应用数学和力学, 第 19 卷 第 3 期(1999 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

论文编号: 1000_0887(1999)03_0325_29

聚合物材料损伤理论*

黄西成

中国工程物理研究院, 成都 610003

(张汝清推荐)

摘要: 本文研究了外界环境如载荷、温度、湿度、辐射、腐蚀介质、非相容介质等对聚合物材料变形的影响, 给出了微分型和积分型损伤演化方程; 讨论了非线性弹性体和非线性粘弹性损伤变形以及腐蚀损伤· 给出了粘弹性损伤变分原理·

关键词: 聚合物; 损伤; 变分原理

分类号: O346.1 文献标识码: A

1 外界环境对聚合物变形的影响

聚合物材料在外载作用下或在恶劣环境中(如在腐蚀介质、辐射环境中等), 其内部结构和物理_力学性能会发生变化, 如高分子链断裂、微裂纹扩展等等, 称之为材料的损伤·

采用连续介质力学中的模型来研究聚合物材料的流变特性, 只是在模型中引入了损伤变量, 也就是所谓的损伤力学·

1.1 微分形式损伤演化方程

$$\dot{\omega} = \Phi(\sigma_{ij}, \dot{\sigma}_{ij}, \varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}, \omega, t, T, S), \tag{1}$$

或者

$$\dot{\omega} = f_1(\sigma_{ij})\dot{W} f_2(W) f_3(\omega), \tag{2}$$

式中 σ_{ij} 为应力张量, ε_{ij} 为应变张量, W 为应变能, f_1, f_2 和 f_3 分别为应力函数、应变能函数和损伤函数, T 为温度, 也随时间变化, S 为表征这环境的某个参数· 一维情况下, (1) 的简单形式为

$$\dot{\omega} = C\left[\frac{\sigma(1+\varepsilon^c)}{1-\omega^r}\right]^m \frac{\omega^\beta}{(1-\omega)^q}, \tag{3}$$

式中 ε^c 为非弹性应变, C, m, q, r, β 为材料参数·

1.2 积分形式损伤演化方程

$$\omega = \omega_0 + \int_0^t \Pi(t-\tau)\,\phi(\omega, I, J)\,d\tau, \tag{4}$$

式中 ω_0 为初始损伤, 即: $\omega|_{t=0} = \omega_0$, $\Pi(t-\tau)$ 为损伤核, $\Psi(\omega, I, J)$ 为非线性应力、应变和损伤的函数, I 和 J 定义为:

* 收稿日期: 1997_08_11; 修订日期: 1998_09_28
基金来源: 中国工程物理研究院基金资助课题(9403049)
作者简介: 黄西成(1966~), 男, 高级工程师

$$I^2 = \frac{3}{2}\left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} g_{ij}\sigma^{kl} g_{kl}\right)\left(\sigma^{ij} - \frac{1}{3} g^{ij}\sigma^{kl} g_{kl}\right),$$

$$J^2 = \frac{3}{2}\left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} g_{ij}\varepsilon^{kl} g_{kl}\right)\left(\varepsilon^{ij} - \frac{1}{3} g^{ij}\varepsilon^{kl} g_{kl}\right).$$

1.3 损伤张量

定义损伤偏张量 ω_{ij} 和损伤球分量 ω:

$$\omega_{ij} = \int_0^t K[(t-\tau), \eta(\tau)]\beta_{ij}(\tau)\sigma(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{5}$$

$$\omega = \int_0^t K_0[(t-\tau), \eta(\tau)]\beta_{ij}(\tau)\sigma_0(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{6}$$

式中 $\beta_{ij} = \sqrt{3/2}s_{ij}/\sigma$, $\eta(t) = 3\sigma/\sigma$. 损伤张量的一般表达式为

$$\omega_{ij} = \int_0^t \boldsymbol{K}_{ijkl}[(t-\tau), \eta(\tau)]\beta^{kl}(\tau)\sigma(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{7}$$

式中 $\boldsymbol{K}_{ijkl}$ 为四阶损伤张量.

作为损伤度量, 可采用下面表达式:

$$M(t) = a\omega(t) + 3\beta\omega(t),$$

式中 $\omega^2 = \omega_{ij}\cdot\omega_{ij}$ 为损伤强度, 损伤度 $M(t)\in[0, 1]$.

2 非线性弹性体一维损伤与变形

设聚合物材料非弹性变形一般表达式为

$$\sigma = E(\omega)\varepsilon - m(\omega)\varepsilon^3, \tag{8}$$

损伤演变方程为

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = a(S)\left(\frac{\sigma}{1-\omega}\right)^{b(s)}, \tag{9}$$

(8) 中的 $E(\omega)$ 和 $m(\omega)$ 表示为

$$E(\omega) = E_0(1-\omega)^{\alpha}, \quad m(\omega) = m_0(1-\omega)^{\beta}, \tag{10}$$

这里可以清楚的看出 ω 对 E 的影响. 假设 $\sigma = \text{const}$ 可得应变发展率:

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{a\alpha\sigma^b\varepsilon\left[E_0\alpha - m_0\beta\varepsilon^2(1-(b+1)a\sigma^b t)^{(\beta-\alpha)/(b+1)}\right]}{\left[E_0\alpha - 3m_0\alpha\varepsilon^2(1-(b+1)a\sigma^b t)^{(\beta-\alpha)/(b+1)}\right](1-(b+1)a\sigma^b t)}. \tag{11}$$

这样一来, 可以通过一些参数 E_0, m_0, a, b, α 来描述环境对材料变形的影响.

如果采用下面方程描述非线性弹性的变形

$$\sigma = A\varepsilon^{m(\omega)}(1-\omega)^{\alpha}, \tag{12}$$

那么可以得到应变发展规律:

$$\varepsilon = \varepsilon_0[1-(b+1)a\sigma^b t]^{-\alpha/(m(b+1))}, \tag{13}$$

(11) 和(13) 对炸药材料的损伤和变形分析也是合适的.

3. 非线性粘弹性损伤与变形分析

将粘弹性方程中引入损伤参数来描述粘弹性材料的行为

$$\left.\begin{aligned} \frac{s_{ij}}{2G_0} &= e_{ij}\varphi(\varepsilon_i, \omega) - \int_0^t R(t-\tau)\varphi(\varepsilon_i, \omega)e_{ij}(\tau)\mathrm{d}\tau, \\ \frac{\sigma}{K} &= \theta\varphi_1(\theta, \omega) - \int_0^t K(t-\tau)\varphi_1(\theta, \omega)\theta(\tau)\mathrm{d}\tau, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

式中 s_{ij} 为应力偏量, e_{ij} 为应变偏量, $R(t-\tau)$ 为表征材料流变特性的函数(又称核函数或影响函数), $\varphi(\varepsilon_i, \omega)$ 和 $\varphi_1(\theta, \omega)$ 为应变强度、体应变和损伤参数的广义函数• 损伤发展动力方程假设为

$$\dot{\omega} = f[a(S,t), b(S,t), t, \sigma, \omega], \tag{15}$$

式中 σ 为等效应力, 可用应力张量不变量表示, $a(S,t)$ 和 $b(S,t)$ 为依赖于周围介质和时间的函数• 如果体积变形是弹性的, 那么方程组(14) 中的第二方程变为

$$\sigma_0 = K\theta, \tag{16}$$

式中 K 为体积弹性模量• 函数 $\varphi(\varepsilon_i, \omega)$ 可取各种形式, 这里取

$$\varphi(\varepsilon_i, \omega) = (1-\omega)^{\alpha} - \kappa(1-\omega)^{\beta}\varepsilon_i^2, \tag{17}$$

或

$$\varphi(\varepsilon_j, \omega) = \alpha\varepsilon_i^{\kappa}(1-\omega)^{\varepsilon}, \tag{18}$$

式中 κ, α, β 各参数可通过实验获得•

将(14) 式写成如下形式:

$$\frac{s_{ij}}{2G_0} = e_{ij}\varphi(\varepsilon_i, \omega) - \int_0^t R(t-\tau, \omega)\varphi(\varepsilon_i, \omega)e_{ij}\,\mathrm{d}\tau,$$
$$\frac{\sigma}{K} = \theta\varphi_1(\theta, \omega) - \int_0^t K(t-\tau, \omega)\varphi_1(\theta, \omega)\theta(\tau)\,\mathrm{d}\tau \bullet \tag{19}$$

这实质上反映了一大类粘弹性材料由于非相容介质造成的损伤, 这类损伤将破坏材料的记忆性(遗传性), 它们与损伤参数的关系为

$$K(t-\tau, \omega) = K_1(t-\tau)F_1(\omega), \quad R(t-\tau, \omega) = R_1(t-\tau)F_2(\omega), \tag{20}$$

即将它们分离成时间的影响和损伤的影响• 它们还可离散为

$$K(t-\tau, \omega) = \sum_{i=0}^{n}\omega^i K_i(t-\tau), \quad R(t-\tau, \omega) = \sum_{i=o}^{n}\omega^j R_i(t-\tau), \tag{21}$$

这里 $K_i(t-\tau)$ 和 $R_i(t-\tau)$ 可用指数形式表示:

$$K_i(t-\tau) = A_i e^{-c_i(t-\tau)}, \quad R_i(t-\tau) = B_i e^{-d_i(t-\tau)} \bullet \tag{22}$$

4 聚合物材料在辐照环境下的损伤分析

这是个典型的老化问题• 在辐照环境下, 材料的变形能力将会改变, 甚至材料的化学成分和微粒的分布也会发生变化• 因此研究这类老化问题有着重要的工程意义•

用材料强度的降低来反映材料内部的损伤:

$$\omega(t) = 1 - \sigma_p(t)/\sigma_0 = 1 - D(t) \bullet L(t), \tag{23}$$

$D(t)$ 为由于表面老化造成的有效截面的减少, $L(t)$ 为由于内部损伤造成的有效截面的减少• 在一维情况下, $D(t)$ 采用下面的微分方程描述:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} - \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial D}{\partial t} = 0, \tag{24}$$

采用富氏级数并化简可得:

$$D(t) = D_0\exp(-kt/d^2), \tag{25}$$

$L(t)$ 的表达式如下:

$$L(t) = 1 - \frac{pS}{ad}[1-\exp(-k_2t)]\{1-\exp[v\rho(1-\exp(-k_3t))]\}, \tag{26}$$

那么(23) 式表示为

$$\omega(t) = 1-1\left\{L(t) = 1-\frac{pS}{ad}[1-\exp(-k_2 t)]\{1-\exp[v\rho(1-\exp(-k_3 t))]\}\right\}D_0\exp(-kt/d^2)\cdot \tag{27}$$

通过上式可以分析聚合物材料在辐照下的损伤及强度的降低•

5 粘弹性损伤速率型变分原理

状态方程

将(14)式改写成速率型状态方程:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{(1+\nu)\dot{\sigma}_{ij}}{E(\omega)} - \frac{\nu}{E(\omega)}g_{ij}\dot{\sigma}^{kl}g_{kl} + \frac{3}{2}\left[\int_0^t K(t-\tau,\omega)f(I,\omega)\left(\sigma_{ij}-\frac{1}{3}g_{ij}\sigma^{kl}g_{kl}\right)\mathrm{d}\tau\right]^{\bullet} \tag{28}$$

损伤演变方程

$$\omega = \omega_0 + \int_0^t \Pi(t-\tau)\phi(\omega, I, J)\,\mathrm{d}\tau\cdot \tag{29}$$

几何方程

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\cdot \tag{30}$$

平衡方程

$$[\sigma_{ij}(\delta_j^k + u^k_{,j})]_{,i} + F^k = 0 \qquad (X\in V)\cdot \tag{31}$$

边界条件

$$\begin{aligned}&[\sigma^{ij}(\delta_j^k + u^k_{,j})]n_i + T^k = 0 && (X\in S_\sigma),\\ &u_i = u_i && (x\in S_u)\cdot\end{aligned} \tag{32}$$

初始条件

$$\begin{aligned}&T^i = T^i(0) && (X\in S_\sigma),\\ &u_i = u_i(0) && (X\in S_u),\\ &\omega = \omega_0 && (t=0)\cdot\end{aligned} \tag{33}$$

泛函 构造如下泛函

$$\begin{aligned}J = \int_v\Bigg\{&\dot{\sigma}^{ij}\frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}+\dot{u}_{j,i}) - \frac{1}{2}\dot{\sigma}^{ij}\left[\frac{1+\nu}{E(\omega)}\dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E(\omega)}g_{ij}\dot{\sigma}^{kl}g_{kl}\right] - \\ &\dot{\sigma}^{ij}\frac{3}{2}\left[\int_0^t K(t-\tau,\omega)f(I,\omega)\left(\sigma_{ij}-\frac{1}{3}g_{ij}\sigma^{kl}g_{kl}\right)\mathrm{d}\tau\right]^{\bullet} - \\ &\frac{\nu}{E^2}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\omega}\left[D\int_0^t \Pi(t-\tau)\phi(I,J,\omega)\,\mathrm{d}\tau\right]^{\bullet} g_{ij}\sigma^{kl}g_{kl} + \\ &\frac{1+\nu}{E^2}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\omega}\left[\int_0^t \Pi(t-\tau)\phi(I,J,\omega)\,\mathrm{d}\tau\right]^{\bullet}\dot{\sigma}^{ij}\sigma_{ij} + \\ &\sigma^{ij}\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\left[\frac{1}{2}\dot{\omega}^2 - \dot{\omega}\left[\int_0^t J\,\Pi(t-\tau)\phi(I,J,\omega)\,\mathrm{d}\tau\right]^{\bullet}\right]\Bigg\}\mathrm{d}V - \\ &\int_{S_\sigma}\dot{\bar{T}}^i\dot{u}_i\,\mathrm{d}S + \int_{S_u}\dot{T}^i(\dot{\bar{u}}_i - \dot{u}_i)\,\mathrm{d}S\cdot\end{aligned} \tag{34}$$

变分原理 在任意时刻 t,,在 $\mathrm{d}t$ 增量范围内,满足几何方程(30)、边界条件(31)、状态方程(28)、损伤演变方程(29)及初始条件的真实解使得泛函取驻值,即 $\delta J = 0$•

致谢　作者对于重庆大学张汝清教授在本文写作过程中的指导与帮助深表感谢• 本课题是中国工程物理研究院和结构力学研究所基金资助的, 在此表示感谢•

参　考　文　献

[1] Krajcinovic D, Lemaitre L. Continum Damage Mechanics: Theory and Application. New York: Springer, 1987

[2] 黄西成, 张家鹏• 聚合物材料损伤积累过程[J]• 材料与工程, 中国工程物理研究院, 1995

[3] 黄西成, 张家鹏• 高分子材料粘弹性损伤变分原理[A]. 高分子材料变形损伤和断裂学术会议[C], 北京: 1994

[4] 张汝清• 固体力学变分原理及其应用[M]• 重庆: 重庆大学出版社, 1991

[5] Zhong W X, Zhang R L. The Parametric vaiational principle for elastoplasticity[J]. Acta Mechanica Sinica, 1988, 4: 134~137

Damage Theory for Polymetric Material

Huang Xicheng

China Academy of Engineering Physics, Chengdu 610003, P R China

Abstract: In this paper, the effects of external environment such as corrosion medium, radiation and non_consistent materials on deformation of polymers are discussed. Damage constitutive equations for non_linear elastic and non- linear viscoelastic polymers and a variational principle for viscoelastic damage are also given.

Key words: polymer; damage; variational principle