应用数学和力学, 第 20 卷 第 5 期(1999 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 05_0515_10

再论 Hellinger_Reissner 原理与 Hu_Washizu 原理之等价性*

何吉欢

(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(薛大为推荐)

摘要: 阐述了 Hu_Washizu 变分原理实际上是一个赝广义变分原理, 即虽然其驻值条件满足所有的场方程及边界条件, 但它存在某种约束• 为了清楚说明问题, 本文构造一些新的赝广义变分原理, 用逆拉氏乘子法可以清楚地看出其约束关系, 并进一步证明了 Hu_Washizu 变分原理和 Hellinger_Reissner 变分原理之等价定理•

关 键 词: 弹性力学变分原理; Hellinger_Reissner 变分原理; Hu_Washizu 变分原理; 半反推法; 试泛函

中图分类号: O343.2 文献标识码: A

引 言

1954 年胡海昌教授首次应用猜试法推导得到了 Hu_Washizu 变分原理[1], 这无疑是变分理论发展史上的重要事件• 1964 年钱伟长教授系统地阐述了应用拉氏乘子法推导广义变分原理的方法, 并推导得到了 Hu_Washizu 变分原理, 从而使得推导广义变分原理从盲目走向科学[2]• 1983 年钱伟长教授第一次发现了 Hu_Washizu 变分原理中的三类变量并不独立, 应力应变关系依旧是变分约束条件[3, 4, 5], 这一发现导致了高阶拉氏乘子法的诞生, 这是变分发展史上的重要里程碑• 在文[4] 中, 钱伟长教授详细证明了 Hellinger_Reissner 与 Hu_Washizu 变分原理的等价性, 本文将从不同的角度来证明其等价性定理• 为了说明问题的方便, 本文提出了赝广义变分原理的概念, 即当某一泛函中的所有变量都看成是独立变量时, 其驻值条件满足所有的场方程及边界条件, 但它存在某种约束• 为了清楚说明问题, 本文构造一些新的赝广义变分原理, 用逆拉氏乘子法可以清楚地看出其约束关系•

1 弹性力学中的基本方程及其变分原理[5]

1) 平衡方程:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \qquad (\tau \text{ 中}), \tag{1}$$

其中 σ_{ij} 为应力, $\sigma_{ij,j} = \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$, f_i 为体力, τ 为弹性体的体积•

---

* 收稿日期: 1997_11_02; 修订日期: 1998_12_05

作者简介: 何吉欢(1965~) , 男, 讲师, 已在国际杂志上如 ASME J. Appl. Mech. , Int J Nonl Mech 等上发表了 10 多篇论文, 在国内各类杂志上发表了近 30 篇论文, 获 1998 年国际 Literati 奖.

2) 应力应变关系:

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl} e_{kl} \qquad (\tau \text{ 中}), \tag{2a}$$

或

$$e_{ij} = b_{ijkl} \sigma_{kl} \qquad (\tau \text{ 中}), \tag{2b}$$

其中 e_{ij} 为应变, a_{ijkl}, b_{ijkl} 分别表示弹性常数和柔性常数•

设 A 表示应变能, B 表示余能, 应力应变关系还有以下三种等价的表示方法:

$$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}} = \sigma_{ij}, \tag{2c}$$

$$\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}} = e_{ij}, \tag{2d}$$

$$A + B = e_{ij} \sigma_{ij} \cdot \tag{2e}$$

3) 应变位移方程:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (\tau \text{ 中}) \cdot \tag{3}$$

4) 位移已知边界:

$$u_i = \bar{u}_i \qquad (\Gamma_u \text{ 中}) \cdot \tag{4}$$

5) 外力已知边界:

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{p}_i \qquad (\Gamma_\sigma \text{ 中}) \cdot \tag{5}$$

其中 Γ_u, Γ_σ 表示位移已知和外力已知边界, 设总边界为 Γ, 则:

$$\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_\sigma \tag{6}$$

已知的变分原理有:

1) 单变量最小位能原理

$$J_p(u_i) = \iiint (A - f_i u_i) \mathrm{d}\tau - \iint_{\Gamma_\sigma} \bar{p}_i u_i \mathrm{d}S \cdot \tag{7}$$

该变分原理的独立变量为 u_i, 约束条件为应力位移关系式(3)、应力应变关系式(2) 及位移已知边界方程(4) •

2) Hellinger_Reissner 变分原理

$$J_{HR}(\sigma_{ij}, u_i) = \iiint (B + \sigma_{ij,j} u_i + f_i u_i) \mathrm{d}\tau - \iint_{\Gamma_u} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i dS - \iint_{\Gamma_\sigma} u_i (\sigma_{ij} n_j - \bar{p}_i) \mathrm{d}S \cdot \tag{8}$$

该变分原理的独立变量为 σ_{ij}, u_j, 约束条件为应力应变关系式(2) •

有趣的是如果把方程(3) 作为约束条件, 那么上述泛函欧拉方程满足方程(1) 和(2)• 这一现象在文[13] 中作了详细阐述•

3) Hu_Washizu 变分原理

$$J_{HW}(\sigma_{ij}, u_i) = \iiint \left\{ A - \sigma_{ij}\left(e_{ij} - \frac{1}{2} u_{i,j} - \frac{1}{2} u_{j,i} \right) - f_i u_i \right\} \mathrm{d}\tau - \iint_{\Gamma_u} \sigma_{ij} n_j (u_i - \bar{u}_i) \, dS - \iint_{\Gamma_\sigma} \bar{p}_i u_i \mathrm{d}S \cdot \tag{9}$$

该变分原理中的三类变量并不相互独立, 应力应变关系式(2) 依旧是它的约束条件•

4) 钱伟长广义变分原理

钱伟长教授于 1983 年应用高阶拉氏乘子法第一次导出了无约束的三类变量的广义变分原理[3,4,5]:

$$J_{\mathrm{Chien}}(\sigma_{ij}, e_{ij}, u_i) = \iiint\left\{A - e_{ij}\sigma_{ij} + \frac{1}{2}\sigma_{ij}(u_{i,j} + u_{j,i}) - f_i u_i + \lambda(A + B - e_{ij}\sigma_{ij})\right\} \mathrm{d}\tau - \iint_{\Gamma_u}\sigma_{ij} n_j (u_i - \bar{u}_i)\,\mathrm{d}S - \iint_{\Gamma_\sigma}\bar{p}_i u_i\,\mathrm{d}S。 \tag{10}$$

2 赝广义变分原理

为了说明 Hu_Washizu 原理具有约束条件，我们将提出了赝广义变分原理的概念。所谓赝广义变分原理，是这样的一个泛函，当泛函中的所有变量都看成是独立变量时，其驻值条件满足所有的场方程及边界条件，但它存在某种约束。我们先构造以下一个泛函

$$J = \iiint\left\{A(u_i) - f_i u_i\right\} \mathrm{d}\tau + \iiint\lambda(\sigma_{ij} - a_{ijkl}e_{kl})\left(e_{ij} - \frac{1}{2}u_{i,j} - \frac{1}{2}u_{j,i}\right) \mathrm{d}\tau + IB, \tag{11a}$$

式中

$$IB = -\iint_{\Gamma_u}\sigma_{ij} n_j (u_i - \bar{u}_i)\,\mathrm{d}S - \iint_{\Gamma_\sigma}\bar{p}_i u_i\,\mathrm{d}S, \tag{11b}$$

λ 为一非零常数，应变能 A 可表示成

$$A(u_i) = \frac{1}{8}(u_{i,j} + u_{j,i})\,a_{ijkl}(u_{k,l} + u_{l,k})。$$

泛函(11)对应于 σ_{ij}, e_{ij} 及 u_i 的欧拉方程可写为:

$$\delta\sigma_{ij}:\quad \lambda\left\{e_{ij} - \frac{1}{2}u_{i,j} - \frac{1}{2}u_{j,i}\right\} = 0, \tag{12}$$

$$\delta e_{ij}:\quad \lambda\left\{(\sigma_{ij} - a_{ijkl}e_{kl}) + a_{klji}\left(e_{kl} - \frac{1}{2}u_{k,l} - \frac{1}{2}u_{l,k}\right)\right\} = 0, \tag{13}$$

$$\delta u_i:\quad -\left[\frac{1}{2}a_{ijkl}(u_{k,l} + u_{l,k})\right]_{,j} - f_i + \lambda(\sigma_{ij} - a_{ijkl}e_{kl})_{,j} = 0, \tag{14}$$

关于 Γ_u: 方程(4)，

$$\text{关于 }\Gamma_\sigma:\quad \left[\frac{1}{2}a_{ijkl}(u_{k,l} + u_{l,k})\right] n_j - \bar{p}_i - \lambda(\sigma_{ij} - a_{ijkl}e_{kl})\,n_j = 0。 \tag{15}$$

很显然方程(12)就是场方程(3)，应用(12)或(3)式方程(13)即可转化为场方程(2a)，由(3)和(2a)式方程(14)即等价于场方程(1)，在边界 Γ_σ 上，由(3)和(2a)式方程(15)满足边界条件(5)。所以其驻值条件满足所有的场方程及边界条件，但是这里我们要问的是“泛函(11)是一个三类独立变量的广义变分原理吗?”为了回答这个问题，我们先来看一个简单的泛函:

$$J(u, v, \Phi) = \iint\left\{\frac{1}{2}(u^2 + v^2) - u\frac{\partial\Phi}{\partial x} - v\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + IB, \tag{16}$$

式中 IB 为积分边界项。

其欧拉方程很容易得到:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = u, \tag{18}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = v。 \tag{19}$$

一般来讲，从一个广义变分原理出发可以很方便地得到各类亚广义变分原理和单变量的变分原理。把场方程或边界条件(欧拉方程)直接代入泛函即可得到各种约束型的泛函，这一

过程文[6]称之为约束恢复变换(constraint_recovering transformation),但或许叫逆拉氏乘子法(inverse Lagrange multiplier method)更恰当•

把(18)式作为约束代入泛函(16)得:

$$J(v,\ \Phi)=\iint\left\{\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2-v\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+IB \tag{20a}$$

或

$$J(v,\ \Phi)=\iint\left\{\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}u^2-v\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+IB, \tag{20b}$$

上述泛函的约束条件为(18)式•

再把(19)式作为约束代入(20)得单个独立变量(Φ)的泛函:

$$J(\Phi)=-\iint\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+IB, \tag{21a}$$

或

$$J(\Phi)=\iint\left\{\frac{1}{2}(u^2+v^2)\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+IB• \tag{21b}$$

上述泛函的约束条件为(18)和(19)•

从上面我们可以看出,应用约束恢复变换,当一个场方程(欧拉方程)代入泛函时,一个泛函将减少一个独立变量• 但是有时有这种情况:当一个场方程(欧拉方程)代入泛函时,一个泛函将减少二个或更多的独立变量,如我们构造下面一个泛函:

$$J(u,v,\ \Phi)=\iint\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(u-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(v-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+IB• \tag{22}$$

容易证明它的欧拉方程满足(17)~(19)• 但是如果把(18)或(19)代入(22)得到的泛函只有一个独立变量• 我们称这样的泛函为赝广义变分原理• 另外我们也可以得到真正的广义变分原理如下:

$$J(u,v,\ \Phi)=\iint\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\alpha\left(u-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\beta\left(v-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+dB, \tag{23}$$

式中 α 和 β 为非零常数•

现在我们来分析一下泛函(11),当我们把场方程(2a)或(3)作为约束代入方程(11)时,我们只能得到下面的一个泛函

$$J=\iiint\left\{A(u_i)-f_iu_i\right\}\mathrm{d}\tau+IB, \tag{24}$$

上述泛函很明显只有一类独立变量• 所以泛函(11)只是一个赝广义变分原理• 我们可以构造很多这样的赝广义变分原理,如

$$J=\iiint\left\{\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}-\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{j,i}+f_iu_i\right\}\mathrm{d}\tau+\iiint\lambda(\sigma_{ij}-a_{ijkl}e_{kl})\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\mathrm{d}\tau+\iint_{\Gamma_u}\sigma_{ij}n_j(u_i-\bar{u}_i)\mathrm{d}S+\iint_{\Gamma_\sigma}\bar{p}_iu_i\mathrm{d}S• \tag{25}$$

式中 λ 为非零常数,且 $\lambda\neq-1$•

容易证明它的驻值条件满足所有的场方程及边界条件,但通过约束恢复变换很容易看出它是一个赝广义变分原理• 通过同样的方法我们可知Hu_Washizu 变分原理也是一个赝广义变分原理•

3 Hellinger_Reissner 与 Hu_Washizu 变分原理之等价定理

本文我们将用几种新的方法来证明 Hu_Washizu 和 Hellinger_Reissner 原理之等价性•

3.1 拉氏乘子法

一般情况下,当不考虑边界条件的情况时,消除一个约束方程需加一个拉氏乘子,同时可引进另一个新的独立变量• 我们知道最小位能原理是单变量 (u_i) 的变分原理,现在应用拉氏乘子消除约束条件(3) 式,在忽略积分边界项的情况下,可表示成如下形式:

$$J_p^*(u_i, e_{ij}, \lambda_{ij}) = \iiint\left\{(A - f_i u_i) + \lambda_{ij}\left[e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\right]\right\}\mathrm{d}\tau• \tag{26}$$

这样识别拉氏乘子后,上述泛函就变成了一个二类独立变量(位移和应变)的变分原理,其欧拉方程应该有二组:一组就是泛函(7) 的欧拉方程(1),另一组就是被消除的约束方程(3)•消除一组约束方程(3) 不可能由单变量的变分原理转化成三类独立变量的变分原理,同时识别的拉氏乘子必须用原独立变量 u_i 及新引入的独立变量 e_{ij} 表示,即 $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(u_i, e_{ij})$•

如果我们想消除最小势能原理中的两组约束,我们不得引进两组拉氏乘子 λ_{ij} 和 α_{ij}:

$$J_P^*(u_i, e_{ij}, \sigma_{ij}, \lambda_{ij}, \alpha_{ij}) = \iiint(A - f_i u_i)\,\mathrm{d}\tau + \iiint\lambda_{ij}\left[e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\right]\mathrm{d}\tau + \iiint\alpha_{ij}\left(e_{ij} - \frac{\partial A}{\partial\sigma_{ij}}\right)\mathrm{d}\tau• \tag{27}$$

然而这样给识别拉氏乘子带来了很多困难,或者说几乎不可能• 在很多情况下在识别过程中会遇到临界变分现象,即 1) 在变分过程中部分拉氏乘子为零[3,7]; 2) 识别拉氏乘子后,部分欧拉方程不符合场方程[7]• 临界变分是拉氏乘子法的固有特性,这是因为拉氏乘子在变分过程中作独立变量处理,而识别后它们变成了原独立变量的函数,也就是说它们根本不是独立变量了,这种逻辑上的矛盾往往会引起临界变分现象[7]•

现在我们来识别(26) 式中的拉氏乘子,令 $\delta J_p^*(u_u, e_{ij}, \lambda_{ij}) = 0$,可得以下欧拉方程:

$$\delta u_i:\ -f_i + \lambda_{ij,j} = 0, \tag{28}$$

$$\delta e_{ij}:\ \frac{\partial A}{\partial e_{ij}} + \lambda_{ij} = 0, \tag{29}$$

$\delta\lambda_{ij}$: 方程(3)•

对比(28) 和(1) 式,(29) 和(2c) 式,于是文献[1,10] 认为,这样可以方便地识别拉氏乘子:

$$\lambda_{ij} = -\sigma_{ij} \tag{30}$$

由于 σ_{ij} 不是原独立变量 u_i 及新引入的独立变量 e_{ij} 的函数表达式,所以必须用它们显式和隐式表示出来:

$$\lambda_{ij} = -\sigma_{ij} = -\sigma_{ij}(u_i, e_{ij}) = -\frac{\partial A(e_{ij})}{\partial e_{ij}}• \tag{31}$$

在上述识别拉氏乘子的过程中已应用了应力应变约束条件,把识别的拉氏乘子代回到(26) 式得:

$$J_{\mathrm{HW}}(e_{ij}, u_i) = \iiint\left\{A(e_{ij}) - \sigma_{ij}(u_i, e_{ij})\left(e_{ij} - \frac{1}{2}u_{i,j} - \frac{1}{2}u_{j,i}\right) - f_i u_i\right\}\mathrm{d}\tau, \tag{32}$$

或

$$J_{\mathrm{HW}}(e_{ij}, u_i) = \iiint\left\{A(e_{ij}) - \frac{\partial A(e_{ij})}{\partial e_{ij}}\left(e_{ij} - \frac{1}{2}u_{i,j} - \frac{1}{2}u_{j,i}\right) - f_i u_i\right\}\mathrm{d}\tau• \tag{33}$$

(32) 式即著名的 Hu_Washizu 变分原理; (33) 式就是钱伟长二类独立变量的广义变分原理•

其实我们可以从方程(29)式方便地识别拉氏乘子:

$$\lambda_{ij} = -\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}. \tag{34}$$

如把应力应变作为变分约束条件, 则上式即变成(30)式. 所以应力应变关系是 Hu_Washizu 变分原理的变分约束条件.

非常有意思的是如果在 Hu_Washizu 变分原理中, 把 σ_{ij}, e_{ij}, u_i 当作独立变量, 则其驻值条件满足所有的欧拉方程(1)~(3)和边界条件(4)和(5). 但事实上它是一个赝广义变分原理. 如果它真是三类独立变量的广义变分原理, 那消去一组方程(如应变位移方程), 即可得到二类独立变量的变分原理. 把方程(3)代入(19)式得:

$$J = \iiint\left(A - f_i u_i\right) \mathrm{d}\tau + IB. \qquad u_j \tag{35}$$

这根本不是什么二类独立变量的变分原理, 而是一类变量的最小位能原理. 从而可以充分说明 Hu_Washizu 变分原理不可能是三类独立变量的广义变分原理, 而是二类独立变量的变分原理, 应力应变而是它的约束关系.

下面我们将用回代变换的方法来进一步证明 Hu_Washizu 变分原理必和 Hellinger_Reissner 变分原理等价性定理.

3.2　回代变换法

Hellinger_Reissner 变分原理的约束条件是应力应变关系式(2). 通过回代变换[6], 即把(2e)代回到泛函(8)式, 可得以下形式的泛函:

$$\begin{aligned} J_{\mathrm{HR}}(\sigma_{ij}, u_i) = & \iiint(e_{ij}\sigma_{ij} - A + \sigma_{ij,j}u_i + f_i u_i)\mathrm{d}\tau - \\ & \iint_{\Gamma_u}\sigma_{ij}n_j u_i \mathrm{d}S - \iint_{\Gamma_u} u_i(\sigma_{ij}n_j - p_i)\mathrm{d}S. \end{aligned} \tag{36}$$

很显然约束条件并未改变. 并且其欧拉方程也不会改变, 下面作一简单的证明.

证明　令(36)式取驻值可得

$$\begin{aligned} \delta J_{\mathrm{HR}}(\sigma_{ij}, u_i) = & \iiint\left[e_{ij}\,\delta\sigma_{ij} + \sigma_{ij}\frac{\partial e_{ij}}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij} - \frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\frac{\partial e_{ij}}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij} + \sigma_{ij,j}\,\delta u_i - \right. \\ & \left.\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\delta\sigma_{ij} + f_i\delta u_i\right]\mathrm{d}\tau + \oiint u_i n_j\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}S - \iint_{\Gamma_u} n_j u_i\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}S - \\ & \iint_{\Gamma_u}(\sigma_{ij}n_j - p_i)\delta u_i\mathrm{d}S - \iint_{\Gamma_u} u_i n_j\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}S = 0. \end{aligned} \tag{37}$$

应用应力应变关系式, 上式可进一步简化为:

$$\begin{aligned} \delta J_{\mathrm{HR}}(\sigma_{ij}, u_i) = & \iiint\left\{\left[e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\right]\delta\sigma_{ij} + [\sigma_{ij,j} + f_i]\delta u_i\right\}\mathrm{d}\tau + \\ & \iint_{\Gamma_u} n_j(u_i - \bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}S - \iint_{\Gamma_u}(\sigma_{ij}n_j - p_i)\delta u_i\mathrm{d}S = 0. \end{aligned} \tag{38}$$

因为 σ_{ij}, u_i 相互独立, 所以由 $\delta\sigma_{ij}$ 可得应变位移方程(3), 由 δu_i 可得平衡方程(1); 在边界 Γ_u, 由 $\delta\sigma_{ij}$ 可得方程(4), 在边界 Γ_σ, 由 δu_i 可得方程(5). 由此可见, 通过回代变换并不影响泛函的性质. 对(36)式进行分部积分, 可得:

$$\begin{aligned} J_{\mathrm{HR}}(\sigma_{ij}, u_i) = & -\iiint\left\{A - \sigma_{ij}\left(e_{ij} - \frac{1}{2}u_{i,j} - \frac{1}{2}u_{j,i}\right) - f_i u_i\right\}\mathrm{d}\tau + \\ & \oiint_{\Gamma}\sigma_{ij}n_j u_i\mathrm{d}S - \iint_{\Gamma_u}\sigma_{ij}n_j u_i\mathrm{d}S - \iint_{\Gamma_\sigma} u_i(\sigma_{ij}n_j - p_i)\mathrm{d}S, \end{aligned} \tag{39}$$

或

$$J_{HR}(\sigma_{ij}, u_i) = -\iiint\left\{A - \sigma_{ij}\left(e_{ij} - \frac{1}{2}u_{i,j} - \frac{1}{2}u_{j,i}\right) - f_i u_i\right\} d\tau + \iint_{\Gamma_u}\sigma_{ij}n_j(u_i - \bar{u}_i)dS + \iint_{\Gamma_\sigma}\bar{p}_i u_i dS, \tag{40}$$

于是可得:

$$J_{HR}(\sigma_{ij}, u_i) + J_{HW}(\sigma_{ij}, u_i) = 0 \cdot \tag{41}$$

可见在应力应变约束条件下, 我们能从 Hellinger_Reissner 变分原理导得 Hu_Washizu 变分原理• 同理反过来, 我们也能从 Hu_Washizu 变分原理导得 Hellinger_Reissner 变分原理, 把(2e)代到(9)式得:

$$J_{HW}(\sigma_{ij}, u_i) = \iiint\left\{(\sigma_{ij}e_{ij} - B) - \sigma_{ij}\left(e_{ij} - \frac{1}{2}u_{i,j} - \frac{1}{2}u_{j,i}\right) - f_i u_i\right\} d\tau - \iint_{\Gamma_u}\sigma_{ij}n_j(u_i - \bar{u}_i)dS - \iint_{\Gamma_\sigma}\bar{p}_i u_i dS \cdot \tag{42}$$

对上式分部积分, 即得 Hellinger_Reissner 变分原理•

从而证明了 Hellinger_Reissner 与 Hu_Washizu 变分原理的等价性•

3.3 半反推法

在方程(27)中, 两组拉氏乘子一般可表示成:

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(\sigma_{ij}, e_{ij}, u_i, \sigma_{ij,j}, e_{ij,j}, u_{i,j}), \tag{43}$$

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(\sigma_{ij}, e_{ij}, u_i, \sigma_{ij,j}, e_{ij,j}, u_{i,j}) \cdot \tag{44}$$

为此作者引进了一新的待定变量 F, 它可表示为:

$$F = F(\sigma_{ij}, e_{ij}, u_i, \sigma_{ij,j}, e_{ij,j}, u_{i,j}) = \lambda_{ij}\left[e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\right] + \alpha_{ij}\left(\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}} - e_{ij}\right) \cdot \tag{45}$$

于是方程(27)可写成如下形式:

$$J_P^*(\sigma_{ij}, e_{ij}, u_i) = \iiint\left\{A - f_i u_i + F(\sigma_{ij}, e_{ij}, u_i, \sigma_{ij,j}, e_{ij,j}, u_{i,j})\right\} d\tau \cdot \tag{46}$$

上式带待定函数 F 的泛函, 作者称之为试泛函(Trial_Functional), 试泛函往往具有能量形式, 所以也称作能量试泛函(Energy, Trial_Functional)• 令试泛函取驻值, 再应用已知的场方程, 可以方便地识别待定函数 F• 这一方法称之为半反推法[7~13]•

如希望从最小位能原理出发构造一个二类独立变量(e_{ij}, u_i)的变分原理, 为此我们构造以下试泛函:

$$J_P^{**}(e_{ij}, u_i) = \iiint\left\{A - f_i u_i + F(\sigma_{ij}, e_{ij,j}, u_{i,j})\right\} d\tau, \tag{47}$$

令试泛函(33)式取驻值, 即 $\delta J^{**} = 0$, 可得以下欧拉方程:

$$\delta u_i: -f_i + \frac{\partial F}{\partial u_i} - \left(\frac{\partial F}{\partial u_i}\right)_{,j} = 0, \tag{48}$$

我们称上式具有待定函数的欧拉方程为试欧拉方程, 它应满足某一场方程, 如平衡方程(1), 这样上式可简化为:

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} - \left(\frac{\partial F}{\partial u_i}\right)_{,j} = -\sigma_{ij,j}, \tag{49}$$

注意到 $\sigma_{ij,j}u_i = \sigma_{ij,i}u_j$, 可初步识别待定函数 F 得:

$$F = \frac{1}{2}\sigma_{ij}(u_{i,j} + u_{j,i}) + F_1(e_{ij}, e_{ij,j}), \tag{50a}$$

或

$$F = -\sigma_{ij,j}u_i + F_1(e_{ij}, e_{ij,j}), \tag{50b}$$

式中 F_1 为一新的待定函数• 于是试泛函(47) 可改写成:

$$J_{P1}^{**}(e_{ij}, u_i) = \iiint\left\{A + \frac{1}{2}\sigma_{ij}(u_{i,j} + u_{j,i}) - f_iu_i + F_1(e_{ij}, e_{ij,j})\right\}\mathrm{d}\tau, \tag{51a}$$

$$J_{P2}^{**}(e_{ij}, u_i) = \iiint\left\{A - \sigma_{ij,j}u_i - f_iu_i + F_1(e_{ij}, e_{ij,j})\right\}\mathrm{d}\tau• \tag{51b}$$

再令新的试泛函取驻值可得:

$$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}} + \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma_{kl}}{\partial e_{ij}}(u_{k,l} + u_{l,k}) + \frac{\partial F_1}{\partial e_{ij}} - \left(\frac{\partial F_1}{\partial e_{ij,j}}\right)_{,j} = 0, \tag{52a}$$

应用约束条件(2), (52a) 式可重写成

$$\sigma_{ij} + \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma_{kl}}{\partial e_{ij}}(u_{k,l} + u_{l,k}) + \frac{\partial F_1}{\partial e_{ij}} - \left(\frac{\partial F_1}{\partial e_{ij,j}}\right)_{,j} = 0, \tag{52b}$$

我们可设

$$\frac{\partial F_1}{\partial e_{ij}} - \left(\frac{\partial F_1}{\partial e_{ij,j}}\right)_{,j} = -\sigma_{ij} - \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial e_{ij}}e_{ij}• \tag{53}$$

这样方程(52a) 就满足场方程(3)• 于是待定函数 F_1 可识别:

$$F_1 = -\sigma_{ij}e_{ij}, \tag{54}$$

或

$$F_1 = -A - B• \tag{54b}$$

显然(54a) 和(54b) 式在应力应变约束条件下都满足关系式(53)• 于是可得以下二类独立变量的变分原理:

$$J_{P1}^{**}(e_{ij}, u_i) = \iiint\left\{A - e_{ij}\sigma_{ij} + \frac{1}{2}\sigma_{ij}(u_{i,j} + u_{j,i}) - f_iu_i\right\}\mathrm{d}\tau \tag{55a}$$

这就是 Hu_Washizu 原理, 应力应变关系是它的约束条件•

或

$$J_{P2}^{***}(e_{ij}, u_i) = -\iiint\left\{(B + \sigma_{ij,j}u_i + f_iu_i\right\}\mathrm{d}\tau \tag{55b}$$

这就是 Hellinger_Reissner 原理, 应力应变关系也是它的约束条件•

我们从最小势能原理出发, 应用半反推法消除同样的约束(3), 同时保留同样的约束(2), 所以得到的Hu_Washizu 和 Hellinger_Reissner 原理是两类独立变量的变分原理, 并且是等价的•

4 钱伟长广义变分原理

1983 年钱伟长首次应用高阶拉氏乘子法推导得到了三类独立变量的广义变分原理• 下面应用凑合反推法来推导钱伟长广义变分原理•

应用半反推法, 设试泛函具有以下形式:

$$J_{\mathrm{Chien}}(\sigma_{ij}, e_{ij}, u_i) = \iiint\left\{A - f_iu_i + F(\sigma_{ij}, e_{ij}, u_i, \sigma_{ij,j}, e_{ij,j}, u_{i,j})\right\}\mathrm{d}\tau + \iint_{\Gamma_u} G\,\mathrm{d}S + \iint_{\Gamma_\sigma} H\,\mathrm{d}S, \tag{56}$$

式中 F, G 及 H 是待定函数•

设对应于独立变量 u_i 的欧拉方程满足方程(1),于是我们可得

$$\delta u_i: \quad \frac{\delta F}{\delta u_i} = f_i = -\sigma_{ij,j}, \tag{57}$$

式中:

$$\frac{\delta F}{\delta u_i} = \frac{\partial F}{\partial u_i} - \left(\frac{\partial F}{\partial u_{i,j}}\right)_{,j} \cdot$$

根据上式初步识别待定函数 F 可得:

$$F = -\sigma_{ij,j}u_i - \lambda e_{ij}\sigma_{ij} + F_1(e_{ij}, \sigma_{ij}, e_{ij,j}, \sigma_{ij,j}), \tag{58}$$

式中 λ 是任意非零常数, F_1 是一待定函数, 它是 e_{ij}, σ_{ij} 的函数• 于是原试泛函(56) 式可进一步改写成:

$$J(\sigma_{ij}, e_{ij}, u_i) = \iiint\left\{(A - f_iu_i - \sigma_{ij,j}u_i - \lambda e_{ij}\sigma_{ij} + F_1\right\}\mathrm{d}\tau + \iint_{\Gamma_u} G\mathrm{d}S + \iint_{\Gamma_\sigma} H\mathrm{d}S, \tag{59}$$

再令上述新的试泛函取驻值, 对应于 e_{ij} 和 σ_{ij} 的试欧拉方程可表示为:

$$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}} - \lambda\sigma_{ij} + \frac{\delta F_1}{\delta e_{ij}} = 0, \tag{60}$$

$$\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \lambda e_{ij} + \frac{\delta F_1}{\delta\sigma_{ij}} = 0 \cdot \tag{61}$$

上述两组方程应满足方程(2)和(3),所以我们可得

$$\frac{\delta F_1}{\delta e_{ij}} = -\sigma_{ij} + \lambda\sigma_{ij}, \tag{62}$$

$$\frac{\delta F_1}{\delta\sigma_{ij}} = -e_{ij} + \lambda e_{ij} \cdot \tag{63}$$

从而可识别待定函数 F_1:

$$F_1 = -e_{ij}\sigma_{ij} + \lambda(A + B) \cdot \tag{64}$$

把上式代入(59)式,并分部积分即可得钱伟长广义变分原理(11)(边界上的待定函数的识别方式完全同上,这里略)

5 结束语

本文应用三种不同的方法证明了 Hu_Washizu 和 Hellinger_Reissner 变分原理是等价的,并且具有相同的变分约束• 从而进一步说明了 Hu_Washizu 变分原理实际上只是两类独立变量的变分原理,应力应变还是它的约束条件•

参 考 文 献

[1] 胡海昌. 弹性理论和塑性理论中的一些变分原理[J]. 物理学报, 1954, **10**(3): 259~ 290.

[2] 钱伟长. 关于弹性力学的广义变分原理及其在板壳问题上的应用[A]. 钱伟长科学论文集[C], 福州: 福建教育出版社, 1989.

[3] 钱伟长. 高阶拉氏乘子法和弹性理论中的更一般的广义变分原理[J]. 应用数学和力学, 1983, **4**(2): 137~ 150.

[4] 钱伟长. 再论弹性力学中的广义变分原理——就等价定义问题和胡海昌先生商榷[J]. 力学学报, 1983, **4**(2): 313~ 323.

[5] 钱伟长. 广义变分原理[M]. 北京: 知识出版社, 1985.

[6] 刘高联. 流体力学变分原理建立与变换的系统性途径[J]. 工程热物理学报, 1990, **11**: 136~ 142.

[7] He Jihuan. Modified Lagrange multiplier method and generalized variational principles in fluid mechanics[J]. J Shanghai University (English Edition), 1997, **1**(2), 117~ 122.

[8] He Jihuan. Semi_inverse Method of establishing generalized variational principles for fluid mechanics with emphasis on turbomachinery aerodynamics[J]. Interl J Turbo &Jet_Engines, 1997, **14**(1): 23~ 28.

[9] He Jihuan. A generalized variational principle for 3_D unsteady transonic rotational flow in rotor using clebsch variables[J]. Interl J Turbo &Jet_Engines, 1997, **14**(1): 17~ 22.

[10] He Jihuan. A variational theory for one_dimensional unsteady compressible flow: an image plane approach[J]. Applied Math Modelling, 1998, **22**: 395~ 403.

[11] He Jihuan. A family of variational principles for compressible rotational blade_to_blade flow using semi_inverse method[J]. Interl J Turbo &Jet_Engines, 1998, **15**(2): 95~ 100.

[12] He Jihuan. Generalized variational principle for compressible S2_flow in mixed_flow turbomachinery using semi_inverse method[J]. Interl J Turbo &Jet_Engines, 1998, **15**(2): 101~ 107.

[13] He Jihuan. Generalized Hellinger_Reissner principle[J]. ASME J Appl Mech, (accepted), 1999.

[14] 胡海昌. 关于拉氏乘子法及其它[J]. 力学学报, 1985, **17**(5): 426~ 434.

[15] Washizu K. On the variational principles of elasticity and plasticity[R]. Aeroelastic and Structures Research Laboratory, Massachuetts Institute of Technology, Technical Report, 25~ 18, March 1955.

Further Study of the Equivalent Theorem of Hellinger_Reissner and Hu_Washizu Variational Principles

He Jihuan

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Shanghai University, Shanghai 200072, P R China)

Abstract: In this paper, it is proved that the well_known Hu_Washizu variational principle is a pseudo_generalized variational principle (pseudo_GVP), which is a functional whose stationary conditions would satisfy all its field equations and boundary conditions if all the variables in the functional were considered as independent variations, but in fact there might exist some kinds of constraints. Some new pseudo_GVPs are established to distinguish them from genuine ones by the so_called inverse Lagrange multiplier method. The constrained Hu_Washizu principle, therefore, is proved to be equivalent with the Hellinger_Reissner principle under the same constraints of stress_strain relations.

Key words: variational principles in elasticity; Hellinger_Reissner principle; Hu_Washizu principle; the semi_inverse method, trial_functional