应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 04_0331_06

一个二流体系统中非线性水波的 Hamilton 描述*

卢东强, 戴世强, 张宝善

(上海大学 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

摘要: 讨论了一个二流体系统中非线性水波的 Hamilton 描述, 该系统由水平固壁之上的两层常密度不可压无粘流体组成, 上表面为自由面• 文中将速度势函数展开成垂向坐标的幂级数, 在浅水长波的假定下, 取下层流体的“动厚度”与上层流体的“折合动厚度”为广义位移、界面上和自由面上的速度势为广义动量, 根据 Hamilton 原理并运用 Legendre 变换导出该系统的 Hamilton 正则方程, 从而将单层流体情形的结果推广到分层流体的情形•

关 键 词: 二流体系统; Hamilton 原理; 非线性水波; 浅水假定; Hamilton 正则方程
中图分类号: O353.2 文献标识码: A

引 言

力学问题的几何化是理性力学和数学工作者所关注的热点, 经过一个半世纪的努力, 质点与刚体动力学的几何理论已取得丰硕的成果• 本世纪下半叶, 人们开始探索连续介质力学的几何理论• 近 30 年来, 探索水波的 Hamilton 结构及其对称性与守恒律成为水波动力学理论研究的一个重要分支, 开创了研究水波问题的新体系, 其主要着眼点是将水波问题导向无穷维 Hamilton 结构, 运用经典 Hamilton 力学的概念与方法、近代数学理论(微分流形、辛几何学、李群与李代数) 来研究水波•

J. C. Luke 首次提出水波的变分原理[1], G. B. Whitham 继续研究几类水波问题的变分原理, 探讨了变分原理在水波中的应用[2]• V. E. Zakharov 首先发现无粘、无旋、不可压、密度均匀假定下的水波运动方程构成了 Hamilton 动力系统, 其中正定的 Hamilton 泛函是流体的总能量, 自由面波高 η 和自由面上的速度势 Φ 为正则变量, 实际上 η 是无穷维广义位移, Φ 是相应的广义动量• Zakharov 的工作开辟了探索水波问题的 Hamilton 正则结构的道路, 为水波的研究提供了新的途径[3]• J. W. Miles(1977) 与 D. M. Milder(1977) 较完整地研究了水波问题的 Hamilton 原理及其 Hamilton 正则方程[4, 5]• T. B. Benjamin & P. J. Olver(1982) 分析了完全水波问题和近似水波问题的 Hamilton 结构之间的关系[6]• 对于水波的 Hamilton 描述的丰富成果, 我们在文[7]做了简要回顾•

浅水近似与 Boussinesq 假定已被分析、引用了许多年, 其中的思路与方法是基于尺度量阶

* 收稿日期: 1997_12_24; 修订日期: 1998_08_27
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19672035)
作者简介: 卢东强(1972~) , 男, 助教, 硕士.

估计，在运动方程中保留主要的非线性项和色散项，其优点是对问题作了抓住要点的简化，其缺点是不能保持完整问题的 Hamilton 结构• 在 Hamilton 框架下，Hamilton 正则变量并没有被改变，近似方法是自动正则的，即保 Hamilton 结构的• 对于浅水长波假定下单层流体的 Hamilton 描述，W. Craig & M. D. Groves 运用 Dirichlet_Neumann 算子收敛的 Taylor 级数展开法导出了二维浅水波各阶近似 Hamilton 方程[8]，文[9]从 Hamilton 原理出发运用 Legendre 变换导出单层流体的 Hamilton 正则方程；结果与 Craig & Groves[8] 一致，且方法简单，物理意义明确• 本文进一步推广文[9]中的工作，把下层流体的速度势展开成底部速度势的级数，把上层流体的速度势展开成界面速度势的级数；在浅水长波的假定下，设定该系统的广义位移为下层流体的动厚度 ζ_1 与上层流体的折合动厚度 ζ_2，广义动量为下层流体在界面处的速度势 Φ_1 与上层流体在自由面上的速度势 Φ_2，即 (ζ_1, Φ_1)、(ζ_2, Φ_2) 构成该二流体系统的对偶变量对；接着运用 Legendre 变换导出该系统的 Hamilton 正则方程• 本文将文[3, 4, 9]的结果推广到二层流体系统，给出了描述该系统中非线性水波的控制方程的一种形式，它与文[10]略有区别，但较为简约，在线性化近似下两者一致•

1 二流体系统的变分原理与 Hamilton 正则方程

我们考虑两层不可溶混的常密度不可压的无粘流体的无旋运动• 设上下层流体的密度比为 $\sigma(=\rho_2/\rho_1)$；h_2、h_1 分别为上下层流体的厚度• 取 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2)$ 为水平坐标，y 为垂向坐标，$y=0$ 为水平底部• 界面的波高为 $\eta_1(\boldsymbol{x}, t)$，上层流体自由面波高为 $\eta_2(\boldsymbol{x}, t)$• 记 Ω: $S_0 \times R_{(T)}$ 为所考虑的时空区域• 假定流体是静稳定分层的(即 $\sigma < 1$)，并且 h_1、h_2 与特征波长 λ 之比满足浅水长波假定，即 $h_1/\lambda \ll 1$ 和 $h_2/\lambda \ll 1$•

由 Hamilton 原理

$$L_1 = \int_0^{\eta_1}\left(\frac{1}{2}|\nabla\phi_1|^2 - gy\right)\mathrm{d}y,\quad L_2 = \sigma\int_{\eta_1}^{\eta_2}\left(\frac{1}{2}|\nabla\phi_2|^2 - gy\right)\mathrm{d}y, \tag{1a, b}$$

$$\delta\iint_\Omega L\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t = \delta\iint_\Omega (L_1 + L_2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t = 0, \tag{1c}$$

可以得到二流体系统的控制方程，而得不到完整的边界条件• 由变分原理

$$L_1^* = \int_0^{\eta_1}\left(\phi_{1,t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi_1|^2 + gy\right)\mathrm{d}y, \tag{2a}$$

$$L_2^* = \sigma\int_{\eta_1}^{\eta_2}\left(\phi_{2,t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi_2|^2 + gy\right)\mathrm{d}y, \tag{2b}$$

$$\delta\iint_\Omega L^*\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t = \delta\iint_\Omega (L_1^* + L_2^*)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t = 0 \tag{2c}$$

可得

$$\nabla\phi_1 = 0,\qquad 0 < y < \eta_1, \tag{3a}$$

$$\nabla\phi_2 = 0,\qquad \eta_1 < y < \eta_2, \tag{3b}$$

$$\eta_{2,t} + \nabla\phi_2\cdot\nabla\eta_2 - \phi_{2,y} = 0,\qquad y = \eta_2, \tag{3c}$$

$$\phi_{2,t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi_2)^2 + gy = 0,\qquad y = \eta_2, \tag{3d}$$

$$\eta_{1,t} + \nabla\phi_1\cdot\nabla\eta_1 - \phi_{1,y} = 0,\qquad y = \eta_1, \tag{3e}$$

$$\eta_{1,t} + \nabla\phi_2\cdot\nabla\eta_1 - \phi_{2,y} = 0,\qquad y = \eta_1, \tag{3f}$$

$$\left(\phi_{1,t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi_1)^2 + gy\right) - \sigma\left(\phi_{2,t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi_2)^2 + gy\right) = 0,\qquad y = \eta_1, \tag{3g}$$

$$\phi_{1,y}=0,\qquad y=0, \tag{3h}$$

这里 ϕ_2 和 ϕ_1 分别为上下层流体的速度势, $\phi_{i,t}=\partial\phi_i/\partial t$, $\phi_{i,x}=\partial\phi_i/\partial x$, $(i=1,2)$, g 为重力加速度, ∇为 Hamilton 算子. 式(3)构成二流体系统的控制方程和边界条件. 因此, 变分原理(2)可以看作 Luke[1] 单层无粘理想流体变分原理(压力驻值原理)的推广. 比较式(2)中的 Lagrange 函数 L^* 与 Hamilton 原理(1)中的 Lagrange 函数 L, 有

$$\begin{aligned}L=&-L^*+\int_0^{\eta_1}(|\nabla\phi_1|^2+\phi_{1,t})\mathrm{d}y+\int_{\eta_1}^{\eta_2}(|\nabla\phi_2|^2+\phi_{2,t})\mathrm{d}y=\\&-L^*-[\phi_1(-\eta_{1,t}-\nabla\phi_1\nabla\eta_1+\phi_{1,y})]_{y=\eta_1}-[\phi_1\phi_{1,y}]_{y=0}-\\&\int_0^{\eta}\phi_1\nabla^2\phi_1\mathrm{d}y-[\phi_2(-\eta_{2,t}-\nabla\phi_2\nabla\eta_2+\phi_{2,y})]_{y=\eta_2}-\\&[\phi_2(\phi_{2,y}+\nabla\phi_2\nabla\eta_1)]_{y=\eta_1}-\int_{-h_0}^{\eta}\phi_2\nabla^2\phi_2\mathrm{d}y+\\&\frac{\partial}{\partial xi}\int_0^{\eta_1}\phi_1\frac{\partial}{\partial xi}\phi_1\mathrm{d}y+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\eta_1}\phi_1\mathrm{d}y-\frac{\partial}{\partial xi}\int_{\eta_1}^{\eta_2}\phi_2\frac{\partial}{\partial xi}\phi_2\mathrm{d}y+\frac{\partial}{\partial t}\int_{\eta_1}^{\eta_2}\phi_2\mathrm{d}y,\end{aligned} \tag{4}$$

式中的哑标满足求和约定, 式(4)中除了散度项, 附加项体现了质量的守恒性. 如果 ϕ_i, η_i 满足方程(3), 这些附加项将消失, 而最后4项在求变分时作为边界项消失. 因此, 可以认为 L^* 与 L 具有动力学等价性.

ϕ_1 是调和函数, 且满足底部边界条件 $\phi_{1,y}|_{y=0}=0$, 因此可以将 ϕ_1 展开为

$$\phi_1=\varphi_1(\boldsymbol{x},t)-\frac{1}{2}y^2\nabla^2\varphi_1(\boldsymbol{x},t)+0(h_1^4/\lambda^4), \tag{5}$$

其中 $\varphi_1(\boldsymbol{x},t)=\phi_1(\boldsymbol{x},0,t)$.

ϕ_2 是调和函数, 因此可以将 ϕ_2 展开为

$$\phi_2=\varphi_2(\boldsymbol{x},t)+(y-\eta_1)\psi-\frac{1}{2}(y-\eta_1)^2\nabla^2\varphi_2(\boldsymbol{x},t)+O(h_2^3/\lambda^3), \tag{6}$$

其中 $\varphi_2(\boldsymbol{x},t)=\phi_2(\boldsymbol{x},\eta_1,t)$, $\psi=[\partial\phi_2/\partial y]_{y=\eta_1}$. 在浅水长波的假定下, 令

$$\Phi_1=\varphi_1-\frac{1}{2}\eta_1^2\nabla^2\varphi_1+O(h_1^4/\lambda^4), \tag{7a}$$

$$\Phi_2=\varphi_2+\xi\psi-\frac{1}{2}\xi^2\nabla^2\varphi_2+O(h_2^3/\lambda^3), \tag{7b}$$

其中 $\xi=\eta_2-\eta_1$ 是上层流体的"动厚度"(运动中上层流体厚度); Φ_1 为下层流体在界面处的速度势, Φ_2 为上层流体在自由面上的速度势. 将(5)代入(2a), 略去高阶小量, 得

$$\begin{aligned}L_1^*=\eta_1\Big(&\varphi_{1,t}+\frac{1}{2}\varphi_{1,x_i}\varphi_{1,x_i}+\frac{1}{2}g\eta_1^2-\\&\frac{1}{6}\eta_1^3[\nabla^2\varphi_{1,t}+\varphi_{1,x_i}\nabla^2\varphi_{1,x_i}-(\nabla^2\varphi_1)^2].\end{aligned} \tag{8}$$

将(7a)代入(8), 考虑到

$$\iint_\Omega\eta_1\Phi_{1,t}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t=\iint_\Omega\frac{\partial}{\partial t}(\eta_1\Phi_1)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t-\iint_\Omega\eta_{1,t}\Phi_1\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t, \tag{9}$$

式(9)右端首项在变分时化为边界项, 因此(8)变成

$$L_1^*=-\eta_{1,t}\Phi_1+\left[\frac{1}{2}\eta_1\Phi_{1,x_i}\Phi_{1,x_i}+\frac{1}{2}g\eta_1^2-\frac{1}{6}\eta_1^3(\nabla^2\Phi_1)^2\right]. \tag{10}$$

将(6)代入(2b), 逐项计算, 并引入(7b), 得

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2}\phi_t\,\mathrm{d}y = \xi\varphi_{2,t} + \frac{1}{2}\xi^2\psi_t - \frac{1}{6}\xi^3\nabla^2\varphi_{2,t} = $$
$$\xi\Phi_t - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\xi^2\psi) + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}(\xi^3\nabla^2\varphi_2), \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}\int_{\eta_1}^{\eta_2}\nabla\phi_2\cdot\nabla\phi_2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\Big[\xi(\nabla\varphi_2)^2 + \frac{1}{3}\xi^3(\nabla\psi)^2 - \frac{1}{3}\xi^3\nabla\varphi_2\cdot\nabla\nabla^2\varphi_2 + $$
$$\xi^2\nabla\varphi_2\cdot\nabla\psi + \xi\psi^2 - \xi^2\psi\nabla^2\varphi_2 + \frac{1}{3}\xi^3(\nabla\varphi_2)^2\Big] = $$
$$\frac{1}{2}\xi(\nabla\Phi_2)^2 - \frac{1}{6}\xi^3(\nabla^2\Phi_2)^2 + \frac{1}{2}\xi\psi^2 - \frac{1}{3}\xi^3(\nabla\psi)^2 - \frac{1}{2}\xi(\nabla\xi)^2\psi^2 - $$
$$\xi^2\nabla\xi\cdot\nabla\psi\psi - \frac{1}{2}\nabla\cdot(\xi^2\psi\nabla\varphi_2) + \frac{1}{3}\nabla\cdot(\xi^3\nabla\varphi_2\nabla^2\varphi_2). \tag{12}$$

在两层流体的界面处, 垂向速度相等, 由(3e), 近似地有

$$\left.\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\right|_{y=\eta_1} = \left.\frac{\partial\phi_2}{\partial y}\right|_{y=\eta_1} = \psi = \eta_{1,t}, \tag{13}$$

在浅水波的假定下, $\nabla\eta_1$, $\nabla\eta_2$ 为小量.

抛弃对变分结果不起作用的边界项后, 可以得到相应的 Hamilton 原理中的 Lagrange 密度量

$$\hat{L} = -L^* = \eta_{1,t}\Phi_1 + \sigma\xi_t\Phi_2 - \Big[\frac{1}{2}\eta_1(\nabla\Phi_1)^2 + \frac{1}{2}g\eta_1^2 - \frac{1}{6}\eta_1^3(\nabla^2\Phi_1)^2 - $$
$$\sigma\Big[\frac{1}{2}\xi(\nabla\Phi_2)^2 - \frac{1}{6}\xi^3(\nabla^2\Phi_2)^2 + \frac{1}{2}\xi\eta_{1,t}^2 + \frac{1}{2}g\xi(\xi + 2\eta_1)\Big]. \tag{14}$$

令 $\zeta_1 = \eta_1$, $\zeta_2 = \sigma\xi$, 则(14) 化为

$$L = \zeta_{1,t}\Phi_1 + \zeta_{2,t}\Phi_2 - \Big[\frac{1}{2}\zeta_1(\nabla\Phi_1)^2 + \frac{1}{2}g\zeta_1^2 - \frac{1}{6}\zeta_1^3(\nabla^2\Phi_1)^2\Big] - $$
$$\Big[\frac{1}{2}\zeta_2(\nabla\Phi_2)^2 - \frac{1}{6\sigma^2}\zeta_2^3(\nabla^2\Phi_2)^2 + \frac{1}{2}\zeta_2\zeta_{1,t}^2 + \frac{1}{2\sigma}g\zeta_2(\zeta_2 + 2\sigma\zeta_1)\Big]. \tag{15}$$

在二流体系统中, 我们不妨选取 (ζ_1, ζ_2) 为系统的广义位移, 根据广义动量的定义, 有

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial\zeta_{1,t}} = \Phi_1, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial\zeta_{2,t}} = \Phi_2, \tag{16}$$

式(16)表明二流体系统的广义动量为(Φ_1, Φ_2). 对于单层流体, 广义位移为自由面波高 η, 广义动量为自由面上的速度势 Φ, (η, Φ) 构成了系统的正则变量. 式(15)、(16) 表明对于二流体系统, 两对对偶变量(ζ_1, Φ_1)、(ζ_2, Φ_2) 构成了系统的正则变量, (ζ_1, ζ_2) 分别为下层流体的"动厚度"、上层流体的"折合动厚度", 对式(15)作 Legendre 变换, 得到二流体系统的 Hamilton 密度量为

$$H = \Big[\frac{1}{2}\zeta_1(\nabla\Phi_1)^2 + \frac{1}{2}g\zeta_1^2 - \frac{1}{6}\zeta_1^3(\nabla^2\Phi_1)^2\Big] + \Big[\frac{1}{2}\zeta_2(\nabla\Phi_2)^2 + $$
$$\frac{1}{2}g\zeta_2\left(\frac{\zeta_2}{\sigma} + 2\zeta_1\right) - \frac{1}{6\sigma^2}\zeta_2^3(\nabla^2\Phi_2)^2 + \frac{1}{2}\zeta_2\zeta_{1,t}^2\Big]. \tag{17}$$

至此, 我们得到所考虑系统的 Hamilton 泛函

$$H = \iint_{S_0} H\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{18}$$

不难验证

$$H = \int_0^{\eta_1}\left(\frac{1}{2}|\nabla\phi_1|^2 + gy\right)\mathrm{d}y + \sigma\int_{\eta_1}^{\eta_2}\left(\frac{1}{2}|\nabla\phi_2|^2 + gy\right)\mathrm{d}y \tag{19}$$

成立, 即式(18)中的 H 为系统的总能量· 可以验证, 由变分原理

$$\delta\iint_{\Omega}(\zeta_1\Phi_1+\zeta_2\Phi_2-H)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t=0 \tag{20}$$

可以导出二流体系统的控制方程和完整的边界条件, 式(20)是式(1)的另一种表述, 与式(2)具有动力学的等价性[9]· 沿用文[9]的方法, 我们可以从(20)导出所考虑的系统的Hamilton 正则方程

$$\boldsymbol{U}_t=\boldsymbol{J}\frac{\delta H}{\delta\boldsymbol{U}} \tag{21}$$

式(21)中 $\boldsymbol{U}=(\zeta_1,\zeta_2,\Phi_1,\Phi_2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{I}_2\\ -\boldsymbol{I}_2 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{I}_2$ 是二阶单位矩阵, $\boldsymbol{J}$ 是辛几何的度量矩阵· 将(17)、(18)代入Hamilton 正则方程(21), 得到二流体系统的控制方程

$$\zeta_{1,t}=\frac{\delta H}{\delta\Phi_1}=-\nabla\cdot(\zeta_1\nabla\Phi_1)-\frac{1}{3}\nabla^2(\zeta_1^3\nabla^2\Phi_1), \tag{22a}$$

$$\zeta_{2,t}=\frac{\delta H}{\delta\Phi_2}=-\nabla\cdot(\zeta_2\nabla\Phi_2)-\frac{1}{3\sigma^2}\nabla^2(\zeta_2^3\nabla^2\Phi_2), \tag{22b}$$

$$\Phi_{1,t}=-\frac{\delta H}{\delta\zeta_1}=-\frac{1}{2}(\nabla\Phi_1)^2-g(\zeta_1+\zeta_2)+\frac{1}{2}\zeta_1^2(\nabla^2\Phi_1)^2+(\zeta_{1,t}\zeta_2)_t, \tag{22c}$$

$$\Phi_{2,t}=-\frac{\delta H}{\delta\zeta_2}=-\frac{1}{2}(\nabla\Phi_2)^2-g\left(\zeta_1+\frac{\zeta_2}{\sigma}\right)+\frac{1}{2\sigma^2}\zeta_2^2(\nabla^2\Phi_2)^2-\frac{1}{2}\zeta_{1,t}^2 \tag{22d}$$

将方程(22)量纲一化, 考虑二维流动, 令

$$\nabla\Phi_1\to u_1,\quad\nabla\Phi_2\to u_2, \tag{23}$$

$$\eta_1=\zeta_1=1+\zeta_1,\quad\eta_2-\eta_1=\zeta_2/\sigma=r(1+\zeta_2), \tag{24}$$

其中 $r=h_2/h_1$ 为上下两层流体静止时的厚度比· 在线性化近似下, 方程(22)变成

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\zeta_1}{\partial t}+\frac{\partial u_1}{\partial x}=0,\quad\frac{\partial\zeta_2}{\partial t}+\frac{\partial u_2}{\partial x}=0,\\&\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}+\sigma r\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}=0,\quad\frac{\partial u_2}{\partial t}+\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}+r\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}=0\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

对应的特征方程为

$$(C^2-1)(C^2-r)-\sigma r=0, \tag{26}$$

它有解

$$C_{\pm}^2=\frac{1}{2}\left[(1+r)\pm\sqrt{(1-r^2)+4\sigma r}\right], \tag{27}$$

C_+ 和 C_- 为线性重力波波速, 分别对应于快模式(表面模式)和慢模式(内模式)·

对于本文所考虑的二流体系统, 戴世强从各层流体的 Euler 方程出发, 采用浅水波假定, 将速度沿垂向平均, 导出的推广的 Boussinesq 方程[10]· 本节的结果(22)与戴世强的结果[10]略有区别, 线性化近似(25)则与文[10]一致· Hamilton 体系下的浅水波近似所导出的色散项仅仅包含空间导数, 这与通常的 Boussinesq 方程中的色散项是空间与时间的混合导数是不同的·

2 结 论

本文首次选定了二流体系统恰当的正则变量(即广义位移和广义动量), 即下层流体的动厚度与上层流体的折合动厚度为广义位移, 界面上和自由面上的速度势为广义动量· 从 Legendre 变换导出了二流体系统的Hamilton 正则方程· 结果表明, 首先建立系统的Hamilton 原理,

得到其正则变量后经过Legendre变换,是进入Hamilton描述的有效途径• 本文的结果推广了Zakharov[3]、Miles[4]、和卢东强等[9]的结果•

参 考 文 献

[1] Luke L C. A variational principle for a fluid with a free surface[J]. J Fluid Mech, 1967, **27**: 395~ 397.

[2] Whitham G B. Variational methods and application to water waves[J]. Proc Roy Soc A, 1967, **299**(1): 6~ 25.

[3] Zakharov V E. Stability of periodic wave of finite amplitude on the surface of a deep fluid[J]. J Appl Mech Tech Phys, 1968, **2**(2): 190~ 194.

[4] Miles J W. On Hamilton's principle for surface waves[J]. J Fluid Mech, 1977, **83**: 153~ 158.

[5] Milder D M. A note regarding "On Hamilton's princilple for surfaces waves" [J]. J Fluid Mech, 1977, **83**: 159~ 161.

[6] Benjamin T B, Olver P J. Hamiltonian structure, symmetries and conservation laws for water wave [J]. J Fluid Mech, 1982, **125**: 137~ 185.

[7] 张宝善, 卢东强, 戴世强, 等. 非线性水波 Hamilton 系统理论与应用研究进展[J]. 力学进展, 1998, **28**(4): 521~ 531.

[8] Craig W, Groves M D. Hamiltonian long_wave approximations to the water waves problems[J]. Wave Motion, 1994, **19**: 367~ 389.

[9] 卢东强, 戴世强, 张宝善. 非线性水波无穷维 Hamilton 结构[A]. 见: 程昌钧、戴世强、刘宇陆主编. 现代数学和力学(MMM- Ⅶ)[C]. 上海: 上海大学出版社, 1997, 387~ 390.

[10] 戴世强. 一个二流体系统中两对孤立波的相互作用[J]. 中国科学, A 辑, 1983, **26**: 1007~ 1017.

Hamiltonian Formulation of Nonlinear Water Waves in a Two_Fluid System

Lu Dongqiang, Dai Shiqiang, Zhang Baoshan

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P R China)

Abstract: In this paper, it is dealt with that the Hamiltonian formulation of nonlinear water waves in a two_fluid system, which consists of two layers of constant_density incompressible inviscid fluid with a horizontal bottom, an interface and a free surface. The velocity potentials are expanded in power series of the vertical coordinate. By taking the kinetic thickness of lower fluid_layer and the reduced kinetic thickness of upper fluid_layer as the generalized displacements, choosing the velocity potentials at the interface and free surface as the generalized momenta and using Hamilton's principle, the Hamiltonian canonical equations for the system are derived with the Legendre transformation under the shallow water assumption. Hence the results for single_layer fluid are extended to the case of stratified fluid.

Key words: two_fluid system; Hamilton's principle; nonlinear water waves; shallow water assumption; Hamiltonian canonical equations