \frac{EI}{3} (\delta w'' + \delta w) + \frac{g_0}{\cos\theta} (\delta w'' + \delta w) \delta w \right] d\theta \quad (5)$$

## 2 拱的失稳临界力

用 Ritz 法求解稳定问题临界力的近似值时, 要假设结构失稳时的形状函数, 即其相对于稳定平衡时的位移函数. 对于圆弧双铰拱的反对称失稳, 可假设位移函数为

$$\delta w = \sum_{n=1}^N w_n = \sum_{n=1}^N \omega_n \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta, \quad (6)$$

式(6)中每一个  $w_n = \omega_n \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta$  与对应的  $u_n = \frac{\theta_0}{n\pi} \omega_n \left[ (-1)^n - \cos \frac{n\pi}{\theta_0} \right]$  一起满足双铰拱所有的位移和力边界条件

$$w_n(\pm\theta_0) = 0, \quad u_n(\pm\theta_0) = 0, \quad w_n''(\pm\theta_0) = 0 \quad (e)$$

将式(6)代入式(5)中得

$$\begin{aligned} \text{势能} &= \frac{EI}{3} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \left[ \left( \frac{n\pi}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right] \left[ \left( \frac{m\pi}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right] \omega_n \omega_m \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \cdot \sin \frac{m\pi}{\theta_0} \theta d\theta - \\ &g_0 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\cos\theta} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \left[ \left( \frac{n\pi}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right] \omega_n \omega_m \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \cdot \sin \frac{m\pi}{\theta_0} \theta d\theta. \end{aligned} \quad (f)$$

由于

$$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \cdot \sin \frac{m\pi}{\theta_0} \theta d\theta = \begin{cases} \theta_0 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m), \end{cases} \quad (g)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\left( \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \right)^2}{\cos\theta} d\theta &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin\theta_0}{1 - \sin\theta_0} - \int_0^{\theta_0} \frac{\cos \frac{2n\pi}{\theta_0} \theta}{\cos\theta} d\theta = \\ &\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin\theta_0}{1 - \sin\theta_0} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E_k}{(2k)!} \sum_{r=0}^{(k-0.5)} (-1)^r \frac{(2k)!}{(2k-2r-1)!} \cdot \frac{\theta_0^{2k+1}}{(2n\pi)^{2r+2}} \cdot \\ \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \cdot \sin \frac{m\pi}{\theta_0} \theta}{\cos\theta} d\theta &= \int_0^{\theta_0} \frac{\cos \frac{n-m}{\theta_0} \pi \theta - \cos \frac{n+m}{\theta_0} \pi \theta}{\cos\theta} = \\ &(-1)^{n+m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E_k}{(2k)!} \sum_{r=0}^{(k-0.5)} (-1)^r \frac{(2k)! [ (n+m)^{2r+2} - (n-m)^{2r+2} ] \theta_0^{2k+1}}{(2k-2r-1)! [ (n^2 - m^2) \pi ]^{2r+2}} \quad (-\pi/2 < \theta_0 < \pi/2) \end{aligned} \quad (h)$$

式(h)中的  $E_k$  为 Euler 数<sup>[7]</sup>, 所以式(f)中总势能的 2 阶变分  $\delta^2 \Pi$  是  $\omega_n$  的二次型, 即

$$\delta^2 \Pi = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N A_{nm} \omega_n \omega_m \quad (i)$$

这样通过(4)求临界力  $g_{ocr}$  的条件, 转化为式(i)关于  $\omega_n$  二次型的系数矩阵的行列式为零, 即

$$\det[A] = 0, \quad (7)$$

略加整理后的式(7)中行列式的系数

$$\begin{aligned}
 A_{nm} &= \frac{EI}{r_0^3} \left[ \left( \frac{n\pi}{\theta_0} \right)^2 - 1 - g_0 \left[ \frac{1}{2\theta_0} \ln \frac{1 + \sin \theta_0}{1 - \sin \theta_0} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Eu}{(2k)!} \sum_{r=0}^{(k-0.5)} (-1)^r \frac{(2k)!}{(2k-2r-1)!} \cdot \frac{\theta_0^{2k}}{(2n\pi)^{2r+2}} \right] \right] \\
 A_{nm} &= -g_0 (-1)^{n+m} \frac{(n^2\pi^2 + m^2\pi^2 - 2\theta_0^2)}{2(n^2\pi^2 - \theta_0^2)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Eu}{(2k)!} \sum_{r=0}^{(k-0.5)} (-1)^r \times \\
 &\quad \frac{(2k)! [f(n+m)^{2r+2} - (n-m)^{2r+2}] \theta_0^{2k}}{(2k-2r-1)! [(n^2 - m^2)\pi]^{2r+2}} \\
 &\quad (-\pi/2 < \theta_0 < \pi/2; n, m = 1, 2, \dots, N) \cdot \quad (j)
 \end{aligned}$$

若在级数式(6)中只取一项,即  $n = m = 1$ , 则由式(7)和式(j)可得临界力的第一次近似

$$\begin{aligned}
 g_{0cr} &= \frac{EI}{r_0^3} \left[ \left( \frac{n\pi}{\theta_0} \right)^2 - 1 - \left[ \frac{1}{2\theta_0} \ln \frac{1 + \sin \theta_0}{1 - \sin \theta_0} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Eu}{(2k)!} \sum_{r=0}^{(k-0.5)} (-1)^r \frac{(2k)!}{(2k-2r-1)!} \cdot \frac{\theta_0^{2k}}{(2n\pi)^{2r+1}} \right] \right] \\
 &\quad (-\pi/2 < \theta_0 < \pi/2) \cdot \quad (8)
 \end{aligned}$$

对于图2中双铰拱受径向均布荷载的情况,其失稳临界力

$$g_{cr} = \frac{EI}{r_0^3} \left[ \left( \frac{n\pi}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right]^{1/3}, \quad (k)$$

相应的拱失稳时的轴力  $N_{gc} = g_{cr} r_0 = 4EI(\pi^2 - \theta_0^2)/kl^2$ , 式中  $l = 2r_0\theta_0$  为拱轴全长。当  $\theta_0$  很小时

$$N_{0gc} = 4EI\pi^2/l^2. \quad (l)$$

将本文得到的式(8)中的  $g_{ocr}$  代入式(2)可得到拱

在垂直荷载  $g_0/\cos^2\theta$  作用下失稳时的轴力  $N_{gc}$ 。

令  $\theta_0 \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0, N_{gc}$  的分母由 L'Hospital 法则计算结果为 1, 从而可得

$$N_{0gc} = 4EI\pi^2/l^2, \quad (m)$$

式(1)和式(m)中的轴力都等于长为  $l$  而两端铰支直杆受压失稳第二临界力。这是因为  $\theta_0 \rightarrow 0$  时, 图1、图2中拱上荷载已趋于一致的缘故。

若在级数式(6)中取项, 即

$$\delta w = \omega_1 \sin(\pi/\theta_0)\theta + \omega_2 \sin(2\pi/\theta_0)\theta, \quad (n)$$

则式(7)成为

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

式(9)展开即得稳定特征方程, 而可解得 2 个  $g_{0cr}$ , 其中较小者即为拱失稳临界力的第二次近似。若在级数式(6)中各取 3 项和 4 项时, 式(7)左端各是一个三阶和四阶行列式, 而或解得 3 个和 4 个  $g_{ocr}$  值, 其中各自最小的  $g_{ocr}$  分别为临界力的第三和第四次近似。

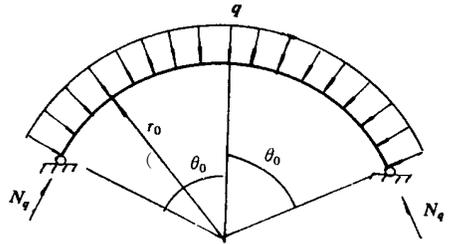


图2 圆弧双铰拱受径向均布荷载

### 3 临界力表值的分析

先要说明的是式(h)和式(j)中级数是将  $1/\cos\theta$  按  $\theta$  展开后积分所得,故其收敛域是  $-\pi/2 < \theta_0 < \pi/2$ , 而  $\theta_0 = \pi/2$  时级数发散。由于级数组成复杂,此无穷级数之和或  $\int_0^{\theta_0} \left[ \cos \frac{i\pi}{\theta_0} \theta / \cos\theta \right] d\theta$  未能表示成为某个以  $\theta_0$  为自变量的显函数。在  $\theta_0 = 0$  附近,级数收敛得很快,故可用前几项来作为此级数和近似值。但工程实际中的拱  $\theta_0$  并不很小,其取值一般在  $50^\circ$  左右者居多。这时级数由敛得很慢,而不可能在级数中截取不是很多的项来作为此级数和的近似值,并且所截取的项数随  $\theta_0$  增大要很快增加。所以为了保证精度且使问题表述简捷,在求解特征方程式(8)、(9)等而对式(j)中的级数和作计算时,是简明地通过对式(h)中的  $\int_0^{\theta_0} \left[ \cos \frac{i\pi}{\theta_0} \theta / \cos\theta \right] d\theta$  作数值积分来完成的。积分采用高精度的 Newton-Cotes ( $n = 5$ ) 法<sup>[8]</sup>,将第一个  $\theta_0$  分成 200 步,计算中数值保留小数点后 8 位,其计算结果可精确到小数点后第 4 位。

表 1 中列出  $\theta_0 = \sum_{i=1}^n 1 \sim 1.5689$  时的  $\int_0^{\theta_0} \left[ \cos \frac{i\pi}{\theta_0} \theta / \cos\theta \right] d\theta$  的数值积分值,以便应用、查对。

从表 1 看到,当  $i$  增大时,积分  $\int_0^{\theta_0} \left[ \cos \frac{i\pi}{\theta_0} \theta / \cos\theta \right] d\theta$  的绝对值很快减小,并且当  $i$  为奇数与偶数时,积分  $\int_0^{\theta_0} \left[ \cos \frac{i\pi}{\theta_0} \theta / \cos\theta \right] d\theta$  分别为负值与正值。相应式(h)中的积分  $\int_0^{\theta_0} \left[ \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \cdot \sin \frac{m\pi}{\theta_0} \theta / \cos\theta \right] d\theta = \int_0^{\theta_0} \left[ \cos \frac{n-m}{\theta_0} \pi\theta - \cos \frac{n+m}{\theta_0} \pi\theta / \cos\theta \right] d\theta$ 。当  $n, m$  均为奇数或均为偶数时积分值为正;而当  $n, m$  中只有一个奇数时积分值为负。这样行列式(7)中的付系数  $A_{n \neq m}$  的正负完全取决于  $n$  与  $m$  的奇偶了,从而使得  $A_{n \neq m}$  随  $n, m$  的增大呈现出一正一负的波动。

利用式(j)、表 1 及式(8)和(9),且在级数式(6)中各取 3 项和 4 项时,可得在垂直荷载  $g_0/\cos^2\theta$  作用下圆弧双铰拱失稳临界力的第一到第四次近似值,如表 2 所示。为作比较,表中还给出图 2 中  $\theta_0 = 0.1 \sim 1.5689$  时,径向均布荷载作用下拱失稳临界力  $q_{cr} = \frac{EI}{r_0^3} \left[ \left( \frac{\pi}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right]$  的值。

从表 2 中看到:

i) 对于不同的  $\theta_0$ ,  $g_{0cr}$  的第二次近似值一致地小于第一次近似值。但第三次近似值却一致地大于第二次近似值,并且在  $\theta_0$  等于 0.1、0.2 和 1.4 ~ 1.5689 时还大于第一次近似值。这种波动是前面已说明的行列式(7)中的付系数  $A_{n \neq m}$  随  $n, m$  增大所呈现的正负波动性所决定的。再看第四次近似,第四次近似值与第三次近似值之间虽互有大小,但一致地小于第一次近似,又一致地大于第二次近似。

ii) 第四次近似与第三次近似之间的相对差值  $R$  已非常小,在  $\theta_0 = 1.4$  时,  $R < 0.4\%$ ; 在  $\theta_0 < 1.2$  之后,  $R < 0.1\%$ 。据此,并结合 i) 中的分析知,  $g_{0cr}$  的真值是介于第一次近似和第二次近似之间的。随着在级式(6)中所取项数的增多,  $g_{0cr}$  近似值的波动趋于平缓,它是从左右两边向其真值收敛的,且第四次近似值已相当接近其真值。由 Ritz 法求临界力的实例知,在已知临界力精确值的问题<sup>[9-11]</sup>中,由满足结构位移边界条件的位移函数所求得临界力第

二次近似值对于临界力精确值的相对差值一般都小于 2%，所以表 2 中垂直荷载  $g_0/\cos^2\theta$  作用下圆弧双铰拱第四次近似值具有足够的工程精度。

表 1  $\theta\pi \int_0^{\theta_0} \cos \frac{i\pi}{\theta_0} \theta / \cos \theta \, d\theta$  数值积分表 [Newton-Cotes ( $n = 5$ ) 法 · 步长  $\theta_0/200$ ]

$\theta_0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$
0.1	$-9.5 \times 10^{-5}$	$2.4 \times 10^{-5}$	$-1.1 \times 10^{-5}$	$5.9 \times 10^{-6}$	$-3.8 \times 10^{-6}$	$2.6 \times 10^{-6}$	$-1.9 \times 10^{-6}$	$1.5 \times 10^{-6}$
0.2	$-7.7 \times 10^{-4}$	$1.9 \times 10^{-4}$	$-8.7 \times 10^{-5}$	$4.9 \times 10^{-5}$	$-3.2 \times 10^{-5}$	$2.2 \times 10^{-5}$	$-1.6 \times 10^{-5}$	$1.3 \times 10^{-5}$
0.3	$-2.6 \times 10^{-3}$	$6.8 \times 10^{-3}$	$-3.0 \times 10^{-4}$	$1.7 \times 10^{-4}$	$-1.1 \times 10^{-4}$	$7.9 \times 10^{-4}$	$-5.8 \times 10^{-5}$	$4.5 \times 10^{-5}$
0.4	$-6.4 \times 10^{-3}$	$1.7 \times 10^{-3}$	$-7.7 \times 10^{-4}$	$4.3 \times 10^{-4}$	$-2.8 \times 10^{-4}$	$2.0 \times 10^{-4}$	$-1.5 \times 10^{-4}$	$1.1 \times 10^{-4}$
0.5	-0.0129	$3.5 \times 10^{-3}$	$-1.6 \times 10^{-3}$	$9.1 \times 10^{-4}$	$-6.0 \times 10^{-4}$	$4.2 \times 10^{-4}$	$-3.6 \times 10^{-4}$	$2.4 \times 10^{-4}$
0.6	-0.0232	$6.6 \times 10^{-3}$	$-3.0 \times 10^{-3}$	$1.7 \times 10^{-3}$	-0.0011	$8.0 \times 10^{-4}$	$-5.9 \times 10^{-4}$	$4.6 \times 10^{-4}$
0.7	-0.0386	0.0162	$-5.4 \times 10^{-3}$	$3.1 \times 10^{-3}$	-0.0020	0.0014	-0.0011	$0.3 \times 10^{-4}$
0.8	-0.0612	0.0195	$-9.8 \times 10^{-3}$	$5.4 \times 10^{-3}$	-0.0035	0.0025	-0.0019	0.0014
0.9	-0.0937	0.0318	-0.0156	$9.1 \times 10^{-3}$	$-6.1 \times 10^{-3}$	0.0043	-0.0032	0.0025
1.0	-0.1404	0.0513	-0.0259	0.0175	-0.0103	0.0074	-0.0055	0.0043
1.1	-0.2083	0.0826	-0.0435	0.0266	-0.0180	0.0129	-0.0097	0.0076
1.2	-0.3097	0.1350	-0.0750	0.0473	-0.0327	0.0230	-0.0181	0.0142
1.3	-0.4695	0.2283	-0.1357	0.0897	-0.0640	0.0476	-0.0306	0.0294
1.4	-0.7505	0.4166	-0.2707	0.1910	-0.1431	0.1108	-0.0885	0.0721
1.5	-1.4031	0.9326	-0.6914	0.5420	-0.4400	0.3660	-0.3101	-0.2667
1.5689	-4.7219	4.1046	-3.7363	3.4748	-3.2728	3.1080	-2.9695	2.8501

表 2 垂直荷载  $g_0/\cos^2\theta$  作用下圆弧双铰拱失稳临界力

$\theta_0$	$\theta_0/(\circ)$	$g_{ocr} r_0^3/EI$ 第一次近似	$g_{ocr} r_0^3/EI$ 第二次近似	$g_{ocr} r_0^3/EI$ 第三次近似	$g_{ocr} r_0^3/EI$ 第四次近似	$q_{cr} r_0^3/EI$
0.1	5°44'	984.564	984.564	984.568	984.564	985.960
0.2	11°26'	244.39	244.347	244.350	244.348	245.740
0.3	17°11'	107.276	107.273	107.276	107.276	108.662
0.4	22°55'	59.306	59.300	59.305	59.306	60.685
0.5	28°39'	37.109	37.099	37.107	37.108	38.471
0.6	34°23'	25.057	25.043	25.055	26.056	26.416
0.7	40°06'	17.800	17.776	17.793	17.796	19.142
0.8	45°50'	13.090	13.064	13.793	13.796	14.421
0.9	51°34'	9.870	9.837	9.865	9.868	11.186
1.0	57°18'	7.572	7.532	7.568	7.569	8.870
1.1	63°02'	5.878	5.828	5.873	5.872	7.175
1.2	68°45'	4.593	4.534	4.590	4.585	5.854
1.3	74°29'	3.597	3.530	3.595	3.586	4.840
1.4	80°13'	2.807	2.726	2.808	2.790	4.036
1.5	85°13'	2.11558	2.06743	2.17227	2.13569	3.38649
1.5689	89°53'	1.78174	1.66562	1.79809		3.00968

ii) 当  $\theta_0$  很小时,  $g_{ocr}$  与  $q_{cr}$  几乎相等, 这是与式(1) 与式(m) 相等是一致的.  $\theta_0$  增大时,  $g_{ocr}$  与  $q_{cr}$  均在减小, 但  $g_{ocr}$  始终要小于  $q_{cr}$ . 当拱的高跨比  $h/l = 0.3$  即  $\theta_0 = 61^\circ 55'$  时,  $g_{ocr} \approx 0.82q_{cr}$ .

这里需要补充说明两点: 第一是  $\theta_0 = 1.5689$  是  $g_{ocr}$  计算值的驻点. 当  $\theta_0 > 1.5689$  后, 各次  $g_{ocr}$  计算值均开始增大, 其收敛性也逐渐变差. 当  $\theta_0 = 1.5707$  时, 计算过程中的数值已超过计算公式的定义域. 计算机停止计算. 显然,  $\theta_0 > 1.5689$  后的  $g_{ocr}$  计算值已与问题不符. 这是与  $\theta_0 \rightarrow \pi/2 = 1.570796$  时, 解发散有关. 第二是  $\theta_0 = 45^\circ, 60^\circ$  时, 拱荷载集度  $g_0/\cos^2\theta = 2g_0, 4g_0$ . 比较之下, 在  $\theta_0 \leq 60^\circ$  时(拱的高距比  $h/l = \leq 0.29$ ) 时, 工程中拱所受的荷载方能接近或类似于荷载  $g_0/\cos^2\theta$ . 故工程中可根据拱的中心角或高跨比及拱上荷载状况对表 2 中的  $g_{ocr}$  值作参考, 取用.

## 4 铰支端轴力

由式(2) 知拱内轴力是变量, 最大轴力发生在铰支端, 而临界状态时的铰支端轴力

$$N_{gc} = g_{ocr} \cdot r_0/\cos\theta_0 \quad (10)$$

据表 2 中的  $g_{ocr}$  第四次近似值时, 表 3 中给出了  $\theta_0 = 0.7 \sim 1.4$  时的铰支端轴力  $N_{gc}$  为作比较, 表中还给出图 2 中受径向均布荷载作用时的, 圆弧双铰拱处于临界状态时的拱内轴力

$$N_{qc} = q_{cr} \cdot r_0 \quad (o)$$

表 3 临界状态时拱端轴力

$\theta_0$	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
$\theta_0(^{\circ})$	$40^{\circ}06'$	$45^{\circ}50'$	$51^{\circ}34'$	$57^{\circ}18'$	$63^{\circ}02'$	$68^{\circ}45'$	$74^{\circ}29'$	$80^{\circ}43'$
$N_{gc} \cdot r_0^2/EI$ 第四次近似	23.498	19.327	16.709	14.409	14.022	15.116	16.402	19.826
$N_{qc} \cdot r_0^2/EI$	19.142	14.1421	11.105	8.070	7.157	5.054	4.040	4.036

以下参照表 3 来对这两类拱处于临界状态的轴力时进行比较. 从表中看到:

i) 对于  $\theta_0 = 0.6 \sim 1.4$ ,  $N_{gc}$  始终大于  $N_{qc}$ .

ii) 对于扁拱, 即  $\theta_0 = 0.7$  时,  $N_{qc}$  与  $N_{gc}$  均较大. 随  $\theta_0$  增大,  $N_{qc}$  在不断减小.  $\theta_0$  增大时,  $N_{gc}$  也减小; 但当  $\theta_0 > 1.1$  之后,  $N_{gc}$  却变得增大起来. 直至  $\theta_0 = 1.4$ . 这是与式(10) 中的  $1/\cos\theta$  有关.  $\theta_0 = 1.0, 1.1$  ( $\theta_0 = 57^{\circ}18', 63^{\circ}02'$ ) 时,  $N_{gc}/N_{qc} = 1.62, 1.96$ .

## 5 结 束 语

i) 圆弧拱是承受垂直分布荷载  $g_0/\cos^2\theta$  的合理拱轴. 故工程中承受类似于荷载  $g_0/\cos^2\theta$  作用的拱, 其形式应考虑采用圆弧拱.

ii) 本文在计入失稳时轴力对拱弯曲的影响后, 建立了圆拱在垂直分布荷载  $g_0/\cos^2\theta$  作用下完整的总势能. 按 Ritz 法求得在该荷载作用下, 具有足够工程精度的拱失稳临界力的第四次近似值.

iii) 从文中表 2 看到,  $g_{ocr}$  始终小于  $q_{cr}$ , 所以圆拱受垂直分布荷载  $g_0/\cos^2\theta$  作用时, 若去

按圆拱受径向均布荷载作用的结果去估算拱失稳临界力将是不安全的。当  $\theta_0 \leq 60^\circ$  ( $h/l \leq 0.29$ ) 时, 工程中拱承受的跨中集度较小而两端度较大的垂直分布荷载是接近于或类似于垂直分布荷载  $g_0/\cos^2\theta$ 。在此范围内, 表 2 中的  $g_{ocr}$  第四次近似值可拱工程参考、取用。由于在荷载  $g_0/\cos^2\theta$  作用下, 拱端的轴力始终较大。故对承受此类荷载的圆拱, 不论其高跨比为多小, 对基础均应有较高的要求。

### 参 考 文 献

- [1] 林同炎. 拱是结构也是建筑物[J]. 土木工程学报, 1997, 30(3): 9~ 15.
- [2] 潘岳, 戚云松. 圆环失稳临界压力的突变理论解法[J]. 力学与实践, 1991, 5: 26~ 27.
- [3] 黎绍敏. 稳定理论[M], 北京: 人民交通出版社, 1989, 195~ 201.
- [4] 梁炳文. 弹塑性稳定理论[M], 北京: 国防工业出版社, 1983, 72~ 84.
- [5] 潘岳. 圆环失稳临界压力的突变理论解法[J]. 力学与实践, 1991, 5: 26~ 27.
- [6] 潘岳. 巷道“封闭式”冲击的尖点突变模型[J]. 岩土力学, 1994, 1: 34~ 41.
- [7] 《数学手册》编写组. 数学手册[M], 北京: 人民教育出版社, 1979, 227, 231.
- [8] 何旭成, 苏煜城. 计算数学简明教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1988, 116~ 118.
- [9] 唐家祥, 王仕统. 结构稳定理论[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1989, 100~ 105.
- [10] 夏志斌, 潘有昌. 结构稳定理论[M], 上海: 高等教育出版社, 1988, 81~ 83.
- [11] 吴明德, 弹性杆件稳定理论[M], 北京: 高等教育出版社, 1988, 155~ 160.

## The Solution to the Destabilizing Critical Load of Circular Double Articulated Arch Under Going Vertical Distributive Load $g_0/\cos^2\theta$

Pan Yue, Qi Yunsong

(Qingdao Institute of Architecture and Engineering, Qingdao 266520, P R China)

**Abstract:** In this paper, after taking the effect of axis force on bending into consideration, the general poteneial energy for the circular double articulated arch is established undergoing vertical distributive load  $g_0/\cos^2\theta$ . With sufficient engineering precision, the fourth approximations to the destabilizing critical load of the arch under this load are obtained by Ritz method. The approximations to the critical load table are listed for various center angles of arch, and are contrasted with the critical load circular arch undergoing radial uniform load. Some reference results have been obtained.

**Key words:** circle arch; vertical distributive load in  $g_0/\cos^2\theta$ ; destabilizing critical load