

文章编号: 1000-0887(1999) 04-0337-09

两自由度非线性振动系统主参数 激励下的分岔分析*

季进臣, 陈予恕

(天津大学 力学系, 天津 300072)

摘要: 本文给出了参数激励作用下两自由度非线性振动系统, 在 1:2 内共振条件下主参数激励低阶模态的非线性响应。采用多尺度法得到其振幅和相位的调制方程, 分析发现平凡解通过树枝分岔产生耦合模态解, 采用 Melnikov 方法研究全局分岔行为, 确定了产生 Smale 马蹄型混沌的参数值。

关键词: 参数激励; 内共振; Melnikov 方法

中图分类号: O322 **文献标识码:** A

引 言

参数激励振动问题广泛存在于动力机械、弹性结构的动力屈曲、船舶在海洋中的航行、航空航天设备(火箭或绳系卫星)、流固耦合系统等工程实际问题中^[1], 这些问题的数学模型和对应的控制运动微分方程可以用含有参数激励项的非线性动力系统来描述, 研究含有参数激励的非线性动力系统对于解决工程实际问题具有重要的意义。Nayfeh^[2]等人研究了在 2:1 内共振条件下具有平方非线性的两自由度系统参数激励高阶模态的 Hopf 分岔、混沌道路。Feng 和 Sethna^[3]研究了具有 1:1 内共振参数激励系统的全局分岔和混沌行为; Feng 和 Wiggins^[4]研究了平均方程中包含阻尼、强参数激励项有 $O(2)$ 对称破缺存在的 1:1 内共振的一类两自由度系统, 验证了与鞍焦型固定点相连的 Silnikov 型同宿轨道存在。本文给出了一含有参数激励的两自由度非线性振动系统(方程见(1)式), 在 1:2 内共振条件下激励低阶模态的 1/2 亚谐共振的局部和全局分岔行为分析。

1 摄动分析

对方程

$$8 \quad C \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + 2\varepsilon \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ u_1 u_2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} +$$

* 收稿日期: 1998_01_06; 修订日期: 1998_09_02

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19472046)

作者简介: 季进臣(1964-), 男, 博士, 讲师。

$$\varepsilon \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \ddot{u}_1 \\ u_1 \ddot{u}_2 \\ u_2 \ddot{u}_1 \\ u_2 \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ u_1 u_2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} + 2\varepsilon \cos \Omega T \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (1)$$

采用多尺度法^[5]寻找如下形式的解,

$$u_i(t, \varepsilon) = u_{i0}(T_0, T_1) + \varepsilon u_{i1}(T_0, T_1) + \dots \quad (2)$$

其中 $T_0 = t, T_1 = \varepsilon t$ 是快、慢时间尺度,按照 T_0, T_1 对时间微分转换为

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad (3a)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + \varepsilon 2D_0 D_1 + \varepsilon^2 (2D_0 D_2 + D_1^2) + \dots \quad (3b)$$

其中 $D_n = \partial/\partial T_n$.

将方程(2)、(3)代入到方程(1)中,并比较方程两边各 ε 同次幂的系数,得到下列微分方程组:

$$\left. \begin{aligned} D_0^2 u_{10} + \omega_1^2 u_{10} &= 0, \\ D_0^2 u_{20} + \omega_2^2 u_{20} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$D_0^2 u_{11} + \omega_1^2 u_{11} = -2D_0 D_1 u_{10} - 2M_1 D_0 u_{10} - [M_{11}(D_0 u_{10})^2 + M_{12}(D_0 u_{10})(D_0 u_{20}) + M_{13}(D_0 u_{20})^2] - [N_{11} u_{10} D_0^2 u_{10} + N_{12} u_{10} D_0^2 u_{20} + N_{13} u_{20} D_0^2 u_{10} + N_{14} u_{20} D_0^2 u_{20}] - (K_{11} u_{10}^2 + K_{12} u_{10} u_{20} + K_{13} u_{20}^2) - 2(f_{11} u_{10} + f_{12} u_{20}) \cos \Omega T_0, \quad (5a)$$

$$D_0^2 u_{21} + \omega_2^2 u_{21} = -2D_0 D_1 u_{20} - 2M_2 D_0 u_{20} - [M_{21}(D_0 u_{10})^2 + M_{22}(D_0 u_{10})(D_0 u_{20}) + M_{23}(D_0 u_{20})^2] - [N_{21} u_{10} D_0^2 u_{10} + N_{22} u_{10} D_0^2 u_{20} + N_{23} u_{20} D_0^2 u_{10} + N_{24} u_{20} D_0^2 u_{20}] - (K_{21} u_{10}^2 + K_{22} u_{10} u_{20} + K_{23} u_{20}^2) - 2(f_{21} u_{10} + f_{22} u_{20}) \cos \Omega T_0. \quad (5b)$$

方程(4)的解可表示成如下复数形式

$$\left. \begin{aligned} u_{10} &= A_1(T_1) \exp(i\omega_1 T_0) + A_1(T_1) \exp(-i\omega_1 T_0), \\ u_{20} &= A_2(T_1) \exp(i\omega_2 T_0) + A_2(T_1) \exp(-i\omega_2 T_0), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中 A_n 是 A_n 的复共轭. 将方程(6)代入方程(5)中(本文因篇幅原因而略去),方程(5)的特解中所含的长期项 $T_0 \exp(\pm i\omega_1 T_0)$ 和 $T_0 \exp(\pm i\omega_2 T_0)$ 以及小除数项,依赖于共振条件. 到第一阶近似,这些共振条件是(a) 内共振 $\omega_2 \simeq 2\omega_1$ 或 $\omega_1 \simeq 2\omega_2$; (b) 第一阶模态的主参数共振 $\Omega \simeq 2\omega_1$; 或(c) 第二阶模态的主参数共振 $\Omega \simeq 2\omega_2$; 和(d) 加法型和减法型组合参数共振 $\Omega \simeq \omega_2 \pm \omega_1$.

下面对 $\omega_1 \simeq 2\omega_2$ 内共振条件下,激励低阶模态的主参数共振 $\Omega \simeq 2\omega_2$ 情况进行分析.

引进调谐参数 σ_1, σ_2 , 令

$$\Omega = 2\omega_2 + \varepsilon \sigma_1, \quad \omega_1 = 2\omega_2 + \varepsilon \sigma_2. \quad (7)$$

将(7)代入到(5)中并考虑到(6)式,略去在 u_{11} 和 u_{21} 中产生长期项的项,得到可解条件为

$$\left. \begin{aligned} & - 2i\omega_1(A_1 + \mu_1 A_1) + J_1 A_1^2 \exp(-i\sigma_2 T_1) = 0, \\ & - 2i\omega_2(A_2 + \mu_2 A_2) + J_2 A_1 A_2 \exp(-i\sigma_2 T_1) - f_{22} A_2 \exp(i\sigma_1 T_1) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= M_{13} \omega_2^2 + N_{14} \omega_2^2 - K_{13}, \\ J_2 &= -M_{22} \omega_1 \omega_2 + N_{22} \omega_2^2 + N_{23} \omega_1^2 - K_{22} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

为了求解方程(8), 引入极坐标表示

$$A_1 = \sqrt{2a_1} \frac{\exp(i\varphi_1/\omega_1)}{J_1^2}, \quad A_2 = \sqrt{2a_2} \frac{\exp(i\varphi_2/\omega_2)}{J_1 J_2}, \quad (10)$$

其中 a_i, φ_i 是 T_i 的实函数. 将方程(10) 代入到方程(8), 并分离实部和虚部得到:

$$\left. \begin{aligned} a_1' &= -2\mu_1 a_1 - \frac{\sqrt{2}}{\Omega} a_1^{1/2} a_2 \sin(\theta_1 - 2\theta_2), \\ a_1 \theta_1' &= (\sigma_2 - \sigma_1) a_1 - \frac{\sqrt{2}}{2\Omega} a_1^{1/2} a_2 \cos(\theta_1 - 2\theta_2), \\ a_2' &= -2\mu_2 a_2 + \frac{2\sqrt{2}}{\Omega} a_1^{1/2} a_2 \sin(\theta_1 - 2\theta_2) + \frac{f_{22}}{\Omega} a_2 \sin(2\theta_2), \\ a_2 \theta_2' &= -\frac{\sigma_1}{2} a_2 - \frac{\sqrt{2}}{\Omega} a_1^{1/2} a_2 \cos(\theta_1 - 2\theta_2) + \frac{f_{22}}{\Omega} a_2 \cos(2\theta_2), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中:

$$\theta_1 = \frac{\varphi_1}{\omega_1} + (\sigma_2 - \sigma_1) T_1, \quad \theta_2 = \frac{\varphi_2}{\omega_2} - \frac{\sigma_1}{2} T_1, \quad i = 1, 2 \quad (12)$$

在进行稳定性分析时, 需用到直角坐标形式的方程, 为此对式(10) 引入下列变换

$$u_i = \sqrt{2a_i} \cos \theta_i, \quad v_i = -\sqrt{2a_i} \sin \theta_i, \quad i = 1, 2, \quad (13)$$

得到如下方程

$$\left. \begin{aligned} u_1' &= -c_1 u_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) v_1 - \frac{1}{\Omega} u_2 v_2, \\ v_1' &= -c_1 v_1 - (\sigma_2 - \sigma_1) u_1 + \frac{1}{2\Omega} (u_2^2 - v_2^2), \\ u_2' &= -c_2 u_2 - \frac{\sigma_1}{2} v_2 + \frac{1}{\Omega} (u_1 v_2 - v_1 u_2) - \frac{f_{22}}{\Omega} v_2, \\ v_2' &= -c_2 v_2 + \frac{\sigma_1}{2} u_2 + \frac{1}{\Omega} (u_1 u_2 + v_1 v_2) + \frac{f_{22}}{\Omega} u_2, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

这里, 为书写方便和清楚, 已令 $c_i = \mu_i$, 下同.

容易验证, 平均方程(11) 在无阻尼条件下, 是一 Hamilton 系统, 其 Hamilton 函数为:

$$H = (\sigma_2 - \sigma_1) a_1 - \frac{\sqrt{2}}{\Omega} a_1^{1/2} a_2 \cos(\theta_1 - 2\theta_2) - \frac{\sigma_1}{2} a_2 + \frac{f_{22}}{\Omega} a_2 \cos(2\theta_2), \quad (15)$$

其中 $\alpha = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad \theta = \frac{\partial H}{\partial a_i}$.

2 系统定常解和分岔分析

系统的定常解与方程(11) 的固定点相对应, 可通过令 $a_i' = 0, \theta_i' = 0$ 得到, 有两种可能的解:

平凡解 $a_1 = a_2 = 0$ (16)

或

$$a_1 = \frac{1}{2\Omega^2 [c_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2]} a_2^2 \tag{17a}$$

$$a_2 = \left[\frac{1}{2} \sigma_1 (\sigma_1 - \sigma_2) - c_1 c_2 \right] \Omega^2 \pm \Omega \sqrt{F}, \tag{17b}$$

其中 $F = f_{22}^2 [c_1^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2] - \Omega^2 \left[c_2 (\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{1}{2} \sigma_1 c_1 \right]^2$. (18)

从方程(17b)可以看出, 只有当 $F \geq 0$, 即

$$f_{22} \geq \frac{c_2 (\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{1}{2} c_1 \sigma_1}{[c_1^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2]^{1/2}} \Omega = f_{20}$$

时, a_2 才可能存在实数解. 为得到 a_2 的解, 需根据

$$\left[\frac{1}{2} \sigma_1 (\sigma_1 - \sigma_2) - c_1 c_2 \right] \tag{19}$$

的符号分两种情况进行讨论.

情况一, 当

$$\left[\frac{1}{2} \sigma_1 (\sigma_1 - \sigma_2) - c_1 c_2 \right] > 0$$

时, (I) 当 $f_{22} > \Omega (c_2^2 + \sigma_1^2/4)^{1/2}$ 时, a_2 有一个正根, 由(17b) 中的 a_2^+ 给出; (II) 当 $f_{20} \leq f_{22} \leq \Omega (c_2^2 + \sigma_1^2/4)^{1/2}$ 时, a_2 有两个正根, 它们由(17b) 中的 a_2^\pm 给出.

情况二, 当

$$\left[\frac{1}{2} \sigma_1 (\sigma_1 - \sigma_2) - c_1 c_2 \right] < 0 \tag{20}$$

时, (I) 当 $f_{22} < \Omega (c_2^2 + \sigma_1^2/4)^{1/2}$, a_2 只有一个零根, (II) 当 $f_{22} > \Omega (c_2^2 + \sigma_1^2/4)^{1/2}$, a_2 有一个正根, 由(17b) 中的 a_2^+ 给出.

为研究系统定常解的稳定性, 需分析其平均方程(14) 的 Jacobi 矩阵的特征值. 为分析平凡解(零解) 的稳定性, 将 $u_i = v_i = 0$ 代入其特征方程, 得到其特征值

$$\lambda_{1,2} = -c_1 \pm (\sigma_2 - \sigma_1) i, \tag{19}$$

$$\lambda_{3,4} = -c_2 \pm \left[\frac{f_{22}^2}{\Omega^2} - \frac{1}{4} \sigma_1^2 \right]^{1/2}. \tag{20}$$

因为阻尼系数 c_1, c_2 总大于零, 因此, 当 $f_{22} < \Omega (c_2^2 + \sigma_1^2/4)^{1/2}$ 时, 所有的特征值都具有负实部, 对应的平凡解是渐近稳定的. 当 $f_{22} > \Omega (c_2^2 + \sigma_1^2/4)^{1/2}$ 时, 其零解(平凡解) 是不稳定的, 这时有一个特征值是正的. 当 $f_{22} = \Omega (c_2^2 + \sigma_1^2/4)^{1/2}$ 时, 这是一个特征值由负号变为正号的分界点, 此时发生树枝分岔(pitchfork bifurcation). 因此可推出, 平凡解通过树枝分岔失去稳定性而产生耦合振动解(非平凡解).

非平凡解的稳定性, 可根据如下的特征方程(21) 决定

$$\lambda^4 + J_3 \lambda^3 + J_2 \lambda^2 + J_1 \lambda + J_0 = 0, \tag{21}$$

其中:

$$J_3 = 2(c_1 + c_2), \tag{22a}$$

$$J_2 = (\sigma_2 - \sigma_1)^2 + \frac{\sigma_1^2}{4} + \frac{4a_2 - 2a_1}{\Omega^2} + \frac{AA}{a_2^2} - \frac{f_{22}^2}{\Omega^2} + (c_1 + c_2)^2 + 2c_1 c_2, \tag{22b}$$

$$J_1 = 2c_2 (\sigma_2 - \sigma_1)^2 + \frac{\sigma_1^2}{2} c_1 + \frac{4(c_1 + c_2) a_2}{\Omega} + \frac{4c_1 AA}{a_2^2} - \frac{2f_{22}^2}{\Omega^2} c_1 +$$

$$2c_1c_2(c_1 + c_2) - \frac{4c_1a_1}{\Omega^2}, \tag{22c}$$

$$J_0 = [(\sigma_2 - \sigma_1)^2 + c_1^2] \left[\frac{\sigma_1^2}{4} - \frac{f_2^2}{\Omega^2} + c_2^2 + \frac{3a_2^2}{\Omega^4} + \frac{2a_2}{\Omega^2}(\sigma_2\sigma_1 - \sigma_1^2 + 2c_1c_2) + \frac{2[(\sigma_2 - \sigma_1)^2 + c_1^2]}{a_2^2}AA \right], \tag{22d}$$

$$AA = \frac{2a_1a_2^2}{\Omega^2} + (\sigma_2\sigma_1 - \sigma_1^2 - 2c_1c_2)a_1a_2. \tag{22e}$$

按照 Routh-Hurwitz 判据, 方程(21)的所有根都具有负实部的充分和必要条件是

$$(J_3J_2 - J_1) > 0, J_1(J_3J_2 - J_1) - J_3^2J_0 > 0, J_0 > 0 \tag{23}$$

由方程(23)中的第三个条件可以判断出, 定常解由方程(17b)中的正号给出的解是稳定的, 而负号给出的解是不稳定的. 当方程(23)中的第二个条件不成立时, 意味着将存在一对具有正实部的虚根, 因此, 当它由不等式变成等式时, 产生了 Hopf 分岔的参数域.

3 全局分岔分析: Melnikov 方法

Melnikov 方法是利用可积哈密顿系统的几何特性为框架而进行全局摄动的方法. 它基于计算两支分离的未扰系统轨迹间的距离, 以提供受扰动周期系统行为的信息.

为了应用 Wiggins^[6]给出的方法, 平均方程(11)必须变成其所需的形式, 为此引入如下的正则变换:

$$q_1 = \theta_1 - 2\theta_2, q_2 = \theta_2, p_1 = a_1, p_2 = a_2 + 2a_1. \tag{24}$$

将此变换代入到方程(11)中, 忽略阻尼, 令 $\alpha = 2/\Omega^2$, 并以 $p_1 \rightarrow \frac{p_1}{\alpha}, p_2 \rightarrow \frac{p_2}{\alpha}$, 重新标度(11)式, 同时假设激励是小项, 令 $f_{22}/\Omega = \epsilon_1 f$, 则得到

$$\left. \begin{aligned} p\dot{q}_1 &= - (p_2 - 2p_1)p_1^{1/2} \sin q_1, \\ q\dot{q}_1 &= \sigma_2 - \frac{1}{2}p_1^{-1/2}(p_2 - 6p_1)\cos q_1 - \epsilon_1 2f \cos(2q_2), \\ p\dot{q}_2 &= \epsilon_1 2f (p_2 - 2p_1)\sin(2q_2), \\ q\dot{q}_2 &= - \frac{\sigma_1}{2} - p_1^{1/2}\cos q_1 + \epsilon_1 f \cos(2q_2). \end{aligned} \right\} \tag{25}$$

为计算 Melnikov 积分, 必须了解未扰系统的几何结构, 对应方程(25)的未扰系统的方程为

$$\left. \begin{aligned} p\dot{q}_1 &= - (p_2 - 2p_1)p_1^{1/2} \sin q_1, q\dot{q}_1 = \sigma_2 - \frac{1}{2}p_1^{-1/2}(p_2 - 6p_1)\cos q_1, \\ p\dot{q}_2 &= 0, q\dot{q}_2 = - \frac{\sigma_1}{2} - p_1^{1/2}\cos q_1. \end{aligned} \right\} \tag{26}$$

容易看出, 方程(26)中的前两个方程与 q_2 无关, 且由第三个方程知, $p_2 = I$ 是一个常数, 因此只需研究 (p_1, q_1) 相平面上的相流情况即可. 这时方程(26)中 p_1, q_1 部分是含有一个参数的 Hamilton 系统, 其 Hamilton 函数为

$$H(p_1, q_1; p_2) = \sigma_2 p_1 - (I - 2p_1)p_1^{1/2}\cos q_1. \tag{27}$$

考虑到 q_1 的周期性和方程(24)的关系, 只需对变量 p_1, q_1 在范围 $0 \leq p_1 \leq I/2$ 和 $0 \leq q_1 \leq 2\pi$ 中分析未扰系统 (p_1, q_1) 相平面内的几何结构, 方程(26)中前两个方程的平衡点可通过令 $p\dot{q}_1 = q\dot{q}_1 = 0$ 给出

$$(I - 2p_1) = 0, \quad \sigma_2 - \frac{1}{2}(I - 6p_1)p_1^{-1/2}\cos q_1 = 0 \quad (28)$$

或

$$\sin q_1 = 0, \quad \sigma_2 - \frac{1}{2}(I - 6p_1)p_1^{-1/2}\cos q_1 = 0 \quad (29)$$

其固定点依据 σ_2 的取值范围分为如下两种情况讨论:

a) $I > \sigma_2^2/2$

当 $\sigma_2 > 0$ 时, 其平衡点为

$$(i) \quad p_1 = \frac{1}{2}I, \quad q_1 = \arccos\left[-\frac{\sigma_2}{\sqrt{2I}}\right] = q_1^* \quad (30)$$

$$(ii) \quad p_1 = p_1^- = \frac{3I + \sigma_2^2 - \sqrt{\sigma_2^4 + 6I\sigma_2^2}}{18}, \quad q_1 = 0; \quad (31)$$

$$(iii) \quad p_1 = p_1^+ = \frac{3I + \sigma_2^2 + \sqrt{\sigma_2^4 + 6I\sigma_2^2}}{18}, \quad q_1 = \pi \quad (32)$$

当 $\sigma_2 < 0$ 时, 其平衡点为

$$(i) \quad p_1 = \frac{1}{2}I, \quad q_1 = \arccos\left[-\frac{\sigma_2}{\sqrt{2I}}\right] = q_1^* \quad (33)$$

$$(ii) \quad p_1 = p_1^+ = \frac{3I + \sigma_2^2 + \sqrt{\sigma_2^4 + 6I\sigma_2^2}}{18}, \quad q_1 = 0; \quad (34)$$

$$(iii) \quad p_1 = p_1^- = \frac{3I + \sigma_2^2 - \sqrt{\sigma_2^4 + 6I\sigma_2^2}}{18}, \quad q_1 = \pi \quad (35)$$

b) $I < \sigma_2^2/2$

当 $\sigma_2 > 0$ 时, 其平衡点为

$$(i) \quad p_1 = p_1^- = \frac{3I + \sigma_2^2 - \sqrt{\sigma_2^4 + 6I\sigma_2^2}}{18}, \quad q_1 = 0; \quad (36)$$

$$(ii) \quad p_1 = p_1^+ = \frac{3I + \sigma_2^2 + \sqrt{\sigma_2^4 + 6I\sigma_2^2}}{18}, \quad q_1 = \pi \quad (37)$$

当 $\sigma_2 < 0$ 时, 其平衡点为

$$(i) \quad p_1 = p_1^+ = \frac{3I + \sigma_2^2 + \sqrt{\sigma_2^4 + 6I\sigma_2^2}}{18}, \quad q_1 = 0; \quad (38)$$

$$(ii) \quad p_1 = p_1^- = \frac{3I + \sigma_2^2 - \sqrt{\sigma_2^4 + 6I\sigma_2^2}}{18}, \quad q_1 = \pi \quad (39)$$

固定点(平衡点)的稳定性由方程(26)中 (p_1, q_1) 方程的 Jacobi 矩阵的特征值决定, 其中

$$\left. \begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{J}) &= 0, \\ \det(\mathbf{J}) &= -\frac{1}{4}(I - 6p_1)^2 p_1^{-1} \sin^2 q_1 + \frac{1}{2}(I - 2p_1)(I + 6p_1)p_1^{-1} \cos^2 q_1 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$\det(\mathbf{J})$ 的符号决定了平衡点的稳定性, 若 $\det(\mathbf{J}) < 0$, 则为鞍点, 反之, 若 $\det(\mathbf{J}) > 0$, 则为中心. 将(30)~(39)式分别代入(40)分析易知, 与式(30)、(33)对应的平衡点为鞍点, 而其余为中心. 根据上述信息, 可给出在参数 (I, σ_2) 平面上不同区域所对应的局部相图, 如图 1~3 所示, 当参数 (I, σ_2) 位于这些区域内部时, 系统在小扰动下不会改变. 图 1 中, c, d 部分只存在中心点, 无鞍点, 因此不会产生混沌. e 是一条分界线. 下面将采用 Melnikov 方法来分析图 2、图 3 中 A, B 两条异宿轨道受到扰动之后的变化性态. 为计算 Melnikov 函数, 须将异宿

轨道以显式表示。因异宿轨道通过鞍点 $(I/2, q_1^*)$, 方程(27)的 Hamilton 函数满足:

$$H(p_1, q_1) = H\left[\frac{I}{2}, q_1^*\right], \tag{41}$$

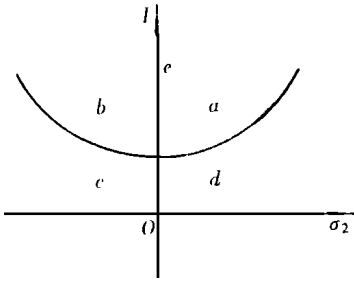


图1 (σ_2, I) 平面上区域图

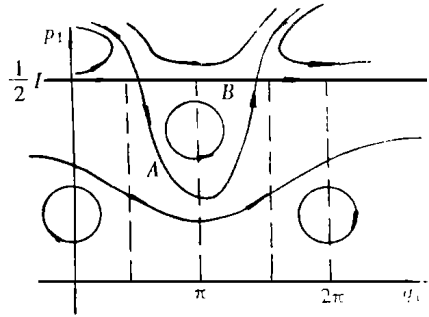


图2 当 $\sigma_2 > 0$ 时 (p_1, q_1) 相平面上的轨线

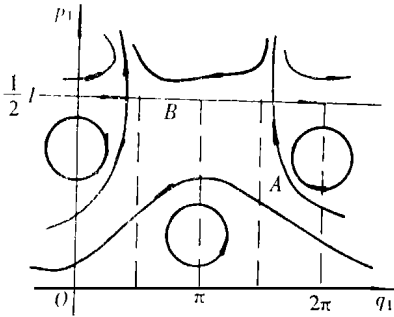


图3 当 $\sigma_2 < 0$ 时 (p_1, q_1) 相平面上的轨线

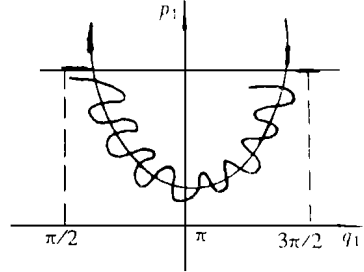


图4 轨道 A 的横截相交

由此而得, 两条异宿轨道的方程为

$$\text{orbit A: } p_1 = \frac{\sigma_2^2}{4\cos^2 q_1}, \tag{42}$$

$$\text{orbit B: } p_1 = \frac{1}{2}I. \tag{43}$$

与方程(25)相对应的 Melnikov 函数(已忽略其中阻尼项), 可根据文献[6]给出

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ p_1^{1/2} (I - 2p_1) \sin q_1(t) \cdot [-2f \cos(2q_2(t))] - p_1^{1/2} \cos q_1(t) \cdot 2f (I - 2p_1) \times (\sin(2q_2(t))) \right\} dt + p_1^{1/2} \cos q_1(t) (I/2, q_1^*) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} 2f (I - 2p_1) \sin(2q_2(t)) dt. \tag{44}$$

轨道 A 的 Melnikov 函数:

将方程(42)代入(26)中的第二式, 并根据 σ_2 的符号在初始条件分别为 $q_1(0) = \pi$ 和 $q_1(0) = 0$ 下, 求解 $q_1(t)$ 的表达式如下:

当 $\sigma_2 > 0$ 时

$$q_1(t) = \arctan \frac{\sqrt{2I - \sigma_2^2}}{\sigma_2} \text{th} \frac{\sqrt{2I - \sigma_2^2}}{2} t + \pi, \tag{45a}$$

$$q_1(t) = \arctan \frac{\sqrt{2I - \sigma_2^2}}{\sigma_2} \text{cth} \frac{\sqrt{2I - \sigma_2^2}}{2} t + \pi; \tag{45b}$$

当 $\sigma_2 < 0$ 时

$$q_1(t) = \arctan \frac{\sqrt{2I - \sigma_2^2}}{\sigma_2} \operatorname{th} \frac{\sqrt{2I - \sigma_2^2}}{2} t, \quad (46a)$$

$$q_1(t) = \arctan \frac{\sqrt{2I - \sigma_2^2}}{\sigma_2} \operatorname{cth} \frac{\sqrt{2I - \sigma_2^2}}{2} t. \quad (46b)$$

与图 2、3 中相流方向相同的方程由 (45a, b) 给出, 而 (46a, b) 给出与图 2、3 相同拓扑结构, 但相流方向相反的相图。我们仅对方程 (45a, b) 进行分析, 另外的情况可类似给出。根据 $q_1(t)$ 的表达式, 写出 $p_1(t)$ 和 $q_2(t)$ 的表达式:

$$p_1(t) = \frac{\sigma_2^2}{4} + \frac{2I - \sigma_2^2}{4} \operatorname{th}^2 \frac{\sqrt{2I - \sigma_2^2}}{2} t, \quad (47)$$

$$q_2(t) = \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_1) t + q_{20}. \quad (48)$$

应用上述方程, 并为方便起见, 令 $q_2(t) = \beta t + q_{20}$, 则轨道 A 的 Melnikov 积分为

$$M_A = 2f \int_{-\infty}^{+\infty} (I - 2p_1) p_1^{1/2} \sin[q_1(t) + 2q_2(t)] dt - \sigma_2 f \int_{-\infty}^{+\infty} (I - 2p_1) \sin[2q_2(t)] dt. \quad (49)$$

对上式根据奇偶函数的性质进行化简, 并利用 (45)~(48) 式, 进行积分得到:

$$M_A^\pm = -8 \mathcal{F} \beta^2 \sin(2q_{20}) \operatorname{csch} \left[\frac{2\pi\beta}{\sqrt{2I - \sigma_2^2}} \right]. \quad (50)$$

将 $\beta = (\sigma_2 - \sigma_1)/2$ 代入上式整理化简得:

$$M_A^\pm = -2 \mathcal{F} (\sigma_2 - \sigma_1)^2 \sin(2q_{20}) \operatorname{csch} \left[\frac{\pi(\sigma_2 - \sigma_1)}{\sqrt{2I - \sigma_2^2}} \right]. \quad (51)$$

由此可知, 只要 $\sin(2q_{20})$ 的系数不为零, 也即 $\sigma_2 \neq \sigma_1$ 成立时, 其 Melnikov 函数关于 q_{20} 有一个单零。在这种情况下, 异宿轨道 A 在扰动下破裂, 横截相交, 其定性如图 4 所示, 导致 Smale 马蹄型(horseshoe) 的混沌。

轨道 B 的 Melnikov 函数:

把轨道 B 的方程 $p_1 = I/2$, 代入方程(44) 得到

$$M_B^\pm \equiv 0. \quad (52)$$

由此可知, 轨道 B 在小扰动下不破裂, 因此该条异宿轨道不会横截相交。

4 结 论

本文对含有参数激励具有平方非线性两自由度振动系统, 在 1:2 内共振条件下, 主参数激励低阶模态的局部和全局分岔进行了分析。由多尺度法得到了其一阶近似的振幅和相位的调制平均方程, 对其进行了系统的定常解和稳定性分析, 发现平凡解通过树枝分岔产生耦合模态解。为了研究全局分岔, 对平均方程通过正则变换, 变为 Wiggins^[6] 所需的形式, 之后通过 Melnikov 方法分析发现异宿轨道在扰动下破裂, 产生 Smale 马蹄意义下的混沌。

参 考 文 献

- [1] 陈予恕. 非线性振动系统的分岔和混沌理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993.
- [2] Nayfeh A H, Nayfeh J F. Surface waves in closed basins under principal and autoparametric resonances[J]. Phys Fluids, 1990, A2(9): 1635~ 1648.
- [3] Feng Z C, Sethna P R. Global bifurcation and chaos in parametrically forced systems with one resonance[J]. Dynamics and Stability of Systems, 1990, 5(4): 210~ 225.
- [4] Feng Z C, Wiggins S. On the existence of chaos in a class of two degree of freedom, damped, strongly parametrically forced mechanical systems with broken $O(2)$ symmetry[J]. Z Angew Math Phys, 1993, 44(2): 201~ 248.
- [5] Nayfeh A H. Perturbation Methods [M]. New York: Wiley-Interscience, 1973.
- [6] Wiggins S. Global Bifurcations and Chaos — Analytical Methods [M]. New York: Springer-Verlag, 1990.

Bifurcation in a Parametrically Excited Two Degree of Freedom Nonlinear Oscillating System with 1: 2 Internal Resonance

Ji Jinchun, Chen Yushu

(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P R China)

Abstract: The nonlinear response of a two degree of freedom nonlinear oscillating system to parametric excitation is examined for the case of 1: 2 internal resonance and, principal parametric resonance with respect to the lower mode. The method of multiple scales is used to derive four first order autonomous ordinary differential equations for the modulation of the amplitudes and phases. The steady state solutions of the modulated equations and their stability are investigated. The trivial solutions lose their stability through pitchfork bifurcation giving rise to coupled mode solutions. The Melnikov method is used to study the global bifurcation behavior, the critical parameter is determined at which the dynamical system possesses a Smale horseshoe type of chaos.

Key words: parametric excitation; internal resonance; Melnikov method