应用数学和力学,第20卷 第5期(1999年5月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999)05_0531_04

广义 Birkhoff 自治系统的平衡稳定性*

徐振铎[1], 刘尔烈[2]

([1] 天津城市建设学院,天津 300381;
[2] 天津大学 管理学院,天津 300072)

(张鸿庆推荐)

摘要: 研究广义 Birkhoff 自治系统的平衡稳定性问题• 首先建立了广义 Birkhoff 自治系统的平衡方程,然后研究平衡状态稳定性的一次近似方法和直接法,并应用 ÑÅÅ¿À³ 定理得到了广义 Birkhoff 自治系统平衡稳定性的一些结果• 最后举例说明了这些结果的应用•

关 键 词: 广义 Birkhoff 系统; 平衡状态; 稳定性
中图分类号: O317 文献标识码: A

引 言

美国著名数学家 G. D. Birkhoff 于 1927 年给出一类积分变分原理和一种动力学方程[1]• 这个原理称为 Pfaff_Birkhoff 原理,其形式为

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu(t,a)\dot{a}^\mu - B(t,a)\right\}\mathrm{d}t = 0,$$ 用力

$$\mathrm{d}\delta a^\mu = \delta\mathrm{d}a^\mu, \quad \delta a^\mu|_{t=t_1} = \delta a^\mu|_{t=t_2} = 0•$$

美国物理学家 R. M. Santilli 于 1978 年建议将下述方程

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, 2n),$$

命名为 Birkhoff 方程[2],而将 $B(t,a)$ 命名为 Birkhoff 函数,称 $R_\mu(t,a)$ 为 Birkhoff 函数组• 用 Birkhoff 方程描述运动的力学系统,或描述状态的物理系统称为 Birkhoff 系统• 对于 Birkhoff 系统的研究已成为数学物理学科,特别是分析动力学的一个近代发展方向[3]• 我国学者梅凤翔教授于 1992 年春季在北京理工大学主持了关于《Birkhoff 系统动力学》的讨论,组织开展对于 Birkhoff 系统动力学的深入研究• 近几年来,梅凤翔等人在建立 Birkhoff 系统的 Noether 理论、Birkhoff 系统动力学逆问题、Birkhoff 系统的几何描述以及 Birkhoff 系统的平衡稳定性等诸多课题中取得了一系列研究成果[4~10],并于 1996 年 5 月出版了学术专著《Birkhoff 系统动力学》[11],全面系统地论述了 Birkhoff 系统动力学的基本理论框架和基本应用•

文献[8]提出一类广义 Birkhoff 系统及其几何框架,这类系统比文献[2]所指的通常的 Birkhoff 系统更广泛,也比文献[12]的广义 Hamilton 系统更广泛• 文献[10]研究了广义 Birkhoff 系统的变换理论• 本文研究广义 Birkhoff 自治系统的平衡稳定性问题,因此,文献[7]关于通常

* 收稿日期: 1997_11_01; 修订日期: 1998_09_20
作者简介: 徐振铎(1943~),男,副教授.

Birkhoff 自治系统平衡稳定性的结果是本文的特殊情形•

1 广义 Birkhoff 自治系统的平衡状态

一般的 k 阶广义 Birkhoff 系统的运动方程[8]为

$$\sum_{\nu=1}^{2kn}\left(\frac{\partial R_\nu(t,a)}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu(t,a)}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\left(\frac{\partial B(t,a)}{\partial a^\mu}+\frac{\partial R_\mu(t,a)}{\partial t}\right)=0, \tag{1}$$

$$a=(r,\ Y_1;\ \dot{r},\ Y_2;\ \cdots;\ r^{k-1},\ Y_k),$$

$$(\mu=1,2,\cdots,2kn)$$

当 $k=1$ 时, 方程(1) 成为通常的 Birkhoff 系统[2]• 如果函数 R_μ, B 都不显含时间 t, 则方程(1) 为

$$\sum_{\nu=1}^{2kn}\left(\frac{\partial R_\nu(a)}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu(a)}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B(a)}{\partial a^\mu}=0, \qquad (\mu=1,2,\cdots,2kn)• \tag{2}$$

当系统(2) 处于平衡时, 有

$$a^\mu=a_0^\mu=\mathrm{const},\quad \dot{a}^\mu=0 \qquad (\mu=1,2,\cdots,2kn) \tag{3}$$

将式(3) 代入方程(2), 得到

$$\left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)_0=0 \qquad (\mu=1,2,\cdots,2kn) \tag{4}$$

这就是系统的平衡方程• 如果 $2kn$ 个代数方程(4) 有解, 则系统存在平衡状态• 方程(4) 有几个解, 系统(2) 就有几个平衡状态• 若方程(4) 有孤立解, 则系统平衡状态是孤立的; 若方程(4) 有非孤立解, 则系统平衡状态组成流形•

2 平衡状态稳定性的一次近似方法

令

$$a^\mu=a_0^\mu+\xi^\mu \qquad (\mu=1,2,\cdots,2kn)• \tag{5}$$

将式(5) 代入方程(2), 得到系统受扰运动微分方程

$$\sum_{\nu=1}^{2kn}(\omega_{\mu\nu})_0\dot{\xi}^\nu-\sum_{\nu=1}^{2kn}(\Omega_{\mu\nu})_0\xi^\nu=P_\mu(\xi^\nu,\dot{\xi}^\nu), \qquad (\mu=1,2,\cdots,2kn), \tag{6}$$

其中

$$\omega_{\mu\nu}=\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \qquad (\mu,\nu=1,2,\cdots,2kn), \tag{7}$$

为广义 Birkhoff 张量, 而

$$\Omega_{\mu\nu}=\frac{\partial^2 B}{\partial a^\mu\partial a^\nu} \qquad (\mu,\nu=1,2,\cdots,2kn), \tag{8}$$

下标 0 表示其中的 a^μ 用 a_0^μ 替代的结果, 而函数 P_μ 为 ξ, $\dot{\xi}$ 的二阶小项和更高阶小项• 受扰运动微分方程(6) 的一次近似方程为

$$\sum_{\nu=1}^{2kn}(\omega_{\mu\nu})_0\dot{\xi}^\nu-\sum_{\nu=1}^{2kn}(\Omega_{\mu\nu})_0\xi^\nu=0 \qquad (\mu=1,2,\cdots,2kn)• \tag{9}$$

方程(9) 的特征方程为

$$\Delta(\lambda)=\det[(\omega_{\mu\nu})_0\lambda-(\Omega_{\mu\nu})_0]=0• \tag{10}$$

由 $\omega_{\mu\nu}$ 的反对称性和 $\Omega_{\mu\nu}$ 的对称性, 知

$$\Delta(\lambda)=\Delta(-\lambda)• \tag{11}$$

于是有

命题 1 如果广义 Birkhoff 自治系统平衡状态的受扰运动微分方程的一次近似方程的特征根至少有一个有非零实部, 则平衡是不稳定的•

当 $k = 1$ 时, 命题 1 给出文献[7] 的结果•

3 平衡状态稳定性的直接法

取广义 Birkhoff 函数 B 为 ÑÁÅ¿À³ 函数 V, 即

$$V = B(a)\text{•} \tag{12}$$

系统的受扰运动微分方程可表示为

$$\dot{\xi}^{\mu} - \sum_{\nu=1}^{2kn}\left(\omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}\right)_1 = 0 \quad a\ (\mu = 1, 2, \cdots, 2kn), \quad t \quad) \tag{13}$$

这里 $(\omega^{\mu\nu})$ 为$(\omega_{\mu\nu})$ 的逆矩阵, 下标 1 表示其中的 a^{μ} 用$a_0^{\mu} + \xi^{\mu}$ 替代的结果• 按方程(13) 求 $\dot{V}$, 有

$$\dot{V} = \sum_{\mu=1}^{2kn}\sum_{\nu=1}^{2kn}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}} R \omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}\right)_1 \equiv 0\text{•} \tag{14}$$

利用 ÑÁÅ¿À³ 定理, 得

命题 2 如果系统的广义 Birkhoff 函数 B 在平衡位置上为零, 且在平衡位置附近是定号(正定或负定) 的, 那么, 平衡是稳定的•

4 算 例

某一广义 Birkhoff 系统有

$$\left.\begin{aligned} &R_1 = a^2,\ R_2 = a^3,\ R_3 = a^4,\ R_4 = a^5,\ R_5 = a^6,\ R_6 = a^1, \\ &B = \frac{1}{2}[(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 + (a^4)^2 + (a^5)^2 + (a^6)^2] + \frac{1}{4}(a^1)^4, \end{aligned}\right\} \text{的;} \tag{15}$$

其中 $a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6$ 可为系统的坐标、速度、加速度等•

方程(2) 给出为

$$\left.\begin{aligned} &-\dot{a}^2 + \dot{a}^4 + \dot{a}^6 - a^1 - (a^1)^3 = 0, \quad \dot{a}^1 - \dot{a}^3 - a^2 = 0, \\ &\dot{a}^2 - \dot{a}^4 - a^3 = 0, \quad -\dot{a}^1 + \dot{a}^3 - a^4 = 0, \\ &-\dot{a}^6 - a^5 = 0, \quad -\dot{a}^1 + \dot{a}^5 - a^6 = 0\text{•} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

平衡状态为

$$a_0^{\mu} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, 6)\text{•} \tag{17}$$

一次近似的特征方程为

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 & -\lambda & 0 & \lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & -1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & -\lambda & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} = 6\lambda^4 + 6\lambda^2 + 1 = 0\text{•} \tag{18}$$

式(18) 有纯虚根• 用命题 1 不能判断其稳定性, 可用命题 2 判断• 因为 B 是 $a^{\mu}(\mu = 1, 2, \cdots, 6)$ 的正定函数, 故知平衡状态式(17) 是稳定的•

参 考 文 献

[1] Birkhoff G D. Dynamical Systems[M]. Providence RI: AMS College Pub, 1927.

[2] Santilli R M. Foundations of Theoretical Mechanics Ⅱ[M]. New York: Springer_Verlag, 198. 3

[3] ±½ºÅ½½º¿ . ¿±½º ÄºÉ¶Ã¼±Ñ º¿±¾º¼±[M]. ÀÃ¼³±: ÍÃÊ±Ñ ¼À½±, 1989.

[4] 梅凤翔. Birkhoff 系统的 Noether 理论[J]. 中国科学(A 辑), 1993, **23**(7): 709~ 717.

[5] 梅凤翔. Birkhoff 系统动力学逆问题[J]. 北京师范学院学报(自然科学版), 1992, **13**(4): 32~ 36.

[6] 吴惠彬. Birkhoff 系统的几何理论[D]: [学位论文], 北京: 北京理工大学, 1994.

[7] 梅凤翔. Birkhoff 自治系统的平衡稳定性[J]. 科学通报, 1993, **38**(4): 311~ 313.

[8] 吴惠彬, 梅凤翔, 吴叶军. 广义 Birkhoff 系统的几何框架[A]. 见: 陈滨. 动力学、振动与控制的研究[C]. 第五届全国一般力学学术会议论文集, 北京: 北京大学出版社, 1994, 1~ 4.

[9] Shi Rongchang, Mei Feixiang, Zhu Haiping. On the stability of the motion of a Birkhoff system[J]. Mechanics Research Communications, 1994, **21**(3): 269~ 272.

[10] 吴惠彬, 梅凤翔. 广义 Birkhoff 系统的变换理论[J]. 科学通报, 1995, **40**(10): 885~ 888.

[11] 梅凤翔, 史荣昌, 张永发等. Birkhoff 系统动力学[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1996.

[12] De Le n M, Rodrigues P R. Generalized Classical Mechanics and Field Theory[M]. Amsterdam: Elsevier Science Publisher BV, 1985.

Equilibrium Stability of Generalized Birkhoff's Autonomous System

Xu Zhenduo[1], Liu Erlie[2]

([1]Tianjin Institute of Urban Construction, Tianjin 300381, P R China;
[2]Tianjin University, Tianjin 300072, P R China)

Abstract: In this paper, equilibrium stability of generalized Birkhoff's autonomous system is discussed. First, equilibrium equations of generalized Birkhoff's Autonomous system are set up, and then the linear approximate method and direct method of stability in equilibrium state are studied. Some results on equilibrium of generalized Birkhoff's autonomous system are obtained on the basis of Lyapunov's thorem. Last, the application of the results is illustrated with an example.

Key words: generalized Birkhoff's system; equilibrium state; stability