

# 构造厚、薄板通用的可靠板元 DM4 单元\*

杨 连

合肥市规划事务处, 合肥 230001

(张汝清推荐)

**摘要:** 在研究剪切自锁现象(shear locking)、零能模式(zero energy mode)及分片检验(patch test)等问题的基础上综合考虑了三者之间联系, 更清楚地揭示了三者之间内在关系, 为建立高效、可靠的厚、薄板通用单元提供了一种合理方法。

**关键词:** 剪切自锁; 零能模式; 分片检验; 相容约束条件; 合理 Kirchhoff 约束

**分类号:** O342      **文献标识码:** A

## 1 关于剪切自锁的分析——条件 I

构造薄板单元  $C^1$  类连续性  $w$  场比较困难, 以  $w$  为基本场的位移型单元大多是非协调元, 且这些单元的收敛性有时难以得到保证。另一方面, Kirchhoff 板理论已无法适用于工程中大量使用的中厚板问题, 因而构造可靠、有效的计入横向剪切效应的厚、薄通用  $C^0$  类板壳单元是近年来国内外普遍关心的研究课题且已经取得了许多卓有成效的成果<sup>[1-4]</sup>。但困难依然存在, 在这方面仍然需要更深层次的分析。

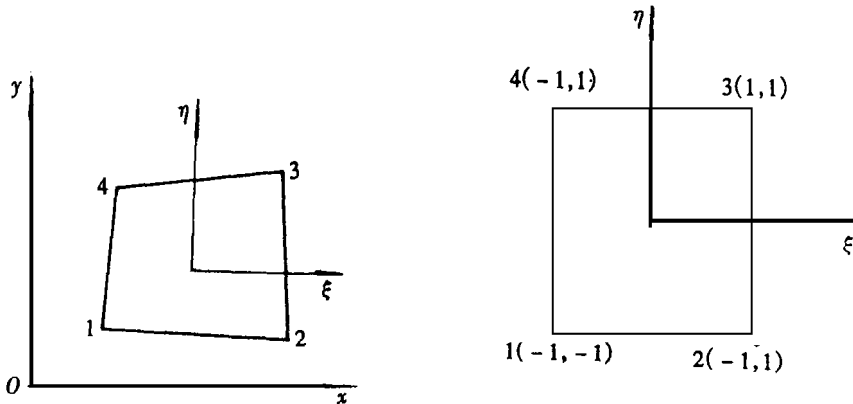


图 1 四结点单元

如图 1 所示, 四边形四结点 Mindlin 板元, 横向位移  $w$  和转角  $\theta$  可用双线性协调场表示为:

\* 收稿日期: 1996\_10\_11; 修订日期: 1998\_11\_05

作者简介: 杨连(1966~), 男, 工程师

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) w_i, \\ \theta_\xi &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \theta_{\xi_i}, \\ \theta_\eta &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \theta_{\eta_i}, \end{aligned} \right\} \text{理方} \quad (1)$$

式中:  $N_i(\xi, \eta)$  是标准的形函数, 具体显式为:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2)$$

式(1)可等价地表示为:

$$w = c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi\eta \quad (3a)$$

$$\theta_\xi = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta, \quad (3b)$$

$$\theta_\eta = b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi\eta, \quad (3c)$$

$$\text{式中: } \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{\xi_1} & \theta_{\eta_1} & w_1 \\ \theta_{\xi_2} & \theta_{\eta_2} & w_2 \\ \theta_{\xi_3} & \theta_{\eta_3} & w_3 \\ \theta_{\xi_4} & \theta_{\eta_4} & w_4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\text{单元变形能为: } U = U_b + U_s = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}, \quad (5)$$

$$U_b = \frac{1}{2} \int_A \mathbf{x}^T \mathbf{S}_b \mathbf{x} dA = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_b \mathbf{q}, \quad (6)$$

$$U_s = \frac{1}{2} \int_A \mathbf{y}^T \mathbf{S}_s \mathbf{y} dA = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_s \mathbf{q}, \quad (7)$$

单元刚阵  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_s$ ,  $\mathbf{K}_b$  为弯扭刚度矩阵,  $\mathbf{K}_s$  为剪切刚阵.  $\mathbf{q}$  为结点位移矢量.

$$\mathbf{q} = [w_1 \quad \theta_{\xi_1} \quad \theta_{\eta_1} \quad \dots \quad w_4 \quad \theta_{\xi_4} \quad \theta_{\eta_4}]^T, \quad (8)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \mathbf{L}\theta, \quad (9)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix} \mathbf{w} - \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \mathbf{d}\mathbf{w} - \theta, \quad (10)$$

$$\mathbf{S}_b = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_s = \frac{kEh}{2(1+\mu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

式中:  $k = 5/6$ .

以矩形单元为例, 并设  $x, y$  与  $\xi, \eta$  坐标重合, 则  $\mathbf{w}$  及  $\theta$  可分别表示为:

$$\mathbf{w} = [1 \quad x \quad y \quad xy] \boldsymbol{\alpha}, \quad (12)$$

$$\theta = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 & xy & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y & 0 & xy \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta}. \quad (13)$$

在极薄板情况下, 由于剪切刚度远大于弯扭刚度, 导致以下的 Kirchhoff 约束实现. 即:

$$\mathbf{y} = \mathbf{d}\mathbf{w} - \theta = \mathbf{0}, \quad (14)$$

$$\text{即: } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \alpha - \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 & xy & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y & 0 & xy \end{bmatrix} \beta = \mathbf{0} \quad (15)$$

于是有下列  $w_\theta$  协调关系:

$$[\alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5] = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_4 \quad \beta_5], \quad (16)$$

$$\text{及 } \theta \text{ 零值约束: } \beta_6 = \beta_3 = \beta_7 = \beta_8 = \mathbf{0}. \quad (17)$$

相应的单元转角及曲率分别为:

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{Bmatrix}, \quad (18)$$

$$x = L\theta = \begin{Bmatrix} 0 \\ \xi \\ \beta_4 + \beta_5 \end{Bmatrix}. \quad (19)$$

这里  $x_x = x_y = \mathbf{0}$  意味着单元不可能发生弯曲变形, 只能发生剪切变形和常扭率变形, 即出现所谓剪切自锁现象 (shear locking).

## 2 单元的秩的分析与多余零能模式 —— 条件 II

四结点 Mindlin 板元共有 12 个自由度, 除去单元三个刚体位移模式外, 单元刚阵  $\mathbf{K}$  的秩  $\rho(\mathbf{K}) = 9$ , 如果  $\rho(\mathbf{K}) < 9$  时, 必定存在多余的零能模式. 对于双线性场单元弯扭能刚阵  $\mathbf{K}_b$  的秩  $\rho(\mathbf{K}_b) = 5$ , 为保证单元不出现多余零能模式, 应要求剪切刚阵  $\mathbf{K}_s$  的秩  $\rho(\mathbf{K}_s) \geq 4$ . 另一方面, 在极薄板情况下, 由于  $\mathbf{K}_s$  的元素远大于  $\mathbf{K}_b$  中的元素, 如果  $\mathbf{K}_s$  中秩大于 4 时, 在单刚组合后,  $\mathbf{K}_b$  的部分元素将被  $\mathbf{K}_s$  中元素所“淹没”, 将出现部分剪切自锁. 由此可见, 在极薄板情况下, 为保证不出现自锁, 必须要求  $\mathbf{K}_s$  中秩  $\rho(\mathbf{K}_s) \leq 4$ .

文[5]对单元剪切能部分采用降阶积分 ( $1 \times 1$  高斯积分). 相应剪切刚阵  $\mathbf{K}_s$  中秩为 2, 将出现 2 个零能模式, 由此构造的单元是不可靠, 但在若干单元拼装以后, 整个刚度矩阵一般情况下将不含有“零能模式”. 由于 Hughes 元计算精度高, 故工程中广泛应用.

## 3 分片检验要求及同时满足三项条件所存在的困难 —— 条件 III

由于 Kirchhoff 约束条件不会破坏常剪应变模式, 故只需讨论常曲率分片检验条件.

所谓常曲率分片检验条件要求单元能精确再现常曲率变形下的  $w$  场及  $\theta$  场, 因而首先要求在  $\theta$  场发生常曲率变形时, 单元能提供与  $\theta$  场相一致的  $w$  场. 值得注意的是: 在薄板及常曲率情况下, 全要满足单元剪应变  $\gamma = \mathbf{0}$ . 此时单元应变能完全由  $U_b$  提供, 而  $U_s$  仅提供  $w$  与  $\theta$  场的约束关系. 当  $w$  和  $\theta$  场均以双线性场表示时, 显然是无法在单元全域内处处严格满足. 幸运的是: 在板的有限元列式中, 建立的位移单元恰好是以  $w$  和  $\theta$  场的结点数来表示的. 因而完全可以放弃在单元域内严格满足的 Kirchhoff 约束, 仅去寻找  $w$  与  $\theta$  场的结点位移量之间的正确的 Kirchhoff 约束关系.

## 4 四结点 Mindlin 板元 DM4

由上文秩的分析, 构造一种理想的四结点 Mindlin 板元应满足  $\rho(\mathbf{K}_s) = 4$ , 即在薄板极限条

件下 Kirchhoff 约束条件(14) 式应该能够且只能提供四个关于  $w$  和  $\theta$  场之间的合理独立方程。

以  $w^*$  表示与双线性  $\theta$  场相对应的精确挠度, 在单元内不可能处处满足  $w = w^*$ , 我们的目的是在 Kirchhoff 约束下使单元结点上严格满足:

$$w_i = w_i^* \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (20)$$

对单元内任意以  $i, j$  为端点的路径  $s$ , 如果 Kirchhoff 约束成立, 下列等式应严格成立:

$$w_j^* = w_i^* + \int_i^j \theta_s ds \quad (21)$$

为获得与  $\theta$  场一致的  $w^*$  结点值, 只需将(21) 式取为单元边界相邻结点即可:

$$w_j = w_i + \int_i^j \theta_s ds \quad (22)$$

对于四结点双线性插值函数, 上式也可表示为:

$$(\partial w / \partial s)_{i-j} = (\theta_s)_k, \quad (23)$$

由  $(\partial w / \partial s)_{i-j} = (w_j - w_i) / L_{ij}$ ,

$$(\theta_s)_k = (\theta_{si} + \theta_{sj}) / 2 \quad (24)$$

(22) 式可等价地表示为:

$$(w, \xi) = (\theta_\xi)_k \quad (k = A, C), \quad (25a)$$

$$(w, \eta) = (\theta_\eta)_k \quad (k = B, D) \quad (25b)$$

式(25) 给出与常曲率转角完全一致的  $w$  场的结点值, 同时满足  $\rho(K_s) = 4$  的秩条件, 这是无自锁、无多余零能模式、可通过分片检验条件的厚、薄通用元设计所应注意的重要条件。我们称之为合理的离散 Kirchhoff 约束条件。

在图 1 中, 根据(25) 式, 可获得如下四个合理的 Kirchhoff 约束条件:

$$\frac{1}{2}(w_2 - w_1) = \frac{1}{2}(\theta_{\xi_1} + \theta_{\xi_2}), \quad \frac{1}{2}(w_3 - w_4) = \frac{1}{2}(\theta_{\xi_3} + \theta_{\xi_4}), \quad (26a, b)$$

$$\frac{1}{2}(w_4 - w_1) = \frac{1}{2}(\theta_{\eta_1} + \theta_{\eta_4}), \quad \frac{1}{2}(w_3 - w_2) = \frac{1}{2}(\theta_{\eta_3} + \theta_{\eta_2}) \quad (26c, d)$$

从式(26) 可以看出, 每个约束只与公共边界上结点位移量有关, 因而两个相邻单元在公共边界上约束是相同。我们称这样的约束条件为相容约束条件。

在薄板极限情况下, 采用自然坐标系表示, Kirchhoff 约束条件为:

$$\mathcal{K}_\xi = \partial w / \partial \xi - \theta_\xi = (c_2 - a_1) - a_2 \xi + (c_4 - a_3) \eta - a_4 \xi \eta = 0, \quad (27a)$$

$$\mathcal{K}_\eta = \partial w / \partial \eta - \theta_\eta = (c_3 - b_1) + (c_4 - b_2) \xi - b_3 \eta - b_4 \xi \eta = 0, \quad (27b)$$

这导致  $\theta$  零值约束:

$$a_2 = a_4 = b_3 = b_4 = 0, \quad (28)$$

及  $w_\theta$  协调约束:

$$c_2 - a_1 = 0, \quad c_4 - a_3 = 0, \quad c_3 - b_1 = 0, \quad c_4 - b_2 = 0 \quad (29)$$

将  $b_1 \sim b_4, a_1 \sim a_4$  及  $c_1 \sim c_4$  代入(29) 式, 且通过等价变换可知(29) 式  $w - \theta$  协调约束与(26) 式四个合理 Kirchhoff 约束条件完全一致。

为了在极薄板下实现约束(29) 式, 而不出现(28) 式约束, 一种自然的相法是在单元剪切能计算中不采用(27) 式而代入的是含四个参数的新的剪应变场。要获得四个独立约束应取:

$$\mathcal{K}_\xi = (c_2 - a_1) + (c_4 - a_3) \eta, \quad (30a)$$

$$\mathcal{K}_\eta = (c_3 - b_1) + (c_4 - b_3) \xi, \quad (30b)$$

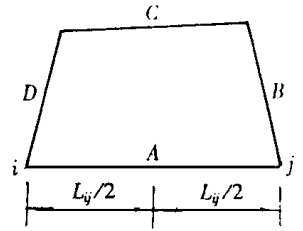


图 2

或等价地表示为:

$$v_{\xi} = [1 \quad \eta] \alpha, \quad v_{\eta} = [1 \quad \xi] \beta \quad (31a, b)$$

以  $w^*$  表示  $\theta$  场相对应的精确挠度, 用自然坐标表示的剪切应变为:

$$v_{\xi}^* = \partial w^* / \partial \xi - \theta_{\xi}, \quad v_{\eta}^* = \partial w^* / \partial \eta - \theta_{\eta} \quad (32a, b)$$

将(20)式代入(32)式, 可得:

$$v_{\xi} = \partial w / \partial \xi - \theta_{\xi}, \quad v_{\eta} = \partial w / \partial \eta - \theta_{\eta} \quad (33a, b)$$

启发于(24)、(25)式, 对(33)式在  $\xi = \pm 1$  及  $\eta = \pm 1$  边界上积分, 即可求得  $\alpha, \beta$  显式,  $v_{\xi}, v_{\eta}$  具体表示为:

$$v_{\eta} = \frac{1}{4} [1 \quad \eta] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}, \quad (34a)$$

$$v_{\xi} = \frac{1}{4} [1 \quad \xi] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}, \quad (34b)$$

式中:

$$\mathbf{q} = [w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \dots \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4}]^T, \quad (35)$$

$$\begin{cases} v_{xz} \\ v_{yz} \end{cases} = \mathbf{J}^{-1} \begin{cases} v_{\xi} \\ v_{\eta} \end{cases} = \frac{\mathbf{J}^{-1}}{4} [\mathbf{M}_1 \quad \mathbf{M}_2 \quad \mathbf{M}_3 \quad \mathbf{M}_4] \mathbf{q},$$

式中:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\eta & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\eta & 0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\eta & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\eta & 0 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\eta & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\eta & 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\eta & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\eta & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi \end{bmatrix}.$$

坐标变换为:

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i = d_4 + d_1 \xi + d_3 \eta + d_2 \xi \eta, \quad (36a)$$

$$y = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i = E_4 + E_1 \xi + E_3 \eta + E_2 \xi \eta, \quad (36b)$$

式中:

$$\begin{bmatrix} d_1 & E_1 \\ d_2 & E_2 \\ d_3 & \frac{E_3}{\bar{\rho}} \\ d_4 & E_4 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{cases}, \quad (37)$$

$$J = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 + d_2 \eta & E_1 + E_2 \eta \\ d_3 + d_4 \xi & E_3 + E_4 \xi \end{bmatrix}, \quad (38)$$

$$|J| = A_0 + B_0 \xi + C_0 \eta, \quad (39)$$

$$A_0 = d_1 E_3 - d_3 E_1, \quad B_0 = E_2 d_1 - E_1 d_2, \quad C_0 = E_3 d_2 - E_2 d_3. \quad (40)$$

注意到:

$$\begin{cases} \theta_x \\ \theta_y \end{cases} = J^{-1} \begin{cases} \theta_\xi \\ \theta_\eta \end{cases} = J^{-1} \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{cases} \theta_{\xi_i} \\ \theta_{\eta_i} \end{cases}. \quad (41)$$

根据(41)式在直角坐标系下转角场  $J^{-1}$  引入一般情况下是不协调的, 这将可能从另一方面导致单元不能通过常曲率分片检验, 为保证相邻单元转角场的协调性, 在式(41)中令 Jacobi 矩阵在单元中的取值, 即:

$$\begin{cases} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \end{cases} = J_0^{-1} \begin{cases} \theta_{\xi} \\ \theta_{\eta} \end{cases}. \quad (42)$$

$$\text{于是有: } \begin{cases} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{cases} = J_0^{-1} \begin{cases} \theta_{\xi_i} \\ \theta_{\eta_i} \end{cases}. \quad (43)$$

于是(41)式可以变换成为:

$$\begin{cases} \theta_x \\ \theta_y \end{cases} = J_0^{-1} \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} J_0 \begin{cases} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{cases} = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{cases} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{cases}. \quad (44)$$

由此生成的单元不必采用降阶积分技巧, 不含零能模式、无剪切自锁现象, 严格通过各种分片检验, 可通用于厚、薄板。本文记为 DM4。

## 5 数值算例

### 5.1 分片检验

最常用的分片检验如图3中所示的五个任意四边形单元组合方板。

在图 3(b) 图中, AC 边界上均布  $M_x = 1.0$ , 计算挠度值列于表 1。

表 1 常弯曲应变分片检验的端点挠度 ( $w E b h^3 / M L^2$ )

$h$	节点	DM4 解	Hughes 元解	理论解 <sup>[6]</sup>
1.0	A	6.0	3.352	6.0
	C	6.0	1.833	
0.01	A	6.0	4.229	6.0
	C	6.0	0.675	
0.001	A	6.0	1.864	6.0
	C	6.0	3.030	

在图 3(c) 中, 右端边界均布  $Q_x = 1.0$ , 通过计算, DM4 元及 Hughes 元皆获得  $Q_x = 1.0, Q_y = M_y = M_{xy} = 0$ , 通过纯剪分片检验。

在图 3(d) 中纯扭试验, DM4 元通过了纯扭分片检验, 但 Hughes 元未能通过。

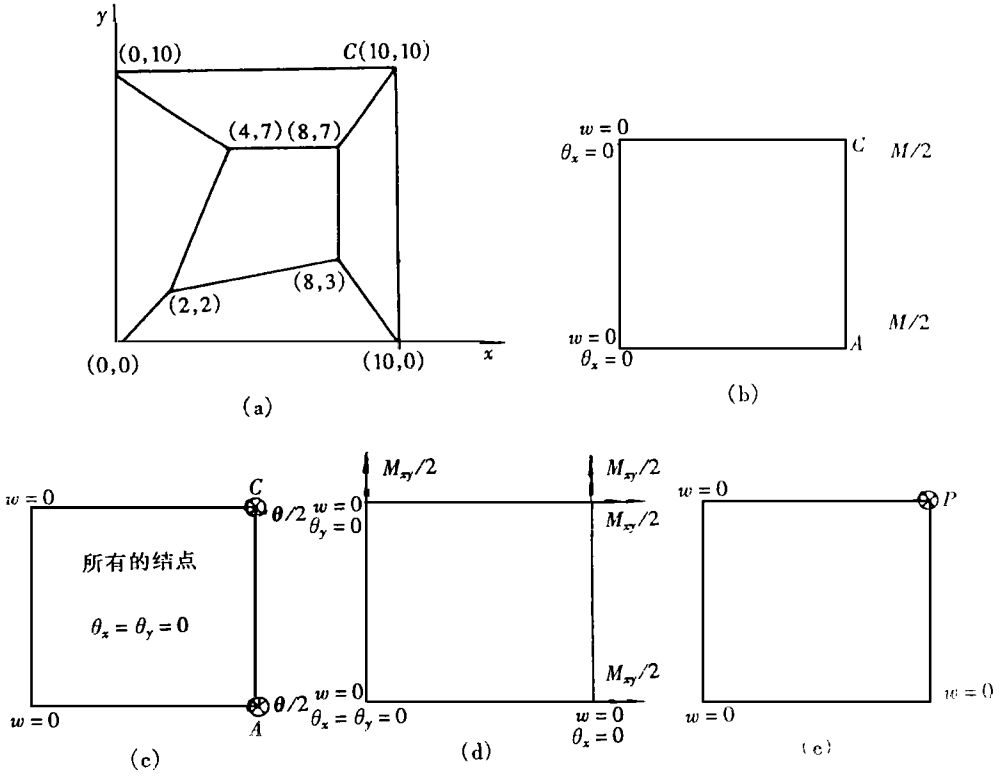


图 3

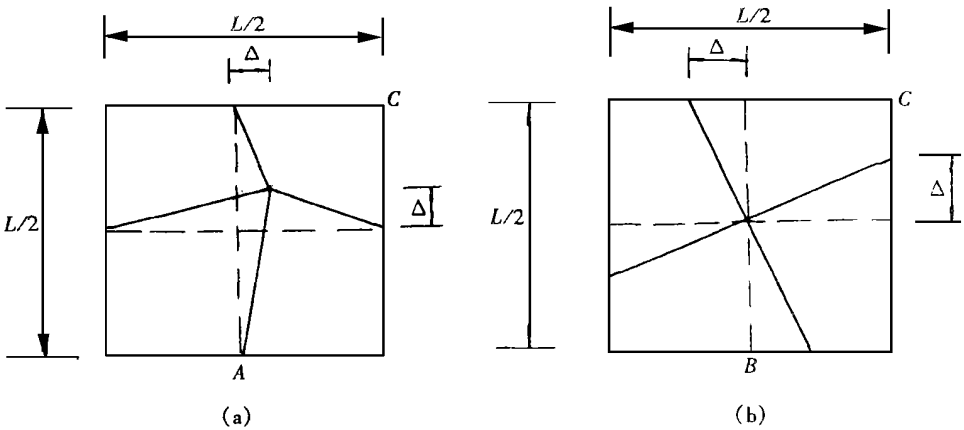


图 4

在图 3(e) 中, 三点支承, 另一点受集中力作用  $P = 10, E = 2.1 \times 10^6, \mu = 0.3, h = 0.01$ ,





表 5 简支方板受集中力作用下中心挠度 ( $Eh^3/\rho l^2$ , 图 4(b))

$\Delta$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.99
DM4 元解	0.125 8	0.125 0	0.122 4	0.117 6	0.110 1	0.099 8
Hughes 元解	0.125 9	0.121 6	0.109 6	0.091 8	0.072 5	0.053 6
理论值	0.126 7	0.126 7	0.126 7	0.126 7	0.126 7	0.126 7

**结束语:** 本文详细分析了薄板在极限情况下是否发生剪切自锁现象、有无多余零能模式及是否通过与片检验等问题不仅与单元刚阵的秩有关,而且与所提供的约束方程是否合理有着重要联系。通过建立剪切相容约束方程构造了一种新的四结点板元,它通过了分元检验,无剪切自锁现象和不含多余零能模式,对单元几何歪斜不敏感且程序容易实施和使用。

**致谢:** 作者衷心地感谢广州城建学院焦兆平教授大力支持和帮助。

### 参 考 文 献

- [1] 杨连. 位移型 Mindlin 板元的可靠性研究及合理的单元列式方法[D]. 合肥工业大学硕士学位论文, 合肥, 1993
- [2] Cheng Y K, Jiao Z P, Wu C C. General formulation of  $C^0$  bending models on the rational  $w_\theta$  constraint [J]. *Comp Mechanics*, 1995, **16**(1): 53~ 61
- [3] 赵忠. 约束问题的新杂交有限元法[D]. 西南交通大学士研究生学位论文, 1991
- [4] Long Yuqiu, Xi Fei. A universal method for including shear deformation in thin plate element[J]. *Int J Num Methods Eng*, 1992, **34**: 171~ 177
- [5] Hughes T J R, Cohen M, Haroun M. Reduced and selection integration techniques in finite element analysis of plates [J]. *Nud Eng Resign*, 1978, **46**: 203~ 222
- [6] 杨耀乾, 平板理论[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1980

## A Reasonable Method for Constructing General Element DM4 of Thick and Thin Plate with Effectual and Reliable Numerical Solution

Yang Lian

Hefei Planning Agency, Hefei, Anhui 230001, P R China

**Abstract:** In this thesis, the interal relations between about shear locking, zero energy mode and patch test are studied, and a reasonable method provided for building general element of thick and thin plate with effectual and reliable numerical solution.

**Key words:** shear locking; zero energy mode; path test; consistent constraint condition; reasonable Kirchhoff constraint