应用数学和力学, 第 20 卷 第 4 期(1999 年 4 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 04_0363_08

奇异摄动初值问题的一致收敛有限差分法*

G. M. 艾米雷利耶弗, 哈基 杜柔

(YY 大学 数学系, 凡城 65080, 土耳其)

(吴承平推荐)

摘要: 通过一阶和二阶导数讨论了带小参数的线性二阶常微分方程的初值问题. 在均匀网格上得出了带常数拟合因子的指数型拟合差分格式, 给出了离散最大模意义上的一阶一致收敛性. 文中给出了数值结果.

关 键 词: 奇异摄动; 差分格式; 一致收敛; 初值条件; 线性常微分方程

中图分类号: O175.1; O241.81 文献标识码: A

引 言

本文的目的是对奇异摄动初值问题

$$Lu \equiv \varepsilon^2 u'' + \varepsilon a(t)u' + b(t)u = f(t), \qquad 0 < t \leqslant T, \tag{1}$$

$$u(0) = A, \tag{2}$$

$$u'(0) = B/\varepsilon \tag{3}$$

给出一种精确的差分方法. 其中 ε 为正的小参数, A, B 为给定常数, $a(t) \geqslant \alpha > 0$, $b(t) \geqslant \beta > 0$, $f(t)$ 为 $[0, T]$ 上的充分光滑函数. 在这种情况下, 解 $u(t)$ 一般出现在 $t = 0$ 的边界层附近(见第 1 节).

这类方程有很重要的应用价值[1],[2],[3]. 文[4]研究了这类问题的差分格式. 文[4]证明了线性双曲型方程在二阶初值条件不包含 ε 时, 其差分解只有 $O(\tau^{1/4})$ 阶收敛性, 这类方程在 $\varepsilon = 0$ 时退化为零阶方程.

文[5]、[6]考查了奇异摄动一阶系统数值解的几种格式.

[4]中的差分格式及其构造方法与此不同, 并且格式具有一致 $O(\tau)$ 精度. 该差分格式采用积分恒等式方法并利用指数型基函数构造, 并且还利用了[7]、[8]、[9]中具有权项和积分形式余项的插值求积规则. 这时, 若原问题有具有某些奇异性的解, 则此近似方法和收敛分析可以说是方便和实用的.

在第 1 节中将建立问题(1)~(3)的渐近估计. 第 2 节将在均匀网格上构造(1)~(3)数值解的带常数拟合因子的差分格式. 第 3 节将证明格式的 $O(\tau)$ 一致收敛性. 给出的数值结果包括与理论值的比较.

---

* 本文原文为英文, 吴承平译, 王国英校

收稿日期: 1997_11_25

网格函数记号与文[10] 相同•

1　连续性问题

引理 1. 1　设 $u(t)$ 为问题(1) ~ (3) 的解, $a, b, f \in C^1[0, T]$• 则对所有 $0 \leqslant t \leqslant T$, 存在正常数 C 使

$$|u^{(k)}(t)| \leqslant C\varepsilon^{-k}\left\{\delta_* + \max_{0\leqslant t\leqslant t}|f(\tau)| + \varepsilon^{k^*}\max_{0\leqslant \tau\leqslant t}|f^{(k^*)}(\tau)| + \int_0^t |f'(\tau)|\,d\tau,\right.$$
$$(k = 0, 1, 2, 3), \tag{4}$$

其中　$\delta_*^2 = |B^2 + b(0)A^2 - 2f(0)A|,\ k^* = \max(0, k-2)$•

本文中所有 $c, c_i, C, C_i\,(i = 0, 1, \dots)$ 表示不依赖于 ε(及下文数值解讨论中的 τ) 的正常数•

证明　用 $2u'(t)$ 乘方程(1) 得

$$[\varepsilon^2 u'^2 + b(t)u^2 - 2f(t)u]' + 2\varepsilon a(t)u'^2 = b'(t)u^2 - 2f'(t)u•$$

从 0 到 t 积分上式, 得

$$\varepsilon^2 u'^2(t) + b(t)u^2(t) - 2f(t)u(t) + 2\varepsilon\int_0^t a(\xi)u'^2(\xi)d\xi \leqslant$$
$$B^2 + b(0)A^2 - 2f(0)A + \int_0^t |b'(\xi)||u(\xi)|^2 d\xi + 2\int_0^t |f'(\xi)||u(\xi)|^2 d\xi$$

及

$$\varepsilon^2 u'^2(t) + \beta u^2(t) - \mu u^2(t) - \frac{1}{\mu}f^2(t) + 2\varepsilon\alpha\int_0^t u'^2(\xi)d\xi \leqslant$$
$$B^2 + b(0)A^2 - 2f(0)A + \int_0^t |b'(\xi)||u(\xi)|^2 d\xi +$$
$$2\int_0^t |f'(\xi)||u(\xi)|d\xi,\qquad \mu > 0•$$

选定 $\mu < \beta$ 导出如下不等式:

$$\varepsilon^2 u'^2(t) + u^2(t) + \varepsilon\int_0^t u'^2(\xi)d\xi \leqslant C_0\left\{\varphi(t) + \int_0^t u^2(\xi)d\xi\right\}, \tag{5}$$

其中　$\varphi(t) = B^2 + b(0)A^2 - 2f(0)A + f^2(t) + \int_0^t |f'(\xi)||u(\xi)|d\xi$•

设　$\delta(t) = \varepsilon^2 u'^2(t) + u^2(t) + \varepsilon\int_0^t u'^2(\xi)d\xi,$

利用 Gronwall 不等式, 由(5) 可得

$$\delta(t) \leqslant C_0\varphi(t) + C_0^2\int_0^t \varphi(\tau)e^{C_0(t-\tau)}d\tau \leqslant C_0\max_{[0,t]}|\varphi(\tau)|e^{C_0 t} \leqslant$$
$$C_1\left\{\delta_*^2 + \max_{[0,t]}\delta^{1/2}(\tau)\int_0^t |f'(\tau)|d\tau + \max_{[0,t]}f^2(\tau)\right\}•\qquad on$$

当 $k = 0, 1$ 时, 即可导得(4), $k = 2, 3$ 时, 可用归纳法给出(4), 因为

$$u^{(k)}(t) = \frac{1}{\varepsilon^2}\left\{f(t) - \varepsilon a(t)u'(t) - b(t)u(t)\right\}^{(k-2)}\qquad (k = 2, 3)•$$

引理 1. 1 证毕•

注 1. 1　在引理 1. 1 相同的假设下, (1) ~ (3) 的解 $u(t)$ 有如下估计:

$$\|u^{(k)}(t)\|_{C[0,T]} \leqslant C\varepsilon^{-k},\qquad (k = 0, 1, 2, 3)•$$

下面还须给出(1) ~ (3) 的解 $u(t)$ 的性质的更为详细的讨论•

引理 1.2 设(1)~(3)的解为 $u(t)$ 且 $a \in C^1[0, T]$, $b, f \in C^3[0, T]$. 则对所有 $0 \leqslant t \leqslant T$ 有

$$|u^{(k)}(t)| \leqslant C(1 + \varepsilon^{1-k} + \varepsilon^{-k} e^{-c_0 t/\varepsilon}), \qquad (k = 0, 1, 2, 3). \tag{6}$$

证明 问题(1)~(3)的解具有如下构造:

$$u(t) = u_0(t) + v(t) + R_\varepsilon(t), \tag{7}$$

其中 $u_0(t) = f(t)/b(t)$ 为"退化"问题的解, $v(t)$, $R_\varepsilon(t)$ 分别满足方程

$$\varepsilon^2 v''(t) + \varepsilon a(0) v'(t) + b(0) v(t) = 0, \qquad 0 < t \leqslant T, \tag{8}$$

$$v(0) = A \equiv A - u_0(0),$$

$$v'(0) = B/\varepsilon \equiv (B - \varepsilon u_0')/\varepsilon,$$

$$LR_\varepsilon = \psi_\varepsilon(t) \equiv -\varepsilon^2 u_0''(t) - a(t)\varepsilon u_0'(t) + \varepsilon[a(0) - a(t)]v'(t) + [b(0) - b(t)]v(t), \tag{9}$$

$$R_\varepsilon(0) = 0, \quad R_\varepsilon' = 0.$$

问题(8)的解给出为

$$v(t) = \frac{Am_2 + B}{m_2 - m_1} e^{-m_1 t/\varepsilon} - \frac{Am_1 + B}{m_2 - m_1} e^{-m_2 t/\varepsilon}, \qquad 当\ a^2(0) - 4b(0) > 0,$$

其中 $m_1 = (a(0) - \sqrt{a^2(0) - 4b(0)})/2$, $m_2 = (a(0) + \sqrt{a^2(0) - 4b(0)})/2$,

$$v(t) = \left[\left(B + a(0)A/2\right) t/\varepsilon + A\right] e^{-a(0)t/2\varepsilon}, \qquad 当\ a^2(0) = 4b(0),$$

$$v(t) = e^{-a(0)t/2\varepsilon}\left\{A\cos\frac{\sigma t}{2\varepsilon} + \frac{2}{\sigma}\left(B + \frac{a(0)A}{2}\right)\sin\frac{\sigma t}{2\varepsilon}\right\} \qquad 当\ a^2(0) - 4b(0) < 0,$$

其中 $\sigma = \sqrt{4b(0) - a^2(0)}$. 由 $v(t)$ 的显式表达式, 利用 $t^k e^{-t} \leqslant C e^{-t/2}$, $t \geqslant 0$ 有

$$|v^{(k)}(t)| \leqslant C\varepsilon^{-k} e^{-c_0 t/\varepsilon}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,\ k \geqslant 0. \tag{10}$$

应用引理 1.1 于问题(9)有

$$|R_\varepsilon^{(k)}(t)| \leqslant C\varepsilon^{-k}\left(\max_{[0,T]}|\psi_\varepsilon(t)| + \varepsilon^{k^*}\max_{[0,T]}|\psi_\varepsilon^{(k^*)}(t)| + \int_0^T |\psi_\varepsilon'(t)|\,dt\right),$$

$k = 0, 1, 2, 3$ 对所有 $t \in [0, T]$.

利用 $\psi_\varepsilon(t)$ 的形式和 $t^k e^{-t} \leqslant Ce^{-t/2}$, $t \geqslant 0$ 我们立即可得

$$\max_{[0,T]}|R_\varepsilon^{(k)}(t)| \leqslant C\varepsilon^{1-k} \quad (k = 0, 1, 2, 3). \tag{11}$$

利用估计式(10)、(11)可直接由(7)得到(6). 引理 1.2 证毕.

推论 1.1 $\|u^{(k)}(t)\|_{L_1(0,T)} \leqslant C(1 + \varepsilon^{1-k})$, $k = 0, 1, 2, 3$.

2 差分格式的构造

本文以下假设 $a^2(0) - 4b(0) > 0$.

记 ω_τ 为 $[0, T]$ 上的一致网格:

$$\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 1, 2, \cdots, M - 1; M\tau = T\}, \qquad \bar\omega_\tau = \omega_\tau \cup \{t = 0, T\}.$$

可由下列恒等式构造差分格式

$$\chi^{-1}\tau^{-1}\int_0^T Lu\,\varphi_j(t)\,dt = \chi^{-1}\tau^{-1}\int_0^T f(t)\,\varphi_j(t)\,dt \qquad (j = 1, 2, \cdots, M - 1), \tag{12}$$

其中基函数 $\{\varphi_j(t)\}_{j=1}^{M-1}$ 有如下形式:

$$\varphi_j(t)=\begin{cases}[\mathrm{e}^{\lambda_1(t-t_{j-1})}-\mathrm{e}^{\lambda_2(t-t_{j-1})}]/(\mathrm{e}^{\lambda_1\tau}-\mathrm{e}^{\lambda_2\tau})\equiv\varphi_j^{(1)}(t), & t_{j-1}<t<t_j,\\ [\mathrm{e}^{-\lambda_2(t_{j+1}-t)}-\mathrm{e}^{-\lambda_1(t_{j+1}-t)}]/(\mathrm{e}^{-\lambda_2\tau}-\mathrm{e}^{-\lambda_1\tau})\equiv\varphi_j^{(2)}(t), & t_j<t<t_{j+1},\\ 0, & t\notin(t_{j-1},t_{j+1}),\end{cases} \quad 8$$

$$\lambda_1=(2\varepsilon)^{-1}[a_0+\sqrt{a_0^2-4b_0}],\quad \lambda_2=(2\varepsilon)^{-1}[a_0-\sqrt{a_0^2-4b_0}],$$

$$\chi=\tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}\varphi_j(t)\,\mathrm{d}t=\frac{2\tau^{-1}(\lambda_1-\lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2\,\mathrm{sh}((\lambda_1-\lambda_2)\tau/2)}\mathrm{sh}\frac{\lambda_1\tau}{2}\mathrm{sh}\frac{\lambda_2\tau}{2},$$

$$a_0=a(0),\quad b_0=b(0).$$

注意到函数 $\varphi_j^{(1)}(t)$ 和 $\varphi_j^{(2)}(t)$ 分别为下列问题的解:

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon^2\varphi''-a_0\varepsilon\varphi'+b_0\varphi=0, \qquad t_{j-1}<t<t_j,\\&\varphi(t_{j-1})=0,\quad \varphi(t_j)=1;\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon^2\varphi''-a_0\varepsilon\varphi'+b_0\varphi=0, \qquad t_j<t<t_{j+1},\\&\varphi(t_j)=1,\quad \varphi(t_{j+1})=0.\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

将关系式(12) 写为如下形式:

$$\chi^{-1}\Big[-\varepsilon^2\tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}u'(t)\varphi_j'(t)\mathrm{d}t+\varepsilon a_j\tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}u'(t)\varphi_j(t)\mathrm{d}t+ \quad ,$$

应用 $$b_j\tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}u(t)\varphi_j'(t)\mathrm{d}t\Big]+R_j^{(1)}=f_j\tag{15}$$

及 $$R_j^{(1)}=\varepsilon\chi^{-1}\tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}[a(t)-a(t_j)]u'(t)\varphi_j(t)\mathrm{d}t+\chi^{-1}\tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}[b(t)-b(t_j)]\times$$
$$u(t)\varphi_j(t)\mathrm{d}t+\chi^{-1}\tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}[f(t_j)-f(t)]\varphi_j(t)\mathrm{d}t.\tag{16}$$

利用求积公式(4)、(5)[7],在每一区间 (t_{j-1},t_j) 和 (t_j,t_{j+1}) 上可得如下关系式:

$$\begin{aligned}&\chi^{-1}\Big[-\varepsilon^2\tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}u'(t)\varphi_j'(t)\mathrm{d}t-\varepsilon a_j\tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}u'(t)\varphi_j(t)\mathrm{d}t+b_j\tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}u(t)\varphi_j'(t)\mathrm{d}t\Big]=\\&\quad\chi^{-1}[\varepsilon^2u_{tt,j}+\varepsilon a_j(\chi_1u_{t,j}+\chi_2u_{t,j})+b_j\chi u_j+b_j\mu_1u_{t,j}+b_j\mu_2u_{t,j}]+R_j^{(2)}=\\&\quad\varepsilon^2\chi^{-1}[1+(\tau/2)\varepsilon^{-1}a_j(\chi_2-\chi_1)+(\tau/2)\varepsilon^{-2}b_j(\mu_2-\mu_1)]u_{tt,j}+\\&\quad\varepsilon\chi^{-1}a_j(\chi+\varepsilon^{-1}a_j^{-1}b_j\mu)u_{\overset{0}{t},j}+b_ju_j+R_j^{(2)},\end{aligned}\tag{17}$$

其中

$$\chi_1=\tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\varphi_j^{(1)}(t)\mathrm{d}t,\quad \chi_2=\tau^{-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\varphi_j^{(2)}(t)\mathrm{d}t,$$

$$\mu_1=\tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(t-t_j)\varphi_j^{(1)}(t)\mathrm{d}t,\quad \mu_2=\tau^{-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(t-t_j)\varphi_j^{(2)}(t)\mathrm{d}t,$$

$$\mu=\mu_1+\mu_2,\quad u_j=u(t_j),\quad u_{\bar t,j}=(u_j-u_{j-1})/\tau,\quad u_{t,j}=(u_{j+1}-u_j)/\tau,$$

$$u_{\overset{0}{t},j}=(u_{j+1}-u_{j-1})/(2\tau),\quad u_{tt,j}=(u_{j+1}-2u_j+u_{j-1})/\tau^2.$$

(17) 中的余项为

$$\begin{aligned}R_j^{(2)}=&\ \chi^{-1}\tau^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\Big\{(\varepsilon^2\varphi_j^{(1)''}(t)-a_j\varepsilon\varphi_j^{(1)'}(t)+b_j\varphi_j^{(1)}(t))\int_{t_{j-1}}^{t_j}K_0^{(j)}(t,\xi)u'(\xi)\mathrm{d}\xi\Big\}\mathrm{d}t+\\&\chi^{-1}\tau^{-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\Big\{(\varepsilon^2\varphi_j^{(2)''}(t)-a_j\varepsilon\varphi_j^{(2)'}(t)+b_j\varphi_j^{(2)}(t))\int_{t_j}^{t_{j+1}}K_0^{(j+1)}(t,\xi)u'(\xi)\mathrm{d}\xi\Big\}\mathrm{d}t=\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
t\quad & \chi^{-1}\tau^{-1}(b_j-b_0)\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left\{\varphi_j^{(1)}(t)\int_{t_{j-1}}^{t_j}K_0^{(j)}(t,\xi)u'(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}\mathrm{d}t+\\
& \chi^{-1}\tau^{-1}(b_j-b_0)\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left\{\varphi_j^{(2)}(t)\int_{t_j}^{t_{j+1}}K_0^{(j+1)}(t,\xi)u'(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}\mathrm{d}t+ \qquad 1\\
& \chi^{-1}\tau^{-1}\varepsilon(a_0-a_j)\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left\{\varphi_j^{(1)}(t)\int_{t_{j-1}}^{t_j}K_0^{(j)}(\xi,t)u''(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}\mathrm{d}t+ \quad]\\
& \chi^{-1}\tau^{-1}\varepsilon(a_0-a_j)\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left\{\varphi_j^{(2)}(t)\int_{t_j}^{t_{j+1}}K_0^{(j+1)}(\xi,t)u'(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{18}
$$

及

$$
\begin{aligned}
& K_0^{(j)}(t,\xi)=T_0(t-\xi)-\tau^{-1}(t-t_{j-1}),\\
& T_0(\lambda)=1,\quad \lambda>0;\ T_0(\lambda)=0,\quad \lambda<0 \cdot
\end{aligned}
$$

这里还利用了(13)、(14)给出(18)的最后一个等式•

同时很容易选定

$$
\begin{aligned}
& \varepsilon^2\chi^{-1}\left\{1+(\tau/2)\varepsilon^{-1}a_j(\chi_2-\chi_1)+(\tau/2)\varepsilon^{-2}b_j(\mu_2-\mu_1)\right\}u_{tt,j}+\\
& \quad \varepsilon\chi^{-1}a_j(\chi+\varepsilon^{-1}a_j^{-1}b_j\mu)u_{\overset{0}{t},j}+b_ju_j=\\
& \quad \varepsilon^2\chi^{-1}\left\{1+(\tau/2)\varepsilon^{-1}a_0(\chi_2-\chi_1)+(\tau/2)\varepsilon^{-2}b_0(\mu_2-\mu_1)\right\}u_{tt,j}+\\
& \quad \varepsilon\chi^{-1}a_j(\chi+\varepsilon^{-1}a_0^{-1}b_0\mu)u_{\overset{0}{t},j}+b_ju_j+R_j^{(3)}=\\
& \quad \varepsilon^2\theta_1u_{tt,j}+\varepsilon\theta_2a_ju_{\overset{0}{t},j}+b_ju_j+R_j^{(3)},
\end{aligned}
\tag{19}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\theta_1 &= \chi^{-1}\left\{1+(\tau/2)\varepsilon^{-1}a_0(\chi_2-\chi_1)+(\tau/2)\varepsilon^{-2}b_0(\mu_2-\mu_1)\right\}=\\
&\quad \frac{b_0\tau^2}{4\varepsilon^2}\left(1+\operatorname{cth}\frac{\lambda_1\tau}{2}\operatorname{cth}\frac{\lambda_2\tau}{2}\right),
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$$
\theta_2=\chi^{-1}\left\{\chi+\varepsilon^{-1}a_0^{-1}b_0\mu\right\}=a\frac{b_0\tau}{2a_0\varepsilon}\left(\operatorname{cth}\frac{\lambda_1\tau}{2}+\operatorname{cth}\frac{\lambda_2\tau}{2}\right),
\tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
R_j^{(3)} &= (\tau\varepsilon/2\chi)\left\{(a_j-a_0)(\chi_2-\chi_1)+(b_j-b_0)(\mu_2-\mu_1)\right\}u_{tt,j}+\\
&\quad \chi^{-1}\mu a_j(b_ja_j^{-1}-b_0a_0^{-1})u_{\overset{0}{t},j}\cdot
\end{aligned}
\tag{22}
$$

由(15)、(17)和(19)可得出方程(1)解的如下关系式:

$$
\ell u_j=\varepsilon^2\theta_1u_{tt,j}+\varepsilon\theta_2a_ju_{\overset{0}{t},j}+b_ju_j+R_j=f_j,\qquad (j=1,2,\cdots,M-1),
\tag{23}
$$

其中 $R_j=R_j^{(1)}+R_j^{(2)}+R_j^{(3)}$ (24)

且 θ_1, θ_2, $R_j^{(1)}$, $R_j^{(2)}$, $R_j^{(3)}$ 分别由公式(20)、(21)、(16)、(18)、(22)给出•

现在还需确定初值条件(3)下的近似值• 先考虑等式

$$
\int_0^T \mathrm{L}u\,\varphi_0(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)\,\varphi_0(t)\,\mathrm{d}t\,,
$$

其中

$$
\varphi_0(t)=\begin{cases}\left[\mathrm{e}^{-\lambda_2(t_1-t)}-\mathrm{e}^{-\lambda_1(t_1-t)}\right]/(\mathrm{e}^{-\lambda_2\tau}-\mathrm{e}^{-\lambda_1\tau}), & t\in(t_0,t_1),\\ 0, & t\notin(t_0,t_1)\cdot\end{cases}
$$

利用类似于(23)证明的方法,有

$$
\varepsilon^2\theta_0u_{t,0}-\varepsilon B+I_0(b_0A-f_0)+r=0,
\tag{25}
$$

其中

$$I_0 = \int_0^\tau \varphi_0(t)\,\mathrm{d}t = \varepsilon^2 b_0^{-1}[\lambda_1(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2\tau}) - \lambda_2(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1\tau})]/(\mathrm{e}^{-\lambda_2\tau} - \mathrm{e}^{-\lambda_1\tau}), \tag{26}$$

$$\theta_0 = 1 + \varepsilon^{-1}a_0\int_0^\tau \varphi_0(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon^{-2}b_0\int_0^\tau t\varphi_0(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\tau(\lambda_1 - \lambda_2)}{2\mathrm{sh}((\lambda_1 - \lambda_2)\tau/2)}\mathrm{e}^{(\lambda_2+\lambda_1)\tau/2}, \tag{27}$$

$$r = \int_0^\tau [f(0) - f(t)]\varphi_0(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon\int_0^\tau [a(t) - a(0)]u'(t)\varphi_0(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau [b(t) - b(0)]u(t)\varphi_0(t)\,\mathrm{d}t. \tag{28}$$

由公式(23)、(25)得出(1)~(3)的三点差分格式如下:

$$\ell y \equiv \varepsilon^2\theta_1 y_{\bar t t} + \varepsilon\theta_2 a y_{\mathring{t}} + by = f, \qquad t \in \omega_\tau, \tag{29}$$

$$y(0) = A, \tag{30}$$

$$\varepsilon^2\theta_0 y_{t,0} - \varepsilon B + I_0(b_0 A - f_0) = 0, \tag{31}$$

其中 $\theta_1, \theta_2, I_0, \theta_0$ 分别由(20)、(21)、(26)、(27)给出.

3　一致误差估计

本节讨论本文方法的收敛性. 误差函数 $z = y - u,\ t \in \omega_\tau$ 是如下离散问题的解,

$$\ell z = R, \qquad z \in \omega_\tau, \tag{32}$$

$$z(0) = 0, \tag{33}$$

$$\varepsilon^2\theta_0 z_{t,0} = r, \tag{34}$$

其中 R 和 r 由(24)和(28)定义.

引理 3.1　设 z 为(32)~(34)的解. 则当 $j = 0, 1, \cdots, M-1$ 时有如下估计成立:

$$\Delta_0|z_{t,j}| + |z_{j+1} + z_j| \leqslant C\Big\{\Delta_0|z_{t,0}| + \max_{1\leqslant i\leqslant M-1}|R_i| + \tau\sum_{i=1}^{M-2}|R_{t,i}|\Big\}, \tag{35}$$

其中 $\Delta_0 = \max(\varepsilon, \tau)$.

证明　用 $z_{\mathring{t}}$ 乘(32)式并考虑如下关系式

$$\theta_1 z_{\bar t t} z_{\mathring{t}} = (\theta_1 z_{\bar t}^2)_t/2,$$

$$bz z_{\mathring{t}} = \frac{1}{8}(b(\hat z + z)^2)_t - \frac{\tau^2}{8}(b z_{\bar t}^2)_t - \frac{1}{8}b_t(z + \check z)^2 + \frac{\tau^2}{8}b_t z_{\bar t}^2,$$

我们有

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2(p z_{\bar t}^2)_t + \varepsilon\theta_2 a z_{\mathring{t}}^2 + \frac{1}{8}(b(\hat z + z)^2)_t = \frac{1}{2}\varepsilon^2 q z_{\bar t}^2 + \frac{1}{8}b_t(z + \check z)^2 + R z_{\mathring{t}}, \tag{36}$$

其中　$p = \theta_1 - \tau^2 b/4\varepsilon^2,\ q = -\tau^2 b_t/4\varepsilon^2,\ \hat z = z(t_{j+1}),\ \check z = z(t_{j-1}),\ z = z(t_j)$.

用 2τ 乘(36)式并对 j(从 1 到 s)求和, 同时考虑下式:

$$2\tau\sum_{j=1}^{s} R_j z_{\mathring{t},j} = R_s(z_{s+1} + z_s) - R_1(z_1 + z_0) - \tau\sum_{j=1}^{s-1} R_{t,j}(z_{j+1} + z_j),$$

可得

$$\varepsilon^2 p_s z_{\bar t,s}^2 + 2\varepsilon\theta_2\tau\sum_{j=1}^{s} a_j z_{\mathring{t},j}^2 + \frac{1}{4}b_s(z_{s+1} + z_s)^2 =$$

$$\varepsilon^2 p_0 z_{t,0}^2 + \frac{1}{4} b_0 (z_1 + z_0)^2 - R_1 (z_1 + z_0) + R_s (z_{s+1} + z_s) +$$
$$\tau \sum_{j=1}^{s} \left\{ \varepsilon^2 q_j z_{t,j}^2 + \frac{1}{4} b_{t,j} (z_j + z_{j-1})^2 \right\} - \tau \sum_{j=1}^{s-1} R_{t,j} (z_{j+1} + z_j),$$
$$s \leqslant M - 1 \cdot \tag{37}$$

很容易检验

$$\left. \begin{array}{ll} 0 < c_0 \leqslant p \leqslant c_1, \ |q| \leqslant C_0 & \text{当 } \tau \leqslant \varepsilon, \\ c_0 \tau^2 \leqslant \varepsilon^2 p \leqslant c_1 \tau^2, \ \varepsilon^2 |q| \leqslant C_0 \tau^2 & \text{当 } \tau \geqslant \varepsilon \cdot \end{array} \right\} \tag{38}$$

d

由关系式(37),利用(38)又有如下不等式:

$$\delta_s \leqslant \delta_* + \tau \sum_{j=1}^{s} \left\{ d_j \delta_{j-1} + \rho_j \right\}, \qquad s \leqslant M - 1, \tag{39}$$

其中

$$\delta_j = \varepsilon^2 p_j z_{t,j}^2 + b_j (z_{j+1} + z_j)^2 / 4,$$
$$\delta_* = C_0 \delta_0 + C \max_{1 \leqslant j \leqslant M-1} |R_j|^2, \qquad C_0 > 1,$$
$$|\rho_j| \leqslant C |R_{t,j}| |z_{j+1} + z_j|, \qquad (j = 1, 2, \cdots, s-1), \rho_s = 0,$$
$$0 \leqslant d_j \leqslant C \qquad (j = 1, 2, \cdots, s) \cdot$$

由(39),通过积分不等式的差分模拟,又有

$$\delta_s \leqslant \delta_* \exp\left[\tau \sum_{i=1}^{s} d_i + \tau \sum_{i=1}^{s} |\rho_i| \exp\left[\tau \sum_{j=i+1}^{s} d_j \right. \right. \leqslant$$
$$C\left(\Delta_0^2 z_{t,0}^2 + |z_1|^2 + \max_{1 \leqslant i \leqslant M-1} |R_i|^2 + \tau \sum_{i=1}^{s-1} |R_{t,i}| |z_{i+1} + z_i| \right. \cdot$$

这就导出了(35)式• 引理 3.1 证毕•

引理 3.2 设 R 和 r 分别由(24)和(28)定义• 则

$$\Delta_0 |z_{t,0}| \leqslant C\tau, \ \|R\|_{C(\omega_\tau)} \leqslant C\tau, \ \tau \sum_{i=1}^{M-2} |R_{t,i}| \leqslant C\tau \cdot$$

利用(6),由 R 和 r 的显式表达式显然可证•

现给出最终精确结果•

定理 3.1 设 u 为(1)~(3)的解,y 为(29)~(31)的解,则

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant M} |y_j - u_j| \leqslant C\tau \cdot \tag{40}$$

证明 因为

$$z_{j+1} = (z_{j+1} + z_j)/2 + (\tau z_{t,j})/2,$$

有 $\qquad |z_{j+1}| \leqslant |z_{j+1} + z_j|/2 + \Delta_0 |z_{t,j}|/2 \cdot$

(40)立即可由引理 3.1 和引理 3.2 得出•

4 数值结果

例 应用格式(29)~(31)计算如下问题的近似解:

$$\varepsilon^2 u'' + \varepsilon 2(t+2) u' + (t^2 + 4t + 3 + \varepsilon) u =$$
$$(1 - \varepsilon)(t^4 + 4t^3 + (3 + 5\varepsilon) t^2 + \varepsilon 8t + 2\varepsilon^2), \qquad 0 < t \leqslant 1,$$
$$u(0) = 1, \ u'(0) = 1/\varepsilon,$$

这里精确解 $u(t)$ 由下式给出

$$u(t) = e^{-t(t+2)/2\varepsilon}\left\{2 - e^{-2t/\varepsilon} + t^2(1-\varepsilon)\right\}.$$

表1给出了 $E = \max_{\omega_\tau} | y - u |$ 的某些值.

表1

ε \ τ	0.1	0.05	0.02
5×10^{-1}	4.972 300 E-3	9.050 000 E-4	5.710 000 E-5
10^{-1}	3.310 000 E-2	5.451 800 E-3	4.047 000 E-4
10^{-2}	9.942 600 E-2	2.622 960 E-2	3.075 400 E-3
10^{-3}	1.069 579 E-1	1.313 200 E-2	6.242 800 E-3
10^{-4}	1.784 120 E-1	1.478 800 E-2	9.987 700 E-4

参 考 文 献

[1] O' Malley R E, Jr. Introduction to Singular Perturbations[M]. New York: Academic Press, 1974.

[2] O' Malley R E, Jr. Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations[M]. New York: Springer_Verlag, 1991.

[3] Neyfeh A H. Perturbation Methods[M]. Wiley, 1973.

[4] 苏煜城, 林平. 具有零阶退化方程的二阶双曲型方程奇异摄动问题的一致差分格式[J]. 应用数学和力学, 1990, **11**(4): 283~294.

[5] Boglaev I P. Numerical integration of an initial value problems for a systems with a small parameter affecting the derivative[J]. USSR Comput Math Mac Pys, 1987, **27**: 63~75. (in Russian)

[6] Doolan E P, Miller J J H, Schilders W H A. Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers[M]. Dublin: Boole Press, 1980.

[7] Amiraliyev G M. Difference schemes on the uniform mesh for singular perturbed pseudo_parabolic equations[J]. Turkish J Math, 1995, **19**: 207~222.

[8] Amiraligev G M. On difference schemes for problems of the theory of dispersive waves[J]. Soviet Math Dokl, 1991, **42**: 235~238.

[9] Amiraliyev G M. Difference method for the solution of one problem of the theory dispersive waves[J]. Differential Equations, 1990, **26**: 2146~2154. (in Russian)

[10] Samarski A A. Theory of Difference Schemes[M]. 2nd Ed. Moscow: "Nauka", 1983; German transl, Leibzig: Geest Portig, 1984.

A Uniformly Convergent Finite Difference Method for a Singularly Perturbed Initial Value Problem

G M Amiraliyev, HakkıDuru

(Deptartment of Mathematics, Y Y University, 65080 VAN, TURKEY)

Abstract: Initial value problem for linear second order ordinary differential equation with small parameter by first and second derivatives is considered. An exponentially fitted difference scheme with constant fitting factors is developed in a uniform mesh, which gives first_order uniform convergence in the sense of discrete maximum norm. Numerical results are also presented.

Key words: singular perturbation; difference scheme; uniform convergence; initial value condition; linear ordinary differential equation