应用数学和力学,第 20 卷 第 3 期(1999 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

论文编号: 1000_0887(1999)03_0249_55

饱和多孔介质耦合系统的变分原理*

石志飞, 黄淑萍, 章梓茂

北方交通大学 土建学院, 北京 100044

(钱伟长推荐)

摘要: 本文采用变积方法, 建立了等温准静态下饱和多孔介质的六类变量的广义变分原理• 在此基础上, 通过引入约束条件得到各级变分原理, 其中包括五类变量, 四类变量, 三类变量和二类变量的变分原理• 除得到文献中已有的变分原理外, 本文给出了许多新的变分原理, 为建立饱和多孔介质的有限元模型提供了基础•

关键词: 饱和多孔介质; 变积方法; 变分原理; 广义变分原理
分类号: O176, O333 文献标识码: A

引 言

对于饱和多孔介质的研究在工程中有广泛的应用• 例如地下资源的开发利用, 地层探索等• 1941 年 Biot 首先建立了等温准静态下饱和多孔介质的控制微分方程[1], 1956 年, 他又建立了饱和多孔介质的动力学方程[2]• 此后, 对多孔介质的研究更加深入• 然而, 有了多孔介质的理论框架, 却很难得到问题的解析解, 因此, 一般采用数值解法, 特别是有限元解法•

基于变分原理的有限元法得到了广泛应用• Ghabossi[3] 在 Biot 方程的基础上导出了变分公式并建立了有限元模型• Sandhu[4,5] 给出了饱和多孔介质动力问题的变分原理的某些形式• 从等温准静态下饱和多孔介质的基本方程出发, 采用变积方法, 本文在第三节首先建立了六类变量的广义变分原理• 在此基础上, 通过引入约束条件得到各级变分原理, 其中包括五类变量, 四类变量, 三类变量, 二类变量的变分原理• 除得到文献中已有的变分原理外, 本文给出了许多新的变分原理, 为建立饱和多孔介质的有限元模型提供了基础•

1 基本方程和定解条件

对于体积为 V, 表面积为 S 的饱和多孔介质耦合系统, 在等温、准静态下其基本方程及定解条件为:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),$$

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0,$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij} - \frac{\gamma}{1+\gamma}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{3H}p\,\delta_{ij}\right.,$$

* 收稿日期: 1998_06_30
作者简介: 石志飞(1965~), 男, 教授, 发表论文 30 余篇

$$\theta = \frac{1}{3H}\sigma_{kk} + \frac{1}{R}p,$$

或 $$\sigma_{ij} = -\lambda p\delta_{ij} + H_{ijkl}\varepsilon_{kl},$$

$$\theta = \lambda\varepsilon_{kk} + \frac{1}{Q}p,$$

$$v_i = -k(p_{,i} + f_i),$$

$$v_{i,i} = -\dot{\theta}.$$

边界条件: $u_i = u_i^*$,

$$\sigma_{ij}n_j = p_i^*,$$

$$v_i n_i = v_n^*,$$

$$p = p^*.$$

初始条件: $t = 0^+$, $\theta(x_1, x_2, x_3, 0^+) = 0$.

上述各式中, u_i, ε_{ij}, σ_{ij} 分别为多孔介质骨架的位移、应变和应力, p 为孔隙水压, θ 为因孔隙体积变化引起的流体含量变化, v_i 为流体流速.

u_i^*, p_i^* 分别为位移边界 S_u 上给定的位移和力边界 S_σ 上给定的力; v_n^* 和 p^* 分别为相应流速边界 S_v 和孔压边界 S_p 上给定流速和孔压. F_i 和 f_i 分别为介质和流体的单位体力; μ 和 γ 分别为介质的剪切模量和泊松比, k 为渗透系数, H、R 为材料常数.

其中

$$\lambda = \frac{2\mu(1+\gamma)}{3H(1-2\gamma)}, \quad \frac{1}{Q} = \frac{1}{R} - \frac{\lambda}{H}, \quad H_{ijkl} = 2\mu\left(\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{\gamma}{1+\gamma}\delta_{ij}\delta_{kl}\right).$$

表面 S 满足关系

$$S_u + S_\sigma = S_p + S_v = S.$$

对上述基本方程及定解条件进行 Laplace 变换, 并对个别方程进行变形, 得到以下形式:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{在 } V \text{ 上}), \tag{1}$$

$$u_i = u_i^* \quad (\text{在 } S_u \text{ 上}), \tag{2}$$

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (\text{在 } V \text{ 上}), \tag{3}$$

$$\sigma_{ij}n_j = P_i^* \quad (\text{在 } S_\sigma \text{ 上}), \tag{4}$$

$$\sigma_{ij} = -\lambda p\delta_{ij} + H_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (\text{在 } V \text{ 上}), \tag{5}$$

$$\frac{1}{l}v_{i,i} + \lambda\varepsilon_{kk} + \frac{1}{Q}p = 0 \quad (\text{在 } V \text{ 上}), \tag{6}$$

或 $$\varepsilon_{ij} = -\beta p\delta_{ij} + C_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (\text{在 } V \text{ 上}), \tag{5*}$$

$$\frac{1}{l}v_{i,i} + \beta\varepsilon_{kk} + \frac{1}{R}p = 0 \quad (\text{在 } V \text{ 上}), \tag{6*}$$

$$v_i = -k(g_i + f_i) \quad (\text{在 } V \text{ 上}), \tag{7}$$

$$g_i = p_{,i} \quad (\text{在 } V \text{ 上}), \tag{8}$$

$$p = p^* \quad (\text{在 } S_p \text{ 上}), \tag{9}$$

$$v_i n_i = v_n^* \quad (\text{在 } S_v \text{ 上}), \tag{10}$$

其中 ε_{ij} 表示 ε_{ij} 的象函数, 其余类同. l 为 Laplace 变换参数.

2 六类变量广义变分原理

采用文[8, 9]的变积分法, 对方程(1)~(10)做变积运算:

$$\begin{aligned}\int_0^{\Pi_6}\delta\Pi_6 = {} & \int_0^{\sigma_{ij}}\int_V(u_{i,j}-\varepsilon_{ij})\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}V - \int_0^{u_i}\int_V(\sigma_{ij,j}-F_i)\delta u_i\mathrm{d}S - \\ = {} & \int_0^{p}\int_V\left(\frac{1}{l}v_{i,i}+\lambda\varepsilon_{kk}+\frac{1}{Q}p\right)\delta p\,\mathrm{d}V + \int_0^{\varepsilon_{ij}}\int_V(-\sigma_{ij}-\lambda p\delta_{ij}+H_{ijkl}\varepsilon_{kl})\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V - \\ & \int_0^{g_i}\int_V\frac{1}{l}(v_i+kg_i+kf_i)\delta g_i\mathrm{d}V + \int_0^{v_i}\int_V\frac{1}{l}(p_{,i}-g_i)\delta v_i\mathrm{d}V - \\ & \int_0^{\sigma_{ij}}\int_{S_u}(u_i-u_i^*)\delta\sigma_{ij}n_j\mathrm{d}S + \int_0^{u_i}\int_{S_\sigma}(\sigma_{ij}n_j-p_i^*)\delta u_i\mathrm{d}S + \\ & \int_0^{p}\int_{S_v}\frac{1}{l}(v_in_i-v_n^*)\delta p\,\mathrm{d}S - \int_0^{v_i}\int_{S_p}\frac{1}{l}(p-p^*)\delta V_in_i\mathrm{d}S\cdot\end{aligned}$$

在上式中对 $\sigma_{ij,j}\delta u_i$ 和$v_{i,i}\delta p$ 分部积分, 上式可化为:

$$\begin{aligned}\int_0^{\Pi_6}\delta\Pi_6 = {} & \left[\int_0^{\sigma_{ij}}\int_V u_{i,j}\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}V + \int_0^{u_i}\int_V\sigma_{ij}\delta u_{i,j}\mathrm{d}V\right] - \left[\int_0^{\sigma_{ij}}\int_V\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}V + \int_0^{\varepsilon_{ij}}\int_V\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V\right] - \\ & \int_0^{u_{ij}}\int_V F_i\delta u_i\mathrm{d}V + \int_0^{\varepsilon_{ij}}\int_V H_{ijkl}\varepsilon_{kl}\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V - \left[\int_0^{\varepsilon_{ij}}\int_V\lambda p\,\delta\varepsilon_{kk}\mathrm{d}V + \int_0^{p}\int_V\lambda\varepsilon_{kk}\delta p\,\mathrm{d}V\right] + (\\ & \left[\int_0^{p}\int_V\frac{1}{l}v_i\delta p_{,i}\mathrm{d}V + \int_0^{v_i}\int_V\frac{1}{l}p_{,i}\delta v_i\mathrm{d}V\right] - \left[\int_0^{g_i}\int_V\frac{1}{l}v_i\delta g_i\mathrm{d}V + \int_0^{v_i}\int_V\frac{1}{l}g_i\delta v_i\mathrm{d}V\right] - \\ & \int_0^{g_i}\int_V\frac{k}{l}g_i\delta g_i\mathrm{d}V - \int_0^{g_i}\int_V\frac{k}{l}f_i\delta g_i\mathrm{d}V - \int_0^{p}\int_V\frac{1}{Q}p\,\delta p\,\mathrm{d}V - \int_0^{u_i}\int_{S_\sigma}p_i^*\delta u_i\mathrm{d}S - \\ & \left[\int_0^{\sigma_{ij}}\int_{S_\sigma}(u_i-u_i^*)\delta\sigma_{ij}n_j\mathrm{d}S + \int_0^{\sigma_j}\int_{S_u}\sigma_{ij}n_j\delta(u-u_i^*)\mathrm{d}S\right. - \\ & \int_0^{p}\int_{S_V}\frac{1}{l}v_n^*\delta p\,\mathrm{d}S - \left[\int_0^{V_i}\int_{S_p}\frac{1}{l}(p-p^*)\delta v_in_i\mathrm{d}S + \int_0^{p}\int_{S_p}\frac{1}{l}v_in_i\delta(p-p^*)\mathrm{d}S\right],\end{aligned}$$

变积得:

$$\begin{aligned}\Pi_6 = {} & \int_V\left\{\frac{1}{2}H_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} + \sigma_{ij}\left[\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right] - F_iu_i - \lambda p\varepsilon_{kk} - \frac{k}{2l}g_ig_i - \frac{1}{2Q}p^2 - \right. \\ & \left.\frac{1}{l}v_i(g_i-p_{,i}) - \frac{k}{l}f_ig_i\right\}\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma}p_i^*u_i\mathrm{d}S - \int_{S_V}\frac{1}{l}v_n^*p\,\mathrm{d}S - \\ & \int_{S_u}\sigma_{ij}n_j(u_i-u_i^*)\mathrm{d}S - \int_{S_p}\frac{1}{l}v_in_i(p-p^*)\mathrm{d}S\cdot\end{aligned}$$

如果对 $u_{i,j}\delta\sigma_{ij}$ 和$p_{,i}\delta v_i$ 分部积分, 可得到:

$$\begin{aligned}\Gamma_6 = {} & \int_V\left(-\frac{1}{2}H_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + u_i\sigma_{ij,j} + F_iu_i + \lambda p\varepsilon_{kk} + \frac{k}{2l}g_ig_i + \frac{1}{l}v_ig_i + \right. \\ & \left.\frac{k}{l}f_ig_i + \frac{1}{2Q}p^2 + \frac{1}{l}v_{i,i}p\right)\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma}(\sigma_{ij}n_j-p_i^*)u_i\mathrm{d}S - \int_{S_u}\sigma_{ij}n_ju_i^*\mathrm{d}S - \\ & \int_{S_p}\frac{1}{l}p^*v_in_i\mathrm{d}S - \int_{S_V}\frac{1}{l}(v_in_i-v_n^*)p\,\mathrm{d}S\cdot\end{aligned}$$

如果对 $\sigma_{ij,j}\delta u_i$ 和$p_{,i}\delta v_i$ 分别积分, 可得到:

$$\begin{aligned}\Pi_6' = {} & \int_V\left\{\frac{1}{2}H_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} - \sigma_{ij}\left[\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right] - F_iu_i - \lambda p\varepsilon_{kk} - \frac{1}{l}v_ig_i - \frac{k}{2l}g_ig_i - \right. \\ & \left.\frac{k}{l}f_ig_i - \frac{1}{2Q}p^2 - \frac{1}{l}v_{i,i}p\right\}\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma}p_i^*u_i\mathrm{d}V - \int_{S_u}\sigma_{ij}n_j(u_i-u_i^*)\mathrm{d}S + \\ & \int_{S_p}\frac{1}{l}p^*v_in_i\mathrm{d}S + \int_{S_V}\frac{1}{l}(v_in_i-v_n^*)p\,\mathrm{d}S\cdot\end{aligned}$$

如果对 $u_{i,j}\,\delta\sigma_{ij}$ 和 $v_{i,i}\,\delta p$ 分部积分, 可得到:

$$\Gamma_6' = \int_V\Big(-\frac{1}{2}H_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + u_i\sigma_{ij,j} + F_iu_i + \lambda p\varepsilon_{kk} + \frac{k}{2l}g_ig_i + \frac{1}{l}v_i(g_i - p_{,i}) + \frac{1}{2Q}p^2 + \frac{k}{l}f_ig_i\Big)\mathrm{d}V - \int_{S_u}u_i^*\sigma_{ij}n_j\mathrm{d}S - \int_{S_\sigma}(\sigma_{ij}n_j - p_i^*)u_i\mathrm{d}S + \int_{S_p}\frac{1}{l}(p - p^*)v_in_i\mathrm{d}S + \int_{S_V}\frac{1}{l}v_n^*p\,\mathrm{d}S .$$

Π_6, Γ_6, Π_6', Γ_6' 均无任何约束条件, 是关于 σ_{ij}, ε_{ij}, u_i, v_i, p, g_i 六类独立变量的广义变分原理的泛函, 且满足互补关系 $\Pi_6 + \Gamma_6 = 0$ 及 $\Pi_6' + \Gamma_6' = 0$

其中 Π_6, Γ_6 分别为H_W 原理[6,7] 相对应的广义势能和广义余能变分原理的泛函; Π_6', Γ_6' 分别为势、余能耦合变分原理的泛函.

3 各级变分原理

3.1 五类变量的变分原理

1) 将(5)式代入 Π_6 中, 消去 σ_{ij}, 并令 u_i 满足(2) 式, 则由 Π_6 可得

$$\Pi_{51}(\varepsilon_{ij}, u_i, p, g_i, v_i) = \int_V\Big[-\frac{1}{2}H_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} - \lambda pu_{k,k} + H_{ijkl}u_{i,j}\varepsilon_{kl} - F_iu_i - \frac{k}{2l}g_ig_i - \frac{1}{l}v_i(g_i - p_{,i}) - \frac{1}{2Q}p^2 - \frac{k}{l}f_ig_i\Big]\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma}p_i^*u_i\mathrm{d}S - \int_{S_V}\frac{1}{l}v_n^*p\,\mathrm{d}S,$$

Π_{51} 具有补充条件(5), 先决条件(2).

若将(5)式代入 Π_6' 中, 消去 σ_{ij}, 并令 u_i 满足(2) 式, 则由 Π_6' 可得:

$$\Pi_{51}' = \int_V\Big[-\frac{1}{2}H_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} - \lambda pu_{k,k} + H_{ijkl}\varepsilon_{kl}u_{i,j} - F_iu_i - \frac{1}{l}v_ig_i - \frac{k}{2l}g_ig_i - \frac{k}{l}f_ig_i - \frac{1}{2Q}p^2 - \frac{1}{l}v_{i,i}p\Big]\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma}p_i^*u_i\mathrm{d}S + \int_{S_p}\frac{1}{l}p^*v_in_i\mathrm{d}S + \int_{S_v}\frac{1}{l}(v_in_i - v_n^*)p\,\mathrm{d}S,$$

Π_{51}' 具有补充条件(5), 先决条件(2).

2) 将(7)式代入 Π_6 中, 消去 v_i, 并令 p 满足(9) 式, 则由 Π_6 可得

$$\Pi_{52}(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, u_i, p, g_i) = \int_V\Big\{\frac{1}{2}H_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} - \sigma_{ij}\Big[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})\Big] - F_iu_i - \lambda p\varepsilon_{kk} - \frac{k}{l}g_ip_{,i} - \frac{k}{l}f_ip_{,i} - \frac{1}{2Q}p^2 + \frac{k}{2l}g_ig_i\Big\}\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma}p_i^*u_i\mathrm{d}S - \int_{S_V}\frac{1}{l}v_n^*p\,\mathrm{d}S - \int_{S_u}\sigma_{ij}n_j(u_i - u_i^*)\mathrm{d}S .$$

若将(7)式代入 Γ_6 中, 消去 v_i, 并令 p 满足(9) 式, 则由 Γ_6 可得

$$\Gamma_{52}(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, u_i, p, g_i) = \int_V\Big(-\frac{1}{2}H_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + u_i\sigma_{ij,j} + F_iu_i + \lambda p\varepsilon_{kk} - \frac{k}{2l}g_ig_i + \frac{1}{2Q}p^2 + \frac{k}{l}f_ip_{,i} + \frac{k}{l}g_ip_{,i}\Big]\mathrm{d}V - \int_{S_u}u_i^*\sigma_{ij}n_j\mathrm{d}S -$$

$$\int_{S_\sigma}(\sigma_{ij}n_j - p_i^*)u_i\mathrm{d}S + \int_{S_V}\frac{1}{l}v_n^* p\,\mathrm{d}S,$$

Π_{52}, Γ_{52} 具有补充条件(7), 先决条件(9), 且 Π_{52} 与 Γ_{52} 满足互补关系:

$$\Pi_{52} + \Gamma_{52} = 0.$$

3) 在 Γ_6 中满足(3)(4) 式, 可得到

$$\Gamma_{53}(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, p, g_i, v_i) = \int_V\Big[\frac{1}{2}H_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - \alpha p\varepsilon_{kk} - \frac{k}{2l}g_i g_i - \frac{1}{l}v_i(g_i - p_{,i}) - \frac{1}{2Q}p^2 - \frac{k}{l}f_i g_i\Big]\mathrm{d}V + \int_{S_u}\sigma_{ij}n_j u_i^*\,\mathrm{d}S - \int_{S_V}\frac{1}{l}v_n^* p\,\mathrm{d}S - \int_{S_p}\frac{1}{l}(p - p^*)v_i n_i\mathrm{d}S.$$

若在 Γ_6' 中满足(3)(4) 式, 可得到

$$\Gamma_{53}'(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, p, g_i, v_i) = \int_V\Big[\frac{1}{2}H_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - \alpha p\varepsilon_{kk} - \frac{k}{2l}g_i g_i - \frac{1}{l}v_i g_i - \frac{k}{l}f_i g_i - \frac{1}{2Q}p^2 - \frac{1}{l}v_{i,i}p\Big]\mathrm{d}V + \int_{S_u}\sigma_{ij}n_j u_i^*\,\mathrm{d}S + \int_{S_p}\frac{1}{l}p^* v_i n_i\mathrm{d}S + \int_{S_V}\frac{1}{l}(v_i n_i - v_n^*)p\,\mathrm{d}S.$$

Γ_{53}, Γ_{53}' 具有先决条件(3)、(4).

3.2 四类变量的变分原理

1) 将(1)式代入 Π_{51} 中, 消去 ε_{ij}, 则由 Π_{51} 可得

$$\Pi_{41}(u_i, p, g_i, v_i) = \int_V\Big[\frac{1}{2}H_{ijkl}u_{k,l}u_{i,j} - F_i u_i - \alpha p u_{k,k} - \frac{k}{2l}g_i g_i - \frac{k}{l}f_i g_i - \frac{1}{l}v_i(g_i - p_{,i}) - \frac{1}{2Q}p^2\Big]\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma}p_i^* u_i\mathrm{d}S - \int_{S_v}\frac{1}{l}v_n^* p\,\mathrm{d}S - \int_{S_p}\frac{1}{l}v_i n_i(p - p^*)\mathrm{d}S.$$

若将(1)式代入 Π_{51}' 中, 消去 ε_{ij}, 则由 Π_{51}' 可得

$$\Pi_{41}'(u_i, p, g_i, v_i) = \int_V\Big[\frac{1}{2}H_{ijkl}u_{k,l}u_{i,j} - F_i u_i - \alpha p u_{kk} - \frac{k}{2l}g_i g_i - \frac{k}{l}f_i g_i - \frac{1}{2Q}p^2 - \frac{1}{l}v_{i,i}p\Big]\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma}p_i^* u_i\mathrm{d}S + \int_{S_p}\frac{1}{l}p^* v_i n_i\mathrm{d}S + \int_{S_v}\frac{1}{l}(v_i n_i - v_n^*)p\,\mathrm{d}S.$$

Π_{41}, Π_{41}' 具有补充条件(1)、(5), 先决条件(2).

2) 将(8)式代入 Π_{52} 中, 消去 g_i, 则由 Π_{52} 可得

$$\Pi_{42}(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i, p) = \int_V\Big\{\frac{1}{2}H_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} - \sigma_{ij}\Big[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\Big] - F_i u_i - \alpha p\varepsilon_{kk} - \frac{k}{2l}p_{,i}p_{,i} - \frac{k}{l}f_i p_{,i} - \frac{1}{2Q}p^2\Big\}\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma}p_i^* u_i\mathrm{d}S - \int_{S_u}\sigma_{ij}n_j(u_i - u_i^*)\mathrm{d}S - \int_{S_V}\frac{1}{l}v_n^* p\,\mathrm{d}S.$$

若将(8)式代入 Γ_{52} 中, 消去 g_i, 则由 Γ_{52} 可得

$$\Gamma_{42}(\sigma_{ij},\varepsilon_{ij},u_i,p_i)=\int_V\Big\{-\frac{1}{2}H_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}+\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}+u_i\sigma_{ij,j}+F_iu_i+\lambda p\varepsilon_{kk}+\frac{k}{2l}p_{,i}p_{,i}+\frac{1}{2Q}p^2+\frac{k}{l}f_ip_{,i}\Big]\mathrm{d}V-\int_{S_u}u_i^*\sigma_{ij}n_j\mathrm{d}S-\int_{S_\sigma}(\sigma_{ij}n_j-p_i^*)u_i\mathrm{d}S+\int_{S_V}\frac{1}{l}v_n^*p\,\mathrm{d}S\cdot$$

Π_{42}, Γ_{42} 具有补充条件(7)(8), 先决条件(9), Π_{42}, Γ_{42} 满足互补关系, 即 $\Pi_{42}+\Gamma_{42}=0$•

3.3 三类变量的变分原理

1) 将(8)式代入 Π_{51} 中, 并令 p 满足(9) 式, 消去 g_i, v_i, 则由 Π_{51} 可得:

$$\Pi_{31}(\varepsilon_{ij},u_i,p)=\int_V\Big(\frac{1}{2}H_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}-\lambda pu_{k,k}+H_{ijkl}\varepsilon_{kl}u_{i,j}-F_iu_i-\frac{k}{2l}p_{,i}p_{,i}-\frac{1}{2Q}p^2-\frac{k}{l}f_ip_{,i}\Big)\mathrm{d}V-\int_{S_\sigma}p_i^*u_i\mathrm{d}S-\int_{S_V}\frac{1}{l}v_n^*p\,\mathrm{d}S,$$

Π_{31} 具有补充条件(5)、(7)、(8), 先决条件(2)、(9)•

2) 将(1)式代入 Π_{52} 中, 并令 u_i 满足(2) 式, 消去 σ_{ij}, ε_{ij} 则由 Π_{52} 可得:

$$\Pi_{32}(u_i,p,g_i)=\int_V\Big[\frac{1}{2}H_{ijkl}u_{k,l}u_{i,j}-F_iu_i-\lambda pu_{k,k}+\frac{k}{2l}g_ig_i-\frac{1}{2Q}p^2-\frac{k}{l}g_ip_{,i}-\frac{k}{l}f_ip_{,i}\Big]\mathrm{d}V-\int_{S_\sigma}p_i^*u_i\mathrm{d}S-\int_{S_V}\frac{1}{l}v_n^*p\,\mathrm{d}S,$$

Π_{32} 具有补充条件(1)、(5)、(7), 先决条件(2)、(9)•

3) 将(8)式代入 Π'_{53} 中, 并令 p 满足(9) 式, 消去 g_i, v_i, 则由 Π'_{53} 可得:

$$\Pi_{33}(\varepsilon_{ij},\sigma_{ij},p)=\int_V\Big(\frac{1}{2}H_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-\lambda p\varepsilon_{kk}-\frac{k}{2l}p_{,i}p_{,i}-\frac{k}{l}F_ip_{,i}-\frac{1}{2Q}p^2\Big)\mathrm{d}V+\int_{S_u}u_i^*\sigma_{ij}n_j\mathrm{d}S-\int_{S_V}\frac{1}{l}v_n^*p\,\mathrm{d}S,$$

Π_{33} 具有补充条件(7)、(8), 先决条件(3)、(4)、(9)•

3.4 二类变量的变分原理

1) 将(1)式代入 Π_{31} 中, 或将(8) 式代入 Π_{32} 中, 均可得到

$$\Pi_{21}(u_i,p_i)=\int_V\Big[\frac{1}{2}H_{ijkl}u_{k,l}u_{i,j}-F_iu_i-\lambda pu_{k,k}-\frac{k}{2l}p_{,i}p_{,i}-\frac{k}{l}f_ip_{,i}-\frac{1}{2Q}p^2\Big]\mathrm{d}V-\int_{S_\sigma}p_i^*u_i\mathrm{d}S-\int_{S_v}\frac{1}{l}v_n^*p\,\mathrm{d}S,$$

Π_{21} 具有补充条件(1)、(5)、(7)、(8), 先决条件(2)、(9)•

4 结 论

本文采用变积方法首先建立了六类变量的广义变分原理• 在此基础上, 通过引入约束条件得到各级变分原理• 其中包括五类变量, 四类变量, 三类变量和二类变量的变分原理• 除得到文献中已有的变分原理外, 还给出了许多新的变分原理• 此外, 在本文的推导过程中, 清晰地揭示了各级变分原理的关系•

对于饱和多孔介质耦合系统, 由于耦合效应的影响, 除具有势能型和余能型变分原理外(如 Π_6, Γ_6) 还具有势能_余能耦合型变分原理(如 Π'_6, Γ'_6)

对于饱和多孔介质的非等温场以及动力问题的各级变分原理, 可用同样的方法建立, 拟另

文讨论•

参 考 文 献

[1] Biot M A. General theory of three_dimensional consolidation[J]. J Appl Phys, 1941, **12**: 155~ 164

[2] Biot M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid_saturated porous solid. I Low frequency range[J]. J Acout Soc Amer, 1956, **28**: 168~ 178

[3] Ghaboussi J, et al. Discussion on variational formulation of dynamics of fluid_saturated porous solids [J]. J Eng Mech Div ASCE, 1973, **99**: 1097~ 1098

[4] Sandhu R S, Pister K S. A Variational principle for boundary value and initial boundary value problems [J]. Int J Solids and Structures, 1971, **7**: 639~ 654

[5] Sandhu R S, Pister K S. Dynamics of fluid_saturated soils variational formulation[J]. Int J Numer Anal Methos Geomechd, 1987, **11**: 241~ 255

[6] 钱伟长. 变分法与有限元[M]. 北京: 科学出版社, 1980

[7] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1981

[8] 梁立孚, 石志飞. 关于变分学中逆问题的研究[J]. 应用数学和力学, 1994, **15**(9): 775~ 788

[9] 梁立孚, 石志飞. 粘性流体力学的变分原理及其广义变分原理[J]. 应用力学学报, 1993, **10**(1): 119 ~ 123

Variational Principles of Fluid Full_Filled Elastic Solids

Shi Zhifei, Huang Shuping, Zhang Zimao

Northern Jiaotong University, Beijing 100044, P R China

Abstract: The generalized variational principles of isothermal quasi_static fluid full_filled elastic solids are established by using Variational Integral Method. Then by introducing constraints, several kinds of variational principles are worked out, including five_field variable, four_field variable, three_field variable and two_field variable formulations. Some new variational principles are presented besides the principles noted in the previous works. Based on variational principles, finite element models can be set up.

Key words: fluid full_filled elastic solids; variational integral method; variational principles; generalized variational principles