应用数学和力学, 第 20 卷 第 4 期(1999 年 4 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 04_0371_10

具有横观各向同性球形压电夹杂的压电复合材料的有效性质*

江 冰, 方岱宁

(清华大学 工程力学系, 北京 100084)

(郑泉水推荐)

摘要: 压电复合材料的有效性质是一个十分重要的问题• 在分析了一无限大均匀线性非压电介质中含有一个横观各向同性球形压电夹杂问题的基础上, 导出了夹杂内的约束应变场和约束电场的解析表达式, 进而得到了含横观各向同性球形压电夹杂的压电复合材料的有效电弹模量的稀疏解• 本文结果可以用于压电复合材料或智能材料和智能结构的设计与分析•

关 键 词: 压电复合材料; 夹杂; 约束张量; 有效电弹模量
中图分类号: TQ328 文献标识码: A

引 言

随着信息工业的飞速发展以及近年来智能材料与智能结构的出现, 对力_电耦合问题的研究也日显重要• 由于应用上的重要性、广泛性与研究的简单性, 人们将注意力更多集中于压电复合材料有效电弹模量的分析与预测方面• 这种分析与预测一般是建立在细观力学基础之上的, 因此无穷大域中单个夹杂问题就显得十分重要• Wang[1]利用 Green 函数方法研究了压电椭球夹杂问题, 得到了嵌于压电基体中一球形压电夹杂内的约束应变场与约束电场的积分形式的表达式• 然而其积分形式过于复杂, 即使在基体是非压电材料的条件下, 也难以得到形式简单的显式解• Chen[2,3]、Dunn 和 Taya[4~6]等人采用与 Wang[1]类似的方法, 研究了压电夹杂问题, 但均未得到球形夹杂问题的封闭形式解• 压电复合材料一般是由非压电材料基体与压电夹杂组成, 在这种情况下问题可以得到很大的简化• 最近, Jiang 等[7]采用 Green 函数技术与细观力学方法, 分析了一无限大均匀线性非压电夹杂中含有一椭球状压电夹杂问题, 得到了用弹性 Eshelby 张量与电介质 Eshelby 张量表示的压电椭球夹杂内的约束应变场与约束电场的一般表达式• 基于 Budiansky[8]的能量等效框架, Jiang 等[9]进一步分析了压电复合材料的有效性质, 得到了压电复合材料有效电弹模量的一般形式解, 并给出了具有横观各向同性柱状压电夹杂的有效电弹模量的稀疏解与 Mori_Tanaka 解, 但未给出工程应用中十分重要的球状压电夹杂解• 由于球状压电夹杂问题在压电复合材料的分析、设计以及复合材料的有效性能预测方面所显出的重要性, 给出便于进行细观力学分析的球形夹杂封闭解就显得十分必要• 本文利用

* 收稿日期: 1997_12_12
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19891180)
作者简介: 江冰(1962~), 讲师, 博士, 现在英国 Caradiff 大学做博士后.

文献[7]、[9]的方法,导出了一无限大线性非压电介质中含有一个横观各向同性球形压电夹杂的约束应变场与约束电场的封闭解,并由此得到了具有横观各向同性球形压电夹杂的压电复合材料的有效电弹模量的稀疏解• 此结果可以用于压电复合材料或智能材料和智能结构的分析与设计中•

1 理 论

1.1 问题的提法

如果一个无限大均匀线性非压电介质 D 中,含有一椭球状线性压电夹杂 Ω,当夹杂具有均匀本征应变与均匀本征电场,且在无穷远处受到均匀的应变场与均匀电场作用时,问夹杂内的应变场与电场是如何分布的?

我们将用 Green 函数方法解此问题• 线性压电夹杂的本构关系是[10]:

$$\sigma_{ij} = C^*_{ijkl}(u_{k,l} - \varepsilon^*_{kl}) + e^*_{mij}(\phi_{,m} + E^*_m) \qquad \Omega\text{ 中}, \tag{1}$$

$$D_i = e^*_{ikl}(u_{k,l} - \varepsilon^*_{kl}) - k^*_{im}(\phi_{,m} + E^*_m) \qquad \Omega\text{ 中}• \tag{2}$$

由于基体是非压电材料,因此其本构关系为:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l} \qquad D\_\Omega\text{ 中}, \tag{3}$$

$$D_i = -k_{im}\phi_{,m} \qquad D\_\Omega\text{ 中}• \tag{4}$$

边界条件为

$$u_i(S) = \varepsilon^0_{ij}x_j,\quad \phi(S) = -E^0_i x_i, \tag{5}$$

其中 ϕ 和 $\boldsymbol{u}$ 是电势与弹性位移; $\boldsymbol{D}$ 和 σ 是电位移与弹性应力; $\boldsymbol{C}^*$, $\boldsymbol{e}^*$ 和 $\boldsymbol{k}^*$ 分别是夹杂的弹性模量,压电张量和介电张量; ε^* 和 $\boldsymbol{E}^*$ 是夹杂的本征应变与本征电场; ε^0 和 $\boldsymbol{E}^0$ 为无穷远处所加均匀应变场与均匀电场; $\boldsymbol{x}$ 是直角坐标系统; $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 是基体的弹性模量和介电张量• 由于基体是非压电材料, 故有 $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$•

引入如下特征函数

$$h(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \tag{6}$$

则夹杂的弹性模量、压电张量和介电张量可以写成如下形式:

$$\boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}^0 h(\boldsymbol{x});\ \boldsymbol{e}^* = \boldsymbol{e} + \boldsymbol{e}^0 h(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}^* h(\boldsymbol{x});\ \boldsymbol{k}^* = \boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}^0 h(\boldsymbol{x}), \tag{7}$$

其中

$$\boldsymbol{C}^0 = \boldsymbol{C}^* - \boldsymbol{C};\ \boldsymbol{e}^0 = \boldsymbol{e}^* - \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}^*;\ \boldsymbol{k}^0 = \boldsymbol{k}^* - \boldsymbol{k}• \tag{8}$$

由(6)~(8)式,方程(1)、(3)与方程(2)、(4)可以写为

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l} + [C^0_{ijkl}u_{k,l} + e^0_{mij}\phi_{,m} - (C^*_{ijkl}\varepsilon^*_{kl} - e^*_{mij}E^*_m)]h(\boldsymbol{x}) \qquad D\text{ 中}, \tag{9}$$

$$D_i = -k_{im}\phi_{,m} + [e^0_{ikl}u_{k,l} - k^0_{im}\phi_{,m} - (e^*_{ikl}\varepsilon^*_{kl} + k^*_{im}E^*_m)]h(\boldsymbol{x}) \qquad D\text{ 中}• \tag{10}$$

如果没有自由电荷且不考虑体力作用,则有如下的平衡方程

$$\sigma_{ij,j} = 0;\ D_{i,i} = 0• \tag{11}$$

将方程(9)和(10)代入(11)有

$$C_{ijkl}u_{k,lj} = -\left\{[C^0_{ijkl}u_{k,l} + e^0_{mij}\phi_{,m} - (C^*_{ijkl}\varepsilon^*_{kl} - e^*_{mij}E^*_m)]h(\boldsymbol{x})\right\}_{,j}, \tag{12}$$

$$k_{im}\phi_{,mi} = \left\{[e^0_{ikl}u_{k,l} - k^0_{im}\phi_{,m} - (e^*_{ikl}\varepsilon^*_{kl} + k^*_{im}E^*_m)]h(\boldsymbol{x})\right\}_{,i}• \tag{13}$$

我们可以将(12)与(13)两式右边项分别看作是作用于基体的体力与自由电荷,由于基体是没有力电耦合的,因此可以引入如下两个 Green 函数 $\boldsymbol{G}^u$, $\boldsymbol{G}^\phi$:

$$C_{ijkl}G^u_{kp,lj}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=-\delta_{ip}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'), \tag{14}$$

$$k_{im}G^\phi_{,im}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\cdot \tag{15}$$

方程(14)中的Green函数就是弹性问题的Green函数，它可以由下式决定[11]

$$G^u_{ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=(2\pi)^{-3}\int_{-\infty}^{+\infty}N_{ij}(\xi)D^{-1}(\xi)\exp\{\mathrm{i}\xi\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\}\mathrm{d}\xi, \tag{16}$$

这里 $K_{ik}=C_{ijkl}\xi_j\xi_l$; N_{ij} 是 K_{ij} 的代数余子式，$D(\xi)$ 是 K_{ij} 的行列式·

方程(15)中的Green函数就是电解质问题的Green函数，它可以由下式决定[12]

$$G^\phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=-(2\pi)^{-3}\int_{-\infty}^{+\infty}(k_{ij}\xi_i\xi_j)^{-1}\exp\{\mathrm{i}\xi\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\}\mathrm{d}\xi\cdot \tag{17}$$

因而方程(12)和(13)可以由(16)、(17)式给出的Green函数表示成如下形式

$$\begin{aligned}u_p&=u^0_p+\int_{-\infty}^{+\infty}G^u_{pi}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\{[C^0_{ijkl}u_{k,l}+e^0_{mij}\phi_{,m}-(C^*_{ijkl}\varepsilon^*_{kl}-e^*_{mij}E^*_m)]\mathrm{h}(\boldsymbol{x}')\}_{,j'}\mathrm{d}\boldsymbol{x}'=\\&u^0_p+\int_\Omega G^u_{pi,j}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')[C^0_{ijkl}u_{k,l}+e^0_{mij}\phi_{,m}-(C^*_{ijkl}\varepsilon^*_{kl}-e^*_{mij}E^*_m)]\mathrm{d}\boldsymbol{x}',\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\phi&=\phi^0+\int_{-\infty}^{+\infty}G^\phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\{[e^0_{ikl}u_{k,l}-k^0_{ij}\phi_{,j}-(e^*_{ikl}\varepsilon^*_{kl}+k^*_{ij}E^*_j)]\mathrm{h}(\boldsymbol{x}')\}_{,i'}\mathrm{d}\boldsymbol{x}'=\\&\phi^0+\int_\Omega G^\phi_{,i}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')[e^0_{ikl}u_{k,l}-k^0_{ij}\phi_{,j}-(e^*_{ikl}\varepsilon^*_{kl}+k^*_{ij}E^*_j)]\mathrm{d}\boldsymbol{x}',\end{aligned} \tag{19}$$

这里 u^0_p 和 ϕ^0 是方程(12)、(13)的齐次解· 在方程(18)、(19)的推导中用到如下性质

$$G^u_{pi,j'}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=-G^u_{pi,j}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'), \tag{20}$$

$$G^\phi_{,i'}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=-G^\phi_{,i}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\cdot \tag{21}$$

微分(18)、(19)两式，可以得到全域的弹性应变场与电场的方程

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}&=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})=\varepsilon^0_{ij}+\frac{1}{2}\int_\Omega[G^u_{im,nj}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')+G^u_{jm,ni}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')]\times\\&[C^0_{mnkl}u_{k,l}-e^0_{pmn}E_p-(C^*_{mnkl}\varepsilon^*_{kl}-e^*_{pmn}E^*_p)]\mathrm{d}\boldsymbol{x}',\end{aligned} \tag{22}$$

$$E_i=-\phi_{,i}=E^0_i-\int_\Omega G^\phi_{,mi}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')[e^0_{mkl}u_{k,l}+k^0_{mp}E_p-(e^*_{mkl}\varepsilon^*_{kl}+k^*_{mp}E^*_p)]\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\cdot \tag{23}$$

在推导方程(22)、(23)时，用到 $C_{ijkl}u_{k,l}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ 和 $E_i=-\phi_{,i}$·

1.2 椭球夹杂内的约束应变场与约束电场

Wang[1], Chen[2,3], Dunn 和 Taya[4] 证明：一无穷大线性压电基体中含有一个具有均匀的本征应变与均匀本征电场的线性椭球形压电夹杂，同时在远处受到均匀应变场与均匀电场作用，则夹杂中的约束应变与约束电场也是均匀的· 本文所讨论的问题是上述问题的特例，可以证明具有同样的结论· 考虑 $\boldsymbol{x}$ 落在夹杂内的情况，即 $\boldsymbol{x}\in\Omega$· 当 ε^*, $\boldsymbol{E}^*$, ε^0 和 $\boldsymbol{E}^0$ 均匀时，ε^{I} 和 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{I}}$ 也是均匀的· 上标“I”表示场量是夹杂内的· 方程(22)和(23)可以写成

$$\begin{aligned}&(I_{ijkl}+S_{ijpq}C^{-1}_{pqmn}C^0_{mnkl})\varepsilon^{\mathrm{I}}_{kl}=\varepsilon^0_{ij}+S_{ijmn}C^{-1}_{mnrs}e^0_{prs}E^{\mathrm{I}}_p+\\&\quad S_{ijmn}C^{-1}_{mnrs}(C^*_{rskl}\varepsilon^*_{kl}-e^*_{prs}E^*_p),\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}&(i_{ij}+s_{im}k^{-1}_{mn}k^0_{nj})E^{\mathrm{I}}_j=E^0_i-s_{im}k^{-1}_{mn}e^0_{nkl}\varepsilon^{\mathrm{I}}_{kl}+\\&\quad s_{im}k^{-1}_{mn}(e^*_{nkl}\varepsilon^*_{kl}+k^*_{nj}E^*_j),\end{aligned} \tag{25}$$

其中

$$S_{ijkl}=-\frac{1}{2}\int_\Omega C_{mnkl}[G^u_{im,nj}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')+G^u_{jm,ni}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')]\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \tag{26}$$

是弹性夹杂问题的Eshelby张量[11]，而

$$s_{ij} = \int_{\Omega} k_{pj} G^{\phi}_{,ip}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \tag{27}$$

是电介质夹杂问题的 Eshelby 张量[12], $\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{i}$ 分别是四阶和二阶单位张量. $(\cdot)^{-1}$表示求逆.

由方程(24)和(25), 我们可以得到 ε^*, $\boldsymbol{E}^*$, ε^0, $\boldsymbol{E}^0$, ε^{I} 和 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{I}}$ 之间的关系式如下

$$\varepsilon^{\mathrm{I}} = \mathscr{H}^1 : \varepsilon^0 + \mathscr{H}^2 \cdot \boldsymbol{E}^0 + \mathscr{S}^1 : \varepsilon^* + \mathscr{S}^2 \cdot \boldsymbol{E}^*, \tag{28}$$

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{I}} = \mathscr{H}^3 : \varepsilon^0 + \mathscr{H}^4 \cdot \boldsymbol{E}^0 + \mathscr{S}^3 : \varepsilon^* + \mathscr{S}^4 \cdot \boldsymbol{E}^*, \tag{29}$$

其中

$$\mathscr{H}^1 = (\boldsymbol{I} + \alpha \cdot \beta)^{-1} : \boldsymbol{A};\quad \mathscr{H}^2 = (\boldsymbol{I} + \alpha \cdot \beta)^{-1} : \alpha \cdot \boldsymbol{B}, \tag{30a}$$

$$\mathscr{H}^3 = -(\boldsymbol{i} + \beta : \alpha)^{-1} \cdot \beta : \boldsymbol{A};\quad \mathscr{H}^4 = (\boldsymbol{i} + \beta : \alpha)^{-1} \cdot \boldsymbol{B}; \tag{30b}$$

$$\mathscr{S}^1 = \boldsymbol{I} - (\boldsymbol{I} + \alpha \cdot \beta)^{-1} : (\boldsymbol{I} - \zeta);\quad \mathscr{S}^2 = -(\boldsymbol{I} + \alpha \cdot \beta)^{-1} : \alpha \cdot (\boldsymbol{i} - \eta), \tag{31a}$$

$$\mathscr{S}^3 = ((\boldsymbol{i} + \beta : \alpha)^{-1} \cdot \beta : (\boldsymbol{I} - \zeta);\quad \mathscr{S}^4 = \boldsymbol{i} - (\boldsymbol{i} + \beta : \alpha)^{-1} \cdot (\boldsymbol{i} - \eta); \tag{31b}$$

而

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{S} : \boldsymbol{C}^{-1} : \boldsymbol{C}^0)^{-1};\quad \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{k}^{-1} \cdot \boldsymbol{k}^0)^{-1}, \tag{32a}$$

$$\alpha = \boldsymbol{A} : \boldsymbol{S} : \boldsymbol{C}^{-1} : (\boldsymbol{e}^*)^{\mathrm{T}};\quad \beta = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{k}^{-1} \cdot \boldsymbol{e}^*, \tag{32b}$$

$$\zeta = \boldsymbol{A} : \boldsymbol{S} : \boldsymbol{C}^{-1} : \boldsymbol{C}^*;\quad \eta = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{k}^{-1} \cdot \boldsymbol{k}^*. \tag{32c}$$

这里 $\boldsymbol{A}$ 是弹性夹杂问题的应变集中张量, $\boldsymbol{B}$ 是电介质夹杂问题的电场集中张量, 定义$(\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}})_{klp} = e_{pkl}$. 方程(30a)、(31a)也可写成如下便于运算的形式

$$\mathscr{H}^1 = \boldsymbol{A} + \alpha \cdot \mathscr{H}^3;\quad \mathscr{H}^2 = \alpha \cdot \mathscr{H}^4, \tag{30c}$$

$$\mathscr{S}^1 = \zeta + \alpha \cdot \mathscr{S}^3;\quad \mathscr{S}^2 = -\alpha \cdot (\boldsymbol{i} - \mathscr{S}^4). \tag{31c}$$

1.3　压电复合材料的有效电弹模量

对于含有椭球状压电夹杂的复合材料而言, 假定压电复合材料中含有 N 相压电夹杂. 当夹杂内没有本征应变与本征电场, 即 $\varepsilon^* = 0$ 和 $\boldsymbol{E}^* = 0$, 且自变量为应变与电场时, 由热力学知自由能应为由下式定义的电 Gibbs 函数[13]

$$\mathscr{G}(\varepsilon, \boldsymbol{E}) = \mathscr{G}^1(\varepsilon, \boldsymbol{E}) - \mathscr{G}^2(\varepsilon, \boldsymbol{E}), \tag{33}$$

其中

$$\mathscr{G}^1(\varepsilon, \boldsymbol{E}) = \frac{1}{2V}\int_V \varepsilon_{ij}\sigma_{ij}(\varepsilon, \boldsymbol{E})\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2V}\int_V \varepsilon : \sigma(\varepsilon, \boldsymbol{E})\,\mathrm{d}V, \tag{34a}$$

$$\mathscr{G}^2(\varepsilon, \boldsymbol{E}) = \frac{1}{2V}\int_V E_i D_i(\varepsilon, \boldsymbol{E})\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2V}\int_V \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}(\varepsilon, \boldsymbol{E})\,\mathrm{d}V. \tag{34b}$$

这里 V 是压电复合材料的总体积. 可以求出以组份材料常数表示的$\mathscr{G}^1(\varepsilon, \boldsymbol{E})$, $\mathscr{G}^2(\varepsilon, \boldsymbol{E})$,

$$\mathscr{G}^1(\varepsilon, \boldsymbol{E}) = \frac{1}{2}\left\{ C_{ijkl}\varepsilon^0_{ij}\varepsilon^0_{kl} + \varepsilon^0_{ij}\sum_{n=1}^{N} f_n\left[\mathscr{C}^{(n)}_{ijkl}\varepsilon^{(n)}_{kl} - e^{(n)}_{pij}E^{(n)}_p \right] \right\}, \tag{35}$$

$$\mathscr{G}^2(\varepsilon, \boldsymbol{E}) = \frac{1}{2}\left\{ k_{im}E^0_i E^0_m + E^0_i\sum_{n=1}^{N} f_n\left[\mathscr{K}^{(n)}_{im} E^{(n)}_m + e^{(n)}_{ikl}\varepsilon^{(n)}_{kl} \right] \right\}, \tag{36}$$

这里$\mathscr{C}^{(n)} = \boldsymbol{C}^{(n)} - \boldsymbol{C}$; $\mathscr{K}^{(n)} = \boldsymbol{k}^{(n)} - \boldsymbol{k}$. 其中 $\boldsymbol{C}^{(n)}$、$\boldsymbol{e}^{(n)}$ 和 $\boldsymbol{k}^{(n)}$ $(n = 1, \cdots, N)$ 是第 n 相夹杂的材料常数. $\varepsilon^{(n)}$ 和 $\boldsymbol{E}^{(n)}$ 分别是第 n 相平均应变场和平均电场. 复合材料的电 Gibbs 函数也可以由复合材料的有效电弹模量 $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 表示为

$$\mathscr{G}(\varepsilon, \boldsymbol{E}) = \frac{1}{2}\left\{ C_{ijkl}\varepsilon^0_{ij}\varepsilon^0_{kl} - 2e_{mij}E^0_m\varepsilon^0_{ij} - k_{im}E^0_i E^0_m \right\}. \tag{37}$$

由 Budiansky 能量等效框架[8], 可以得到压电复合材料的有效电弹模是 $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 的封闭解形式为[9]:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} f_n \,\mathrm{sym}[\mathscr{C}^{(n)}:\mathscr{M}^{(n)} - (\boldsymbol{e}^{(n)})^{\mathrm{T}}\cdot \mathscr{P}^{(n)}], \tag{38}$$

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} + \sum_{n=1}^{N} f_n[\boldsymbol{e}^{(n)}:\mathscr{N}^{(n)} + \mathscr{K}^{(n)}\cdot \mathscr{L}^{(n)}], \tag{39}$$

$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} f_n[\mathscr{K}^{(n)}\cdot \mathscr{P}^{(n)} - (\mathscr{C}^{(n)}:\mathscr{N}^{(n)})^{\mathrm{T}} + (\mathscr{L}^{(n)})^{\mathrm{T}}\cdot \boldsymbol{e}^{(n)} + \boldsymbol{e}^{(n)}:\mathscr{M}^{(n)}], \tag{40}$$

这里“sym$\boldsymbol{A}$” 表示 $\boldsymbol{A}$ 的对称部分, 即, sym$\boldsymbol{A} = (A_{ijkl} + A_{klij})/2$• $V_n = f_n V$ 是第n 相的体积, f_n 则是第 n 相的体积分数; $\mathscr{M}^{(n)}$, $\mathscr{N}^{(n)}$, $\mathscr{P}^{(n)}$和$\mathscr{L}^{(n)}$是第 n 相夹杂内的约束张量, 它表征了夹杂内的平均应变场 $\varepsilon^{(n)}$、平均电场 $\boldsymbol{E}^{(n)}$ 与无限远处均匀应变场 ε^0、均匀电场 $\boldsymbol{E}^0$ 的关系, 即:

$$\varepsilon^{(n)} = \mathscr{M}^{(n)}:\varepsilon^0 + \mathscr{N}^{(n)}\cdot \boldsymbol{E}^0, \tag{41a}$$

$$\boldsymbol{E}^{(n)} = \mathscr{P}^{(n)}:\varepsilon^0 + \mathscr{L}^{(n)}\cdot \boldsymbol{E}^0• \tag{41b}$$

$\mathscr{M}^{(n)}$, $\mathscr{N}^{(n)}$, $\mathscr{P}^{(n)}$和$\mathscr{L}^{(n)}$不仅与第 n 相材料和基体材料的性质有关, 而且与所选用的求解 $\varepsilon^{(n)}$ 与 $\boldsymbol{E}^{(n)}$ 的方法有关•

1.3.1 有效电弹模量的稀疏解

当夹杂内的平均应变 $\varepsilon^{(n)}$ 和平均电场 $\boldsymbol{E}^{(n)}$ 用无穷大基体中单个夹杂内的应变场 ε^{I} 与电场 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{I}}$ 来近似时, 我们就得到了复合材料有效电弹模量的稀疏解• 此时$\mathscr{M}^{(n)}$, $\mathscr{N}^{(n)}$, $\mathscr{P}^{(n)}$和$\mathscr{L}^{(n)}$为

$$\mathscr{M}^{(n)} = \mathscr{H}^{(n)1},\ \mathscr{N}^{(n)} = \mathscr{H}^{(n)2},\ \mathscr{P}^{(n)} = \mathscr{H}^{(n)3},\ \mathscr{L}^{(n)} = \mathscr{H}^{(n)4}, \tag{42}$$

其中第 n 相的$\mathscr{H}^{(n)1}$、$\mathscr{H}^{(n)2}$、$\mathscr{H}^{(n)3}$和$\mathscr{H}^{(n)4}$可由式(30) 求出• 将方程(42) 代入(38) ~ (40), 就可以求出压电复合材料的有效电弹模量的稀疏解•

1.3.2 有效电弹模量的 Mori_Tanaka 解

Mori_Tanaka 平均场方法的目的是为了考虑夹杂之间的相互作用, 其基本思想是将夹杂埋于原来的基体之中, 而远场的应变 ε^0 与远场的电场 $\boldsymbol{E}^0$ 由基体的平均应变 ε^{m} 与基体的平均电场 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{m}}$ 代替, 夹杂的相互作用则在基体的平均应变与电场中得到反映• 由此可得到考虑夹杂间相互作用的第 n 相夹杂内的应变与电场, 即

$$\mathscr{M}^{(n)} = \mathscr{H}^{(n)1}:\boldsymbol{M} + \mathscr{H}^{(n)2}\cdot \boldsymbol{P};\ \mathscr{N}^{(n)} = \mathscr{H}^{(n)1}:\boldsymbol{N} + \mathscr{H}^{(n)2}\cdot \boldsymbol{Q}, \tag{43a}$$

$$\mathscr{P}^{(n)} = \mathscr{H}^{(n)3}:\boldsymbol{M} + \mathscr{H}^{(n)4}\cdot \boldsymbol{P};\ \mathscr{L}^{(n)} = \mathscr{H}^{(n)3}:\boldsymbol{N} + \mathscr{H}^{(n)4}\cdot \boldsymbol{Q}, \tag{43b}$$

这里

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{H}^1 - \boldsymbol{H}^2\cdot(\boldsymbol{H}^4)^{-1}\cdot \boldsymbol{H}^3]^{-1};\ \ \boldsymbol{N} = -\boldsymbol{M}:\boldsymbol{H}^2\cdot(\boldsymbol{H}^4)^{-1}, \tag{44a}$$

$$\boldsymbol{P} = -(\boldsymbol{H}^4)^{-1}\cdot \boldsymbol{H}^3:\boldsymbol{M};\ \ \boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{H}^4)^{-1}\cdot[\boldsymbol{i} - \boldsymbol{H}^3:\boldsymbol{N}], \tag{44b}$$

而

$$\boldsymbol{H}^1 = \boldsymbol{I} - \sum_{n=1}^{N} f_n[\boldsymbol{I} - \mathscr{H}^{(n)1}];\ \ \boldsymbol{H}^2 = \sum_{n=1}^{N} f_n \mathscr{H}^{(n)2}, \tag{45a}$$

$$\boldsymbol{H}^3 = \sum_{n=1}^{N} f_n \mathscr{H}^{(n)3};\ \ \boldsymbol{H}^4 = \boldsymbol{i} - \sum_{n=1}^{N} f_n[\boldsymbol{i} - \mathscr{H}^{(n)4}]• \tag{45b}$$

将方程(43) 代入(38) ~ (40), 就可以求出压电复合材料的有效电弹模量的 Mori_Tanaka 解•

2 横观各向同性球形压电夹杂内的应变场与电场

由上述方程, 我们可以求出一无穷大非压电材料中含有一横观各向同性球形压电夹杂内的约束应变场与约束电场• 假定 3 轴方向是对称轴方向, 基体是各向同性的线性非压电材料•

夹杂与基体的材料常数与几何形状参数如下:

对于夹杂, 非零的材料常数是

$$\left.\begin{aligned}&C^*_{1111}=C^*_{2222},\ C^*_{1133}=C^*_{2233},\ C^*_{3333},\ C^*_{1313}=C^*_{2323},\ C^*_{1212}=(C^*_{1111}-C^*_{1122})/2,\\&e^*_{311}=e^*_{322},\ e^*_{333},\ e^*_{113}=e^*_{223},\ k^*_{11}=k^*_{22},\ k^*_{33}.\end{aligned}\right\}\tag{46}$$

基体的材料常数为

$$\left.\begin{aligned}&C^{-1}_{ijkl}=\frac{1}{C_{1111}-C_{1122}}I_{ijkl}-\frac{C_{1122}}{(C_{1111}-C_{1122})(C_{1111}+2C_{1122})}\delta_{ij}\delta_{kl},\\&k_{ij}=k\delta_{ij}.\end{aligned}\right\}\tag{47}$$

对于球形状的夹杂, 其非零的纯弹性 Eshelby 张量为

$$\left.\begin{aligned}&S_{1111}=S_{2222}=S_{3333}=\frac{7C_{1111}+2C_{1122}}{15C_{1111}},\\&S_{1122}=S_{2211}=S_{1133}=S_{3311}=S_{2233}=S_{3322}=\frac{4C_{1122}-C_{1111}}{15C_{1111}},\\&S_{1212}=S_{1313}=S_{2323}=\frac{4C_{1111}-C_{1122}}{15C_{1111}},\ S_{ijkl}=S_{jikl}=S_{ijlk},\end{aligned}\right\}\tag{48}$$

而球状夹杂的非零纯电介质 Eshelby 张量为

$$s_{11}=s_{22}=s_{33}=1/3.\tag{49}$$

为简化方程, 我们引入如下几个量纲一的参数

$$\left.\begin{aligned}&b_1=\frac{C^0_{1111}}{C_{1111}},\ b_2=\frac{C^0_{1122}}{C_{1111}},\ b_3=\frac{C^0_{1133}}{C_{1111}},\ b_4=\frac{C^0_{1313}}{C_{1111}},\ b_5=\frac{C^0_{1212}}{C_{1111}},\ b_6=\frac{C^0_{3333}}{C_{1111}},\\&a_1=\frac{C_{1122}}{C_{1111}},\ c_1=\frac{k^0_{11}}{k_{11}},\ c_2=\frac{k^0_{33}}{k_{11}},\ h_1=\frac{(e^*_{113})^2}{k_{11}C_{1111}}.\end{aligned}\right\}\tag{50}$$

由方程(30)、(31) 我们可以得到 $\mathcal{H}^1$ 的非零分量为

$$\mathcal{H}^1_{1111}+\mathcal{H}^1_{1122}=\frac{1}{\Omega_0}\left[15(1-a_1)-2(1+a_1)b_3+(7-3a_1)b_6-\frac{2\theta_2\varphi_2}{3\Omega}\right],\tag{51a}$$

$$\mathcal{H}^1_{1111}-\mathcal{H}^1_{1122}=\frac{15(1-a_1)}{15(1-a_1)+2(4-a_1)(b_1-b_2)},\tag{51b}$$

$$\mathcal{H}^1_{2222}=\mathcal{H}^1_{1111},\ \mathcal{H}^1_{2211}=\mathcal{H}^1_{1122},\tag{51c}$$

$$\mathcal{H}^1_{1133}=\mathcal{H}^1_{2233}=\frac{1}{\Omega_0}\left[(1+a_1)b_6-(6-4a_1)b_3-\frac{\theta_2\varphi_3}{3\Omega}\right],\tag{51d}$$

$$\mathcal{H}^1_{3311}=\mathcal{H}^1_{3322}=\frac{1}{\Omega_0}\left[(1+a_1)(b_1+b_2)-(7-3a_1)b_3-\frac{\theta_3\varphi_2}{3\Omega}\right],\tag{51e}$$

$$\mathcal{H}^1_{3333}=\frac{1}{\Omega_0}\left[(15(1-a_1)-2(1+a_1)b_3+(6-4a_1)(b_1+b_2)-\frac{\theta_3\varphi_3}{3\Omega}\right],\tag{51f}$$

$$\mathcal{H}^1_{1313}=\mathcal{H}^1_{2323}=\frac{15(1-a_1)(3+c_1)}{2\omega},\tag{51g}$$

$$\mathcal{H}^1_{1212}=\frac{15(1-a_1)}{30(1-a_1)+8(4-a_1)b_5},\tag{51h}$$

$$\mathcal{H}^1_{ijkl}=\mathcal{H}^1_{jikl}=\mathcal{H}^1_{ijlk}.$$

$\mathcal{H}^2$ 的非零分量为

$$\mathcal{H}^2_{131}=\mathcal{H}^2_{311}=\mathcal{H}^2_{232}=\mathcal{H}^2_{322}=\frac{\theta_1}{\omega},\tag{52a}$$

$$\mathcal{H}^2_{113} = \mathcal{H}^2_{223} = \frac{\theta_2}{\Omega},\quad \mathcal{H}^2_{333} = \frac{\theta_3}{\Omega}. \tag{52b}$$

$\mathcal{H}^3$ 的非零分量为

$$\mathcal{H}^3_{113} = \mathcal{H}^3_{131} = \mathcal{H}^3_{232} = \mathcal{H}^3_{223} = -\frac{\varphi_1}{\omega}, \tag{53a}$$

$$\mathcal{H}^3_{311} = \mathcal{H}^3_{322} = -\frac{\varphi_2}{\Omega},\quad \mathcal{H}^3_{333} = -\frac{\varphi_3}{\Omega}. \tag{53b}$$

$\mathcal{H}^4$ 的非零分量为

$$\mathcal{H}^4_{11} = \mathcal{H}^4_{22} = \frac{3\omega_0}{\omega},\quad \mathcal{H}^4_{33} = \frac{3\Omega_0}{\Omega}. \tag{54}$$

$\mathcal{S}^1$ 的非零分量为

$$\mathcal{S}^1_{1111} + \mathcal{S}^1_{1122} = 1 - \frac{1-a_1}{3\Omega_0}\left[(3-2a_1)(9-2b_3) + (13-2a_1)b_6 - \frac{2\theta_2\phi_2}{3\Omega}\right], \tag{55a}$$

$$\mathcal{S}^1_{1111} - \mathcal{S}^1_{1122} = \frac{2(4-a_1)(1-a_1+b_1-b_2)}{15(1-a_1)+2(4-a_1)(b_1-b_2)}, \tag{55b}$$

$$\mathcal{S}^1_{2222} = \mathcal{S}^1_{1111},\quad \mathcal{S}^1_{2211} = \mathcal{S}^1_{1122}, \tag{55c}$$

$$\mathcal{S}^1_{1133} = \mathcal{S}^1_{2233} = -\frac{1-a_1}{3\Omega_0}\left[3(1-4a_1) - 10b_3 + (3-2a_1)b_6 - \frac{\theta_2\phi_3}{3\Omega}\right], \tag{55d}$$

$$\mathcal{S}^1_{3311} = \mathcal{S}^1_{3322} = -\frac{1-a_1}{3\Omega_0}\left[3(1-4a_1) + (3-2a_1)(b_1+b_2) - (13-2a_1)b_3 - \frac{\theta_3\phi_2}{3\Omega}\right], \tag{55e}$$

b

$$\mathcal{S}^1_{3333} = 1 - \frac{2(1-a_1)}{3\Omega_0}\left[3(4-a_1) + 5(b_1+b_2) + (3-2a_1)b_3 - \frac{\theta_3\phi_3}{3\Omega}\right], \tag{55f}$$

$$\mathcal{S}^1_{1313} = \mathcal{S}^1_{2323} = \frac{4-a_1}{\omega_0}\left[1-a_1+2b_4+\frac{2\varphi_1\phi_1}{45\omega}\right], \tag{55g}$$

$$\mathcal{S}^1_{1212} = \frac{(4-a_1)(1-a_1+2b_5)}{15(1-a_1)+4(4-a_1)b_5}, \tag{55h}$$

$$\mathcal{S}^1_{ijkl} = \mathcal{S}^1_{jikl} = \mathcal{S}^1_{ijlk}.$$

$\mathcal{S}^2$ 的非零分量为

$$\mathcal{S}^2_{131} = \mathcal{S}^2_{311} = \mathcal{S}^2_{232} = \mathcal{S}^2_{322} = -\frac{2\theta_1}{3\omega}, \tag{56a}$$

$$\mathcal{S}^2_{113} = \mathcal{S}^2_{223} = -\frac{2\theta_2}{3\Omega},\quad \mathcal{S}^2_{333} = -\frac{2\theta_3}{3\Omega}. \tag{56b}$$

$\mathcal{S}^3$ 的非零分量为

$$\mathcal{S}^3_{113} = \mathcal{S}^3_{131} = \mathcal{S}^3_{232} = \mathcal{S}^3_{223} = \frac{(1-a_1)\phi_1}{3\omega}, \tag{57a}$$

$$\mathcal{S}^3_{311} = \mathcal{S}^3_{322} = \frac{(1-a_1)\phi_2}{3\Omega},\quad \mathcal{S}^3_{333} = \frac{(1-a_1)\phi_3}{3\Omega}. \tag{57b}$$

$\mathcal{S}^4$ 的非零分量为

$$\mathcal{S}^4_{11} = \mathcal{S}^4_{22} = 1 - \frac{2\omega_0}{\omega},\quad \mathcal{S}^4_{33} = 1 - \frac{2\Omega_0}{\Omega}, \tag{58}$$

其中

$$\omega_0 = 15(1-a_1) + 4(4-a_1)b_4, \tag{59a}$$

$$\omega = 4(4-a_1)h_1 + (3+c_1)\omega_0; \tag{59b}$$

$$\theta_1 = 6(4 - a_1) \times \frac{e^*_{113}}{C_{1111}}, \tag{60a}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{C_{1111}}[5(1 - a_1)e_0 - 2(4 - a_1)(e_0 + e_1)], \tag{60b}$$

$$\theta_3 = \frac{1}{C_{1111}}[5(1 - a_1)e_0 + 2(4 - a_1)(2e_0 + e_2)]; \tag{60c}$$

$$\varphi_1 = 15(1 - a_1) \times \frac{e^*_{113}}{C_{1111}}, \tag{61a}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{k_{11}}[5(1 - a_1)(e_0 - e_0) - (7 - 3a_1)e_1 + (1 + a_1)e_2], \tag{61b}$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{C_{1111}}[5(1 - a_1)(e_0 + 2e_0) - 2(1 + a_1)e_1 + (6 - 4a_1)e_2]; \tag{61c}$$

$$\phi_1 = 3(7 + 2a_1) \times \frac{e^*_{113}}{k_{11}}, \tag{62a}$$

$$\phi_2 = \frac{1}{k_{11}}[10(1 - a_1)e_0 - (7 + 2a_1)e_0 - (13 - 2a_1)e_1 + (3 - 2a_1)e_2], \tag{62b}$$

$$\phi_3 = \frac{1}{k_{11}}[10(1 - a_1)e_0 + 2(7 + 2a_1)e_0 - (6 - 4a_1)e_1 + 10e_2]; \tag{62c}$$

$$\begin{aligned}\Omega_0 = {} & 15(1 - a_1) + (6 - 4a_1)(b_1 + b_2) + (7 - 3a_1)b_6 - \\ & 4(1 + a_1)b_3 + \frac{2}{3}(4 - a_1)b_0,\end{aligned} \tag{63a}$$

$$\begin{aligned}\Omega_1 = {} & \frac{1}{9k_{11}C_{1111}}\{15(1 - a_1)e_0^2 + 2(4 - a_1)[6e_0^2 + \\ & (e_2 - 2e_1)e_0 + 2(e_1 + e_2)e_0\},\end{aligned} \tag{63b}$$

$$\Omega = \Omega_1 + (3 + c_2)\Omega_0; \tag{63c}$$

这里

$$b_0 = (b_1 + b_2)b_6 - 2b_3^2, \tag{64a}$$

$$e_1 = b_3 e^*_{333} - b_6 e^*_{311},\quad e_2 = (b_1 + b_2)e^*_{333} - 2b_3 e^*_{311}, \tag{64b}$$

$$e_0 = e^*_{333} + 2e^*_{311},\quad e_0 = e^*_{333} - e^*_{311}. \tag{64c}$$

由(51)~(58)可见, $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{S}$ 均可分解为纯弹性项与力_电耦合项之和. 当夹杂是非压电材料, 也就是 $\boldsymbol{e}^* = \boldsymbol{0}$ 时, $\mathcal{H}^1$ 和 $\mathcal{H}^4$ 分别退化为弹性应变集中张量 $\boldsymbol{A}$ 和电场集中张量 $\boldsymbol{B}$, 而 $\mathcal{H}^2$, $\mathcal{H}^3$, $\mathcal{S}^2$ 和 $\mathcal{S}^3$ 则变为零. 此时问题可以简化为弹性非均质问题以及电介质非均质问题. 如果材料是均质的且是非压电的, 这时 $\mathcal{H}^1$ 和 $\mathcal{H}^4$ 退化为四阶和二阶单位张量 $\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{i}$; 而 $\mathcal{S}^1$ 则退化为弹性夹杂问题的 Eshelby 张量 $\boldsymbol{S}$; $\mathcal{S}^4$ 则退化为电介质夹杂问题的 Eshelby 张量 $\boldsymbol{s}$.

值得注意的是, 对横观各向同性球形压电夹杂而言, Ω 与 ω 是非常重要的两个耦合参数, Ω 反映了正应变的耦合关系, 而 ω 则反映了剪应变的耦合关系. 由上述方程及式(28)~(29), 就可以求出夹杂内的约束应变与约束电场.

3　压电复合材料有效电弹模量的稀疏解

由于压电复合材料性能可以设计, 因此在工程中应用较为广泛. 由于压电复合材料中压电夹杂的体积百分含量一般不是太高, 因此稀疏解在工程中还是有价值的. 本文给出了含有横观各向同性球形压电夹杂的压电复合材料有效电弹模量的稀疏解. 这里假定夹杂中无本征

应变与本征电场,夹杂的对称轴方向均沿3轴方向· 由方程(38)~(40),我们可以求出压电复合材料的有效电弹模量:

C 的非零分量:

$$C_{1111}+C_{1122}=C_{1111}\left\{1+a_1+f\frac{1}{\Omega_0}\left[15(1-a_1)(b_1+b_2)+(7-3a_1)b_0+\frac{2k_{11}\varphi_2^2}{C_{1111}\Omega}\right]\right\}, \tag{65}$$

$$C_{1111}-C_{1122}=(1-a_1)C_{1111}\left\{1+f\frac{15(b_1-b_2)}{15(1-a_1)+4(4-a_1)(b_1-b_2)}\right\}, \tag{66}$$

$$C_{1133}=C_{2233}=C_{1111}\left\{a_1+f\frac{1}{\Omega_0}\left[15(1-a_1)b_3+(1+a_1)b_0+\frac{k_{11}\varphi_2\varphi_3}{C_{1111}\Omega}\right]\right\}, \tag{67}$$

$$C_{3333}=C_{1111}\left\{1+f\frac{1}{\Omega_0}\left[15(1-a_1)b_6+(6-4a_1)b_0+\frac{k_{11}\varphi_3^2}{C_{1111}\Omega}\right]\right\}, \tag{68}$$

$$C_{1313}=C_{2323}=\frac{1}{2}(1-a_1)C_{1111}\left\{1+f\frac{30}{\omega}[h_1+(3+c_1)b_4]\right\}, \tag{69}$$

$$C_{1212}=\frac{1}{2}(1-a_1)C_{1111}\left\{1+f\frac{30b_5}{15(1-a_1)+4(4-a_1)b_5}\right\}, \tag{70}$$

$$C_{ijkl}=C_{jikl}=C_{ijlk}=C_{klij}\cdot$$

k 的非零分量

$$k_{11}=k_{22}=k_{11}\left[1+3f\left(1-\frac{3\omega_0}{\omega}\right)\right],\quad k_{33}=k_{11}\left[1+3f\left(1-\frac{3\Omega_0}{\Omega}\right)\right], \tag{71}$$

e 的非零分量

$$e_{113}=e_{131}=e_{223}=e_{232}=f\frac{3k_{11}\varphi_1}{\omega}, \tag{72}$$

$$e_{311}=e_{322}=f\frac{3k_{11}\varphi_2}{\Omega},\quad e_{333}=f\frac{3k_{11}\varphi_3}{\Omega}\cdot \tag{73}$$

4 结 论

本文对具有横观各向同性球形夹杂的压电复合材料进行了分析,得到了无限大非压电介质中含有单个夹杂问题的夹杂内约束应变场与约束电场的封闭解,并给出了具有横观各向同性球形压电夹杂的压电复合材料有效电弹模量的稀疏解· 本文的结果可以用于压电复合材料以及智能材料与智能结构的分析和设计中·

参 考 文 献

[1] Wang B. Three_dimensional analysis of an ellipsoidal inclusion in a piezoelectric material[J]. Int J Solids Structures, 1992, **29**(3): 293~308.

[2] Chen T Y. Green' s functions and the non_uniform transformation problem in a piezoelectric medium [J]. Mechanics Research Communications, 1993, **20**(3): 271~278.

[3] Chen T Y. Some exact relations of inclusions in piezoelectric media[J]. Int J Engng Sci, 1994, **32**(3): 553~556.

[4] Dunn M L, Taya M. An analysis of piezoelectric composite materials containing ellipsoidal inhomogeneities[J]. Proc R Soc Lond A, 1993, **443**(9): 265~287.

[5] Dunn M L. Electroelastic Green' s functions for transversely isotropic piezoelectric media and their application to the solution of inclusion and inhomogeneity problems[J]. Int J Engng Sci, 1994, **32**

(1): 119~ 131.

[6] Dunn M L, Taya M. Micromechanics predictions of the effective electroelastic moduli of the piezoelectric composites[J]. Int J Solids Structures, 1993, **30**(5): 161~ 165.

[7] Jiang Bing, Fang Daining, Hwang Kehchih. The exact relations among the Eshelby' s tensors of the piezoelectric inclusion problems, the pure elastic inclusion problems and the pure dielectric inclusion problems[A]. Proc IMMM_97' [C]. Tsu, Japan: Mie University Press, 1997, 571~ 576.

[8] Budiansky Y. On the elastic moduli of some heterogeneous materials[J]. J Mech Phys Solids, 1965, **13**(2): 223~ 227.

[9] Jiang Bing, Fang Daining, Hwang Kehchih. Analytical solutions of the effective electroelastic moduli of piezoelectric composite materials[A]. Proc ICAPC_97' [C]. Beijing: Press of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 1997, 123~ 129.

[10] Maugin G A. Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids [M]. Amsterdam: North_Holland, 1988.

[11] Mura T. Mechanics of Defects in Solids [M]. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publisher 1987.

[12] 朗道, 里弗西兹. 连续媒质电动连续[M]. 北京: 高等教育出版社, 1956.

[13] Lines M E, Glass A M. Principles and Applications Ferroelectrics and Related Materials [M]. Oxford: Clarendon Press, 1997.

The Effective Properties of Piezoelectric Composite Materials with Transversely Isotropic Spherical Inclusions

Jiang Bing, Fang Daining

(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, P R China)

Abstract: The effective properties of piezoelectric composite materials are very important in engineering. In this paper, the closed_form solutions of the constraint_strain and the constraint_electric_field of a transversely isotropic spherical inclusion in an infinite non_piezoelectric matrix are obtained. The dilute solutions of piezoelectric composite materials with transversely isotropic spherical inclusions are also given. The solutions in the paper can be readily utilized in analysis and design of piezoelectric composite materials or smart materials and smart structures.

Key words: piezoelectric composite materials; inclusions; constraint_tensors; the effective electroelastic moduli