

文章编号: 1000-0887(1999) 04-0405-06

球壳的环向剪切屈曲^{*}

张音翼

(南昌大学 工程力学研究所, 南昌 330029)

(罗海安推荐)

摘要: 通过球壳微元初始屈曲的微分几何分析, 推导出一组新的精确的屈曲分支方程, 并且应用 Galerkin 变分法研究铰支球壳承受环向剪切力时的整体稳定性, 构造了接近分支点变形状态的屈曲模式, 首次求得了从扁球壳到半球壳大范围内的扭转屈曲临界特征值, 临界荷载强度和临界应力。

关键词: 球壳; 屈曲分支方程; 环向剪切力; 特征值; 屈曲临界值

中图分类号: TB124 **文献标识码:** A

引 言

壳体稳定研究在很多现代工程领域如航空、航天、航海、建筑、化工、机械、仪表中都有重要的应用。弹性薄壳结构的屈曲一般在各种荷载其中常常包含扭转荷载的组合作用下发生。螺旋形节线波的成功设计(E. Schwerin, 1925), 使圆柱壳的纯扭转屈曲(L. H. Donnell, 1933), 组合扭转屈曲(S. B. Badorf, M. Stein, M. Schildcrout, 1947), 冲击扭转屈曲(王德禹, 张善元, 杨桂通, 1993), 迭层壳的扭转大挠度(G. J. Simitses, D. Shaw, I. Sheinman, 1985)等的研究均十分活跃, 积累了丰富的文献资料^[1~3,4~7]。由于复杂的壳体几何造成的数学困难, 球壳和圆锥壳的稳定研究长期停留在非扭转荷载作用的层次上。文献[8]首次获得了从扁壳(半锥顶角 $75^\circ \leq \alpha < 90^\circ$) 到深壳($5^\circ < \alpha < 75^\circ$) 的圆锥壳纯扭转屈曲分支解。在此基础上, 本文继续应用曲面微分几何分析推导出新的精确的球壳屈曲分支方程, 借助 Galerkin 变分法研究铰支约束球壳在环向分布剪切力作用下的稳定性态, 同样获得了从扁壳(张角 $\alpha \leq 30^\circ$) 到半球壳($\alpha = 90^\circ$) 大范围的分支屈曲临界值, 绘制了临界特征值曲线、荷载强度曲线和临界应力曲线, 填补了壳体稳定研究中又一个明显的空白。经过对圆柱壳、球壳、圆锥壳三种壳体扭转屈曲研究的比较, 表明所得结果具有较好的理论与实用价值。

1 屈曲分支方程

球壳承受较小荷载作用时, 处于唯一的薄膜平衡状态 I, 并保持稳定变形; 当荷载增大至临界值, 只要有任意微小的扰动, 球壳将进入不同分支的某个相邻的微弯扭平衡状态 II, 并屈曲成波纹形。在分支点足够小的邻域内分析, 可设两种状态下的内力分别为 N_j^0 和 $N_j^0 + N_j$, Q_i , M_j ; 状态 II 位移的微小增量为 u_i , 应变的微小增量为 ξ_j (图 1)。

* 收稿日期: 1997_11_17; 修订日期: 1998_09_22

作者简介: 张音翼(1944~), 男, 教授, 硕士。

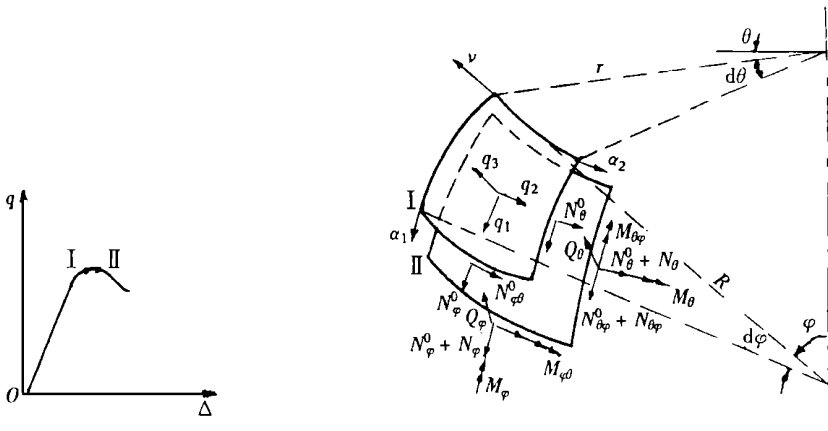


图 1 球壳的分支点屈曲

利用曲面微分几何论证,可同时给出变形微元中面的微小应变量 ϵ_{ij} 和各侧面的微小旋转量

$$\frac{1}{R} \left[K_1(\varphi) u_i + K_2(\varphi) \frac{\partial u_i}{\partial \beta_j} + K_3(\varphi) \frac{\partial^2 u_i}{\partial \beta_j \partial \beta_k} \right] d\beta_j,$$

参量 β_j 代表主坐标 φ 与 θ 。按此初始屈曲的几何状态来描述,就能推演出球壳屈曲分支方程

$$\begin{aligned} & R \sin \varphi \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + R \cos \varphi (N_\varphi - N_\theta) + R \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \sin \varphi \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + \cos \varphi (M_\varphi - M_\theta) + \frac{\partial M_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \\ & \frac{\partial N_\varphi^0}{\partial \varphi} \left[\cos \varphi u + \frac{\partial v}{\partial \theta} + \sin \varphi w + N_\varphi^0 \left(\cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \sin \varphi u + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial \theta} + \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial \theta} + \cos \varphi w + \right. \right. \\ & \left. \left. N_\theta^0 \left[\operatorname{cosec} \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \sin \varphi u - \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial \theta} - \cot \varphi \frac{\partial v}{\partial \theta} - \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \cos \varphi w \right] + \right. \right. \\ & \left. \frac{\partial N_{\varphi\theta}^0}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} + w + N_{\varphi\theta}^0 \left[2 \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial \theta} - \cot \varphi \frac{\partial u}{\partial \theta} - \sin \varphi \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \cos \varphi \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \operatorname{cosec} \varphi v + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + q_1 R \left(\sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \cos \varphi u + \frac{\partial v}{\partial \theta} + 2 \sin \varphi w = 0, \right. \right. \end{aligned} \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} & R \sin \varphi \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + 2R \cos \varphi N_{\varphi\theta} + R \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \sin \varphi \frac{\partial M_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + 2 \cos \varphi M_{\varphi\theta} + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{\varphi\theta}^0}{\partial \varphi} \times \\ & \left[\cos \varphi u + \frac{\partial v}{\partial \theta} + \sin \varphi w + N_\varphi^0 \left(- \operatorname{cosec} \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + 2 \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} - 2 \sin \varphi u + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial \theta} + \right. \right. \\ & \left. \left. \cot \varphi \frac{\partial v}{\partial \theta} + 2 \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial \varphi} + 2 \cos \varphi w \right) + N_\theta^0 \left(- \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial \theta} + \cot \varphi \frac{\partial u}{\partial \theta} + \sin \varphi \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. \cos \varphi \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \operatorname{cosec} \varphi v \right) + \frac{\partial N_{\varphi\theta}^0}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \right) + N_{\varphi\theta}^0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \right. \\ & \left. q_2 R \left(\sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \cos \varphi u + \frac{\partial v}{\partial \theta} + 2 \sin \varphi w \right) = 0, \right. \end{aligned} \quad (1b)$$

$$\begin{aligned} & \sin \varphi \frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial \varphi^2} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} (2M_\varphi - M_\theta) + \operatorname{cosec} \varphi \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} + (\cos \varphi \cot \varphi - \operatorname{cosec} \varphi) \times \\ & (M_\varphi - M_\theta) + 2 \frac{\partial^2 M_{\varphi\theta}}{\partial \varphi \partial \theta} + 2 \cot \varphi \frac{\partial M_{\varphi\theta}}{\partial \theta} - R \sin \varphi (N_\varphi + N_\theta) - \end{aligned}$$

$$N_\varphi^0 \left[\sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \cos \varphi u + \frac{\partial v}{\partial \theta} - N_\theta^0 \left[\sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \cos \varphi u + \frac{\partial v}{\partial \theta} - \operatorname{cosec} \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \right.$$

$$\left. \cos \varphi \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \sin \varphi w \right) - N_{\varphi 0}^0 \left(2 \sin \varphi \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \cos \varphi v - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial \theta} + \cot \varphi \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + q_3 R (\sin \varphi \partial u / \partial \varphi + \cos \varphi u + \partial v / \partial \theta + 2 \sin \varphi w) = 0 \quad (1c)$$

经过与现有各种柔韧球壳稳定方程的仔细比较,可知这是一组全新的精确的完备方程组。其明显优点是,无荷载约束形式的限制,有清晰的内力变形关系,利于完善结构的的整体分析和精确计算^[1-3,9]。

2 环向剪切屈曲

球壳下端铰支,球面作用着环向分布剪切力,对任意张角 α ,沿子午线呈正弦分布,如图 2 所示。

$$q_1 = 0, \quad q_2 = \tau_0 \sin \frac{\pi \varphi}{\alpha}, \quad q_3 = 0 \quad (2)$$

当扭转力使球壳进入临界平衡状态,可以计算出壳体内力

$$N_{\varphi}^0 = 0, \quad N_{\theta}^0 = 0, \quad (3a, b)$$

$$N_{\varphi 0}^0 = - \frac{\tau_0 R}{2 + \pi/\alpha} \operatorname{cosec}^2 \varphi \left\{ - \sin^2 \varphi \cos \frac{\pi \varphi}{\alpha} + \frac{\alpha}{\pi} \left[1 - e \cos \frac{\pi \varphi}{\alpha} + \frac{1}{2 - \pi/\alpha} \left[1 - \cos \left(2 - \frac{\pi}{\alpha} \right) \varphi \right] \right] \right\} \cdot \partial \quad (3c)$$

初始屈曲应满足边界约束条件

$$(u, v, w)_{\varphi=\alpha} = 0, \quad (M_{\varphi})_{\varphi=\alpha} = 0 \quad (4)$$

几何方程

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\varphi} &= \partial u / R \partial \varphi + w / R, \quad \varepsilon_{\theta} = \cot \varphi \frac{u}{R} + \operatorname{cosec} \varphi \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w}{R}, \\ \varepsilon_{\varphi 0} &= \operatorname{cosec} \varphi \frac{\partial u}{R \partial \theta} + \frac{\partial v}{R \partial \varphi} - \cot \varphi \frac{v}{R}; \\ x_{\varphi} &= - \partial^2 w / R^2 \partial \varphi^2, \\ x_{\theta} &= - \cot \varphi \frac{\partial w}{R^2 \partial \varphi} - \operatorname{cosec}^2 \varphi \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2}, \\ x_{\varphi 0} &= - \operatorname{cosec} \varphi \partial^2 w / R^2 \partial \varphi \partial \theta + \cot \varphi \operatorname{cosec} \varphi \partial w / R^2 \partial \theta \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

与弹性方程

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi} &= C(\varepsilon_{\varphi} + \mu \varepsilon_{\theta}), \quad M_{\varphi} = D(x_{\varphi} + \mu x_{\theta}), \\ N_{\theta} &= C(\varepsilon_{\theta} + \mu \varepsilon_{\varphi}), \quad M_{\theta} = D(x_{\theta} + \mu x_{\varphi}), \\ N_{\varphi 0} &= \frac{1 - \mu}{2} C \varepsilon_{\varphi 0}, \quad M_{\varphi 0} = (1 - \mu) D x_{\varphi 0}, \\ C &= Et / (1 - \mu^2), \quad D = Et^3 / 12(1 - \mu^2). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

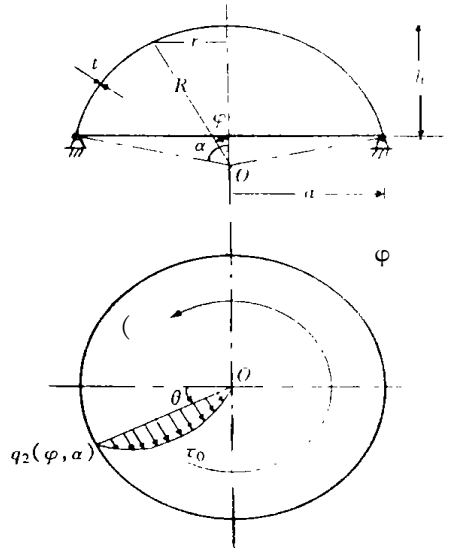


图 2 承受环向剪切力的球壳

引进量纲一的参量

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{u}{t}, u_2 = \frac{v}{t}, u_3 = \frac{w}{t}, \xi = \frac{\pi}{\alpha}, \nu = 8\pi^4 \frac{h}{a} \sqrt{\frac{t}{R}}, \\ f &= \frac{(1-\mu)\tau_0 R}{2(2+\xi)Gt}, g = \frac{t^2}{aR}, Q_{cr} = \left(\frac{R}{\pi t}\right)^2 \frac{\tau_0}{2(1+\mu)G}, \delta = 4 \frac{\tau_0}{\tau_k}, \\ T_s &= (1-\mu) \sqrt{\frac{R}{t}} \frac{\tau_\alpha}{G}, T_\alpha = 24(1-\mu^2) \sqrt{\xi} \frac{\tau_\alpha}{G}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中, G 、 μ 、 τ_0 、 τ_α 分别为剪切弹性模量、泊松比、屈曲荷载强度和临界应力; ν 是壳体参数。

根据稳定能量准则, 理想的屈曲模式满足约束条件, 最接近分支点变形状态, 并且使所得屈曲临界值为最小。这种模式可以用三角函数来构造。

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= A_{1n} (\sin \varphi - \sin \alpha) \sin \varphi \sin n\theta, \\ u_2 &= A_{2n} (\cos \varphi - \cos \alpha) \sin \varphi \cos n\theta, \\ u_3 &= A_{3n} (\sin \varphi - \sin \alpha) \sin \varphi \sin n\theta, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

屈曲模态数 n 依赖于壳体参数 ν , 反映了模态特征。

将(2)~(8)式代入分支方程(1), 得到扭转屈曲位移型控制方程

$$F_i(\varphi, \theta, n, \alpha, \nu, A_{jn}) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (9)$$

应用 Galerkin 变分法

$$R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha F_i \delta u_i \sin \varphi d\varphi d\theta = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (10)$$

对于未知的系数 $\{A_{jn}\}$, 给出齐次方程

$$[K_{ij}] \{A_{in}\} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (11)$$

式中, $[K_{ij}]$ 是个计算量很大的矩阵。

球壳在分支点变形状态下维持平衡的必要条件是存在 $\{A_{in}\} \neq \{0\}$ 的有效解。于是, 由特征方程

$$\det[K_{ij}] = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (12)$$

解出临界特征值 f_{cr} , 对于任一壳体参数 ν , 即获得相应的扭转屈曲荷载强度 τ_0 和临界应力 τ_{cr} 。

3. 数值结果

球壳的几何参数 ν 于比值 R/t 变化在 125 ~ 2850 之间, 张角 α 变化在 $10^\circ \sim 90^\circ$ 之间取值。壳体用现代轻质高强度材料制作, 取剪切模量 $G = 26.92 \times 10^3 \text{MPa}$, 泊松比 $\mu = 0.3$ 。计算相当复杂, 含项极多, 且各步序多重交错, 但因为有良好的规律性, 给出的结果精确而令人满意。

图3是临界特征值曲线。对于任一张角 α , 随几何参数 ν 的增大, 临界特征值 f_{cr} 数据整齐, 曲线光滑上升, 屈曲模态数 n_{cr} 也随 ν 的增大而增大, 并且扁壳与半球壳差别很大。此图实际上为工程应用划出了一个有效范围。

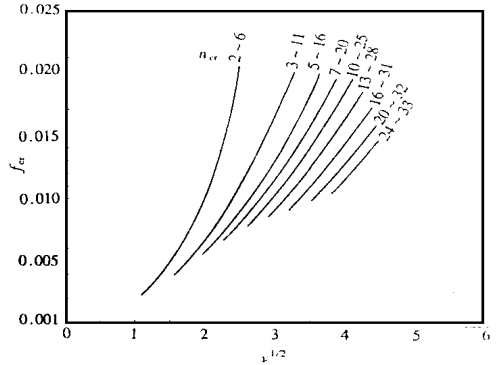


图3 临界特征值曲线

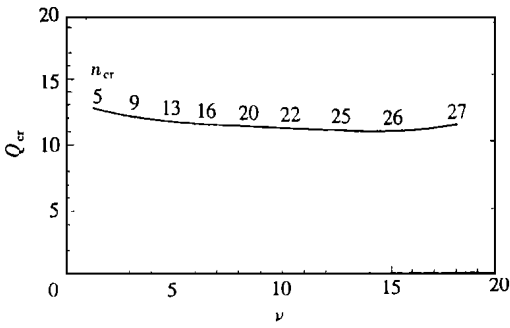


图4 屈曲荷载强度曲线

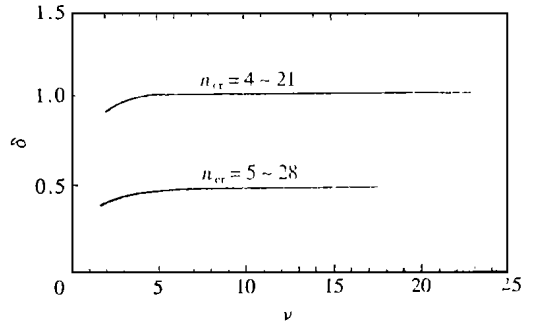


图5 荷载强度相对值曲线

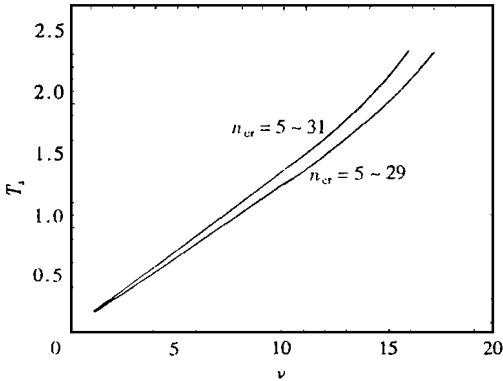


图6 临界应力 \$T_s\$ 曲线

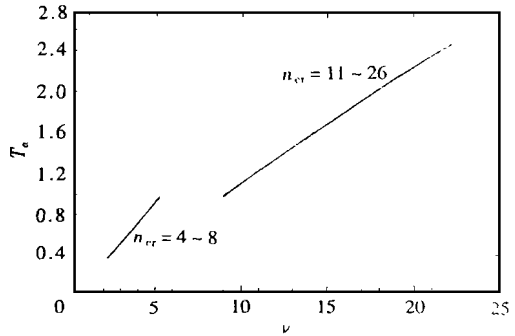


图7 临界应力 \$T_a\$ 曲线

图4所示为屈曲荷载强度 Q_{cr} 对壳体参数 ν 的关系曲线。随着参数 ν 的增大, 荷载强度缓慢下降, 从最大值 $Q_{cr} = 12.5751$ 降到最小值 $Q_{cr} = 10.7492$, 而后稍有回升, 全区域的变化很小。临界模态数 n_{cr} 随 ν 的增大而快速增大。

图5绘制了荷载强度相对值 δ 曲线。其中 τ_k 代表屈曲模态数为 $n_{cr} = 3 \sim 14$ 的一组荷载强度。可以看出, 曲线几乎平行横轴 ν , 荷载强度 τ_0 的变化基本上是稳定的。

图6绘制了临界应力 T_s 曲线。很清楚, 在达到半球壳之前, 上升的曲线更陡了, 并且, 由于几何参数的取值接近, 两组分支屈曲的临界应力值也很接近。

取值相距较远的两组分支屈曲绘于图7之中, 较短的曲线代表扁壳, 较长的曲线代表深壳 ($30^\circ < \alpha \leq 90^\circ$)。随参数 ν 的增大, 无论是临界应力值还是临界应力增值, 深壳都比扁壳大得多。

所有这些计算未作任何简化, 给出的结果都是正常的, 比较理想的。这说明本文导出的屈曲分支方程是正确的、精确的、整体稳定分析应当依据精确方程。

最后, 将圆柱壳、球壳、圆锥壳的扭转屈曲作一比较^[4,6,7,8], 可以发现: (1) 每种壳中的临界应力均随壳体参数 (t/l , α , t/l) 或者 (t/R , t/R , $\pi/2 - \alpha$) 的增大而增大。(2) 稳定承载能力是深壳比扁壳大, 而球壳和圆锥壳比圆柱壳大。

参 考 文 献

- [1] Timoshenko S P, Gere J M. 弹性稳定理论, 第二版[M]. 张福范译. 北京: 科学出版社, 1965.
- [2] 卢文达. 柔韧板与柔韧壳[M]. 卢文达, 黄择言, 卢鼎霍译. 北京: 科学出版社, 1963.
- [3] 黄克智, 夏之熙, 薛明德, 等. 板壳理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 1987.
- [4] Donnell L H. Stability of Thin Walled Tubes under Torsion[R]. NACA Rep, No 479, 1933.
- [5] Simitse G J, Shaw D, Sheinman I. Imperfection sensitivity of laminated cylindrical shells in torsion and axial compression[J]. Composite Structures, 1985, 4: 335~ 360.
- [6] Yamaki N. Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells [M]. Amsterdam: North_Holland Publishing Co, 1984.
- [7] 王德禹, 马宏伟, 杨桂通. 弹性圆柱壳扭转屈曲研究[J]. 应用数学和力学, 1992, 13(3): 193~ 197.
- [8] 张音翼. 锥壳的扭转屈曲[J]. 南昌大学学报, 1998, 20(1): 40~ 43, 79.
- [9] 李忱, 黄执中. 任意形状薄壳的弹性稳定性方程[J]. 上海力学, 1995, 14(3): 74~ 81.
- [10] Chien Weizang, Hu Haichang. On the snapping of a thin spherical cap [A]. In: Proceedings of the 9th International Congress of Applied Mechanics [C]. Brussels, Belgium, 1956.
- [11] Scheidl R, Troger H. On the buckling and postbuckling of spherical shells [A]. In: EL Axeira d, F A Emmerling, Eds. Flexible Shells, Theory and Applications [C], New York: Springer_Verlag, 1984.
- [12] 叶开沅, 刘平. 复合载荷下圆底扁球壳非线性稳定性[J]. 应用数学和力学, 1991, 12(1): 11~ 17.
- [13] 中国力学学会, 中国科学院力学研究所 LNM 开放实验室. 材料和结构的不稳定性[M]. 北京: 科学出版社, 1993.
- [14] 王虎, 王俊奎. 复合材料三角形网格加筋圆锥壳体位移型稳定性方程及其总体稳定性分析[J]. 应用数学和力学, 1991, 12(4): 359~ 368.
- [15] 张音翼. 锥壳的风型荷载屈曲[A]. 见: 程昌钧, 戴世强, 刘宇陆主编. 现代数学和力学(MMM_VII) [C]. 上海: 上海大学出版社, 1997.

Torsional Buckling of Spherical Shells Under Circumferential Shear Loads

Zhang Yinyi

(Institute of Engineering Mechanics, Nanchang University, Nanchang 330029, P R China)

Abstract: By the aid of differential geometry analysis on the initial buckling of shell element, a set of new and exact buckling bifurcation equations of the spherical shells is derived. Making use of Galerkin variational method, the general stability of the hinged spherical shells with the circumferential shear loads is studied. Constructing the buckling mode close to the bifurcation point deformations, the critical eigenvalues, load intensities and critical stresses of torsional buckling ranging from the shallow shells to the hemispherical shell are obtained for the first time.

Key words: spherical shell; buckling bifurcation equation; circumferential shear load; eigenvalue; buckling critical value