

有限变形弹性体 J 积分守恒及其对偶形式*

吴祥法, 范天佑, 刘长河

北京理工大学 材料科学研究中心, 北京 100081

(陈至达 推荐)

摘要: 基于势能原理与余能原理的对偶关系, 给出了有限变形弹性体的 J 积分形式及其对偶形式, 并在弹塑性有限变形的前提下给出其路径守恒的证明。

关键词: 有限变形; 弹性; J 积分

分类号: O346.1 **文献标识码:** A

引 言

二维弹性体的路径无关积分首先由 Eshelby^[1] 提出, 而后 Rice^[2] 1967 年开始用于断裂力学研究提出 J 积分, Rice 指出 J 积分的物理意义相当于裂纹单位长度扩展的能量释放率, J 积分是断裂力学的一个重要概念。1972 年 Knowles 和 Sterberg 将二维 J 积分推广到三维, 定义了七个曲面面积的守恒积分。国内陆美子^[3], 陈至达^[4] 等给出了一类新的三维路径守恒积分及三维 J 积分的定义。J 积分的提出使人们摆脱了直接求解裂纹尖端解析解的困难。转而寻求 J 积分与断裂的关系。如弹塑性断裂常数裂纹尖端张开位移 δ_t , 在二维 I 型情形下 δ_t 与 J 之间存在线性关系, 而在三维情形下数值计算已经表明 δ_t 与 J 之间的线性关系仍然存在^[5], 但理论上仍需进一步的论证。J 积分与断裂的关系研究是断裂力学的一个重要内容, J 积分的建立对断裂力学的数值计算提供了可靠的数学基础。当前 J 积分的研究仍是表面裂纹, 裂纹前缘场奇异性分析, 计算断裂动力学等的热点之一^[6]。

Rice 提出的 J 积分实际上是势能型积分, 由弹性力学的变分原理可知势能与余能是互为对偶关系的, 因此可以建立相应于余能的 J 积分形式。对于弹塑性体在裂纹尖端往往存在着大应变, 因此有必要研究在有限变形条件下裂纹尖端的路径积分的守恒性, 以揭示材料裂纹尖端在有限变形下的守恒规律, 为研究材料的弹塑性断裂提供理论基础。

1 有限变形体的 J 积分及其对偶形式

由弹性力学的变分原理^[7] 可知, 弹性体的势能与余能是具有对偶形式的。而由 Rice 对 J 积分的解释可知 J 积分是势能型积分, 因此可以建立相应于余能原理的 J 积分的对偶形式。对于一般的二维有限变形弹性体 J 积分及其对偶形式 J 可以表示为:

$$J = \int_{\Gamma} A dy - \int_{\Gamma} T_i \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x} ds, \quad (1)$$

* 收稿日期: 1997_11_06; 修订日期: 1998_

作者简介: 吴祥法(1968~), 男, 博士, 讲师, 已发表论文十余篇

$$\dot{J} = \int_{\Gamma} \left[B + \frac{1}{2} \cdot u_{k,i} \cdot u_{k,j} \cdot \sigma_{ij} \right] dy - \int_{\Gamma} \frac{\partial T_i}{\partial x} \cdot \mathbf{u}_i ds_{q0} \quad (2)$$

式中 T_i 为积分围线上各点的应力, \mathbf{u}_i 为积分围线上各点的位移, 如图 1. A, B 为弹性体在有限变形下的能量密度和余能密度. 即:

$$A = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij},$$

$$B = \int_0^{\sigma_{ij}} \epsilon_{ij} d\sigma_{ij}. \quad (4)$$

在式(1)~(4)式中各量都满足有限变形弹性体的控制方程.

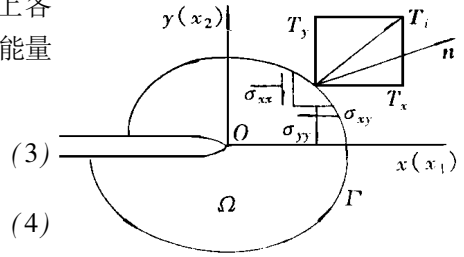


图 1

J 积分及其对偶形式由于是建立在能量原理的基础上, 对小应变 J 积分已证明是路径守恒的, 对有限变形弹性体也成立. 由 J 积分及其对偶形式 \dot{J} 的形式(1), (2) 可知在小应变及有限变形的条件下 J 积分具有相同的形式, 而其对偶形式 \dot{J} 去除高阶项即可得到在小应变下的积分形式.

2 有限变形下 J 积分及其对偶形式 \dot{J} 的路径守恒性

考虑有限变形弹塑性体(非卸载), 采用 Lagrange 坐标系, 利用变形前确定物体内一点的坐标来确定该点在随后变形中的位置, 则有限变形弹性体问题的控制方程^[8]为:

(1) 平衡方程

$$[\delta_{ik} + u_{i,k}] \sigma_{kj}, j + f_i = 0; \quad (5)$$

(2) 几何协调方程

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} \cdot u_{k,j}); \quad (6)$$

(3) 应力应变关系(非卸载)

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial A(\epsilon_{ij})}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad \epsilon_{ij} = \frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}; \quad (7)$$

(4) 力边界条件

$$(\delta_{ik} + u_{i,k}) \cdot \sigma_{ij} \cdot n_j = p_i; \quad (8)$$

(5) 位移边界条件

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i. \quad (9)$$

式中 δ_{ij} 为 Kronecker 符号, A, B 分别为弹性体的能量密度和余能密度, 其定义见式(3), (4).

2.1 有限变形弹性体 J 积分路径守恒的证明

如图 2, 取裂纹尖端的任意积分回路 $\Gamma = \Gamma_1 + BB' + \Gamma_2 + AA'$, 由于在裂纹自由面 x 轴上无外力则利用 Green 公式, 可得:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} A dy &= \iint_{\Omega} \frac{\partial A}{\partial x} dx dy = \iint_{\Omega} \frac{\partial A}{\partial \epsilon_{ij}} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x} dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} \sigma_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} \cdot u_{k,j}) \right] dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} \left[\sigma_{ij} \cdot \left(\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + u_{k,i} \cdot \frac{\partial u_{k,j}}{\partial x} \right) \right] dx dy. \end{aligned} \quad (10)$$

上式利用了 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

$$(11)$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \mathbf{T}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x} ds &= \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} (\delta_{ik} + u_{i,k}) \cdot \sigma_{ij} \cdot \mathbf{n}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x} ds = \\
&= \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\delta_{ik} + u_{i,k}) \cdot \sigma_{ij} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x} \right] dx dy = \\
&= \iint_{\Omega} \left[\sigma_{ij,j} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x} + \sigma_{ij} \cdot u_{i,k} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x} + \right. \\
&\quad \left. \sigma_{ij} \cdot u_{i,kj} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x} + \sigma_{ij} \cdot u_{i,k} \cdot \frac{u_{i,j}}{\partial x} \right] dx dy \quad (12)
\end{aligned}$$

不计体力并将平衡微分方程(5)两边同乘 $\partial \mathbf{u}_i / \partial x$, 同时利用式(11)化简(12)可得:

$$\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \mathbf{T}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x} ds = \iint_{\Omega} \sigma_{ij} \left(\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + u_{k,i} \frac{\partial u_{k,j}}{\partial x} \right) dx dy \quad (13)$$

比较式(10),(13)可知:

$$\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} A dy - \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \mathbf{T}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x} ds = 0 \quad (14)$$

由于 Γ_1, Γ_2 的任意性及取向相反, 由积分恒等式(14)可知对任意裂纹尖端路径 Γ 有限变形弹性体 J 积分守恒.

2.2 有限变形弹性体 J 积分的对偶形式 J' 路径守恒的证明

如图2, 取裂纹尖端的任意积分回路 $\Gamma = \Gamma_1 + BB' + \Gamma_2 + AA'$, 由于在裂纹自由面 x 轴上无外力, 利用 Green 公式及式(4),(11), 可得:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \left[B + \frac{1}{2} u_{k,i} \cdot u_{k,j} \cdot \sigma_{ij} \right] dy &= \\
&= \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial B}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x} + \sigma_{ij} \cdot u_{k,i} \cdot \frac{\partial u_{k,j}}{\partial x} + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} u_{k,i} \cdot u_{k,j} \cdot \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x} \right] dx dy = \iint_{\Omega} \left[\varepsilon_{ij} \cdot \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x} + \sigma_{ij} \cdot u_{j,k} \cdot \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} \cdot u_{k,i} \cdot u_{k,j} \cdot \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x} \right] dx dy \quad (15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial x} \cdot \mathbf{u}_i ds &= \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{\partial}{\partial x} [(\delta_{ik} + u_{i,k}) \cdot \sigma_{ij}] \cdot \mathbf{u}_i ds = \\
&= \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [(\delta_{ik} + u_{i,k}) \cdot \sigma_{ij}] \cdot \mathbf{u}_i \right\} dx dy = \\
&= \iint_{\Omega} \left[u_{i,j} \cdot \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x} + \sigma_{ij} \cdot u_{i,k} \cdot \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + u_{k,i} \cdot u_{k,j} \cdot \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x} \right] dx dy \quad (16)
\end{aligned}$$

式(16)的推导中不计体力且同时利用了 Green 公式及式(5),(7)和(11).

比较式(15),(16)利用几何协调方程(6)可知:

$$\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \left[B + \frac{1}{2} u_{k,i} \cdot u_{k,j} \cdot \sigma_{ij} \right] dy - \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial x} \cdot \mathbf{u}_i ds = 0 \quad (17)$$

由于 Γ_1, Γ_2 的任意性及取向相反, 由积分恒等式(14)可知对任意裂纹尖端路径 Γ 有限变形弹性体 J 积分的对偶形式 J' 也守恒.

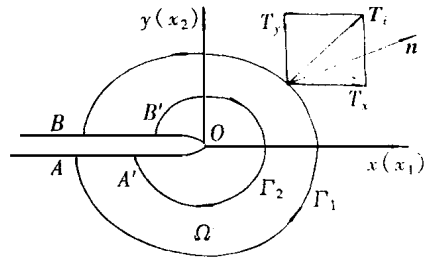


图 2

3 结 论

本文给出了弹塑性体在有限变形条件下的 J 积分及其对偶形式 J' , 并在有限变形的条件给出了其证明。基于上面的过程对于动态以及运动裂纹在有限变形条件下也同样可以给出其相应的 J 积分及其对偶形式 J' , 可以证明其具有路径守恒性。

参 考 文 献

- [1] Eshelby J D. Solid State Physics III [M]. New York: Academic Press, 1956
- [2] Rice J R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and crack[J]. Journal of Applied Mechanics, 1968, **35**(2): 379~ 386
- [3] 陆美子. 论三维非线性断裂动力学中的路径无关积分[J]. 应用数学和力学, 1983, **4**(3): 361~ 368
- [4] 陈至达. 三维 J 积分的能量原理[J]. 应用数学和力学, 1984, **5**(5): 613~ 617
- [5] Brocks W, Noack H. J -integral and stress at an inner surface flaw in a press vessel[J]. International Journal of Press Vessel and Piping, 1988, **31**(2): 187~ 203
- [6] 柳春图, 蒋持平. 当前断裂力学发展的几个问题[A]. 固体力学发展趋势[M], 黄克智, 徐秉业主编. 北京: 北京理工大学出版社, 1995, 74~ 94
- [7] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1981
- [8] 卓家寿. 弹塑性力学的广义变分原理[M]. 北京: 水利电力出版社, 1989

Path Independent J -Integral and Its Dual Form in Elastic-Plastic Solids with Finite Deformation

Wu Xiangfa, Fan Tianyou, Liu Changhe

Research Center of Materials Science, Beijing University of
Science and Technology, Beijing 100081, P R China

Abstract: In this paper, based on energy variation principles of elastic-plastic solids, the path-independent J -integral and its dual form in elastic-plastic solids with finite displacements are presented. Whoce testification is given there after.

Key words: finite displacements; elastic-plastic solids; J -integral