应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

论文编号: 1000_0887(1999)02_0127_133

动力学系统参数辨识问题最优控制解的理论与方法(Ⅰ)——基本概念及确定性系统参数辨识*

吴志刚[1], 王本利[1], 马兴瑞[2]

[1] 哈尔滨工业大学 航天工程与力学系, 哈尔滨 150001; [2] 中国空间技术研究院, 北京 100081

摘要: 本文基于动力学系统参数辨识问题最优控制解的概念和确定性动力学系统的最优控制理论, 建立了参数辨识研究与最优控制理论的对应关系• 将最优控制的数学理论和算法应用于参数辨识问题的研究• 依据 Hamilton_Jacobi_Bellman (HJB) 方程解的理论阐述了动力学系统参数辨识最优控制解的存在唯一性问题, 并据此得到了解决确定性系统参数辨识问题的具体算法步骤•

关键词: 动力学系统; 参数辨识; 最优控制; HJB 方程
分类号: O322 文献标识码: A

引 言

动力学系统辨识问题是动力学研究的逆问题, 它利用系统在试验和运行中测得的输入_输出数据, 采用系统辨识技术, 建立反映系统本质特性的数学模型, 并辨识出模型中的待定参数• 一般情况下, 系统的动力学方程是已知的, 需要辨识的只是动力学方程中的某些待定参数, 诸如系统的固有频率、振型等模态参数或刚度、阻尼等结构物理参数, 这属于典型的“灰箱问题”•

动力学系统的参数辨识可分为时域方法和频域方法两大类• 基本以现代控制论的平滑、滤波、预测和参数估计理论为基础, 结合动力学系统所满足的微分_差分方程组构造辨识方法• 时域方法包括最大似然法、微分动态规划法、广义卡尔曼滤波法等, 都是直接利用系统激励和响应的时域数据, 采用最小二乘、最大似然、最小方差等参数辨识准则, 并依据这些准则, 将参数辨识问题转化为求指标函数达到极值的优化计算问题• 频域方法一般是利用系统的频率响应曲线、谱或互谱密度等频域数据, 从中提取动力学系统中的待定参数• 一般来讲, 频域方法只适用于线性系统[1]•

本文所提出的动力学系统参数辨识理论与方法属于时域方法, 也利用系统激励和响应的时域数据构成指标函数• 但与上述方法的理论基础有所不同, 是以最优控制的数学理论为基

* 收稿日期: 1997_10_13; 修订日期: 1998_07_06
基金来源: 国防科技“九•五”预研项目资助课题(A966000_50); 国家教委跨世纪优秀人才计划基金资助课题
作者简介: 吴志刚(1971~), 男, 博士生

础, 基于系统辨识问题最优控制解的概念提出的• 这一方法利用了最优控制成熟的数学理论及其最新发展, 构建了相应的动力学系统参数辨识问题最优控制解的理论与方法, 并将参数辨识问题拓宽到更为一般的非光滑动力学系统, 非光滑指标函数范围上• 最后依据这一理论与方法, 给出了用于解决动力学系统参数辨识问题的算法, 本文着重于理论框架的构建, 方法应用的详细内容见作者的其他论文•

1 动力学系统参数辨识问题最优控制解的概念

含有待辨识参数的动力学系统状态方程为:

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t = g(x(t), u(t)), \qquad t \in [0, T], \\ &x(0) = x_0 \in R^n \bullet \end{aligned}\right\} \qquad \text{参数} \tag{1.1}$$

定义参数辨识问题的指标函数为:

$$V(u(\bullet)) = \int_0^T f(x(s), x(s), u(s))\mathrm{d}s + h(x(T)) \bullet \tag{1.2}$$

实际上动力学系统辨识问题的指标函数中末端条件 $h(x(T))$ 并不是必需的, 但为与最优控制理论对应, 以及后面讨论的方便, 这里仍保留了 $h(x(T))$ •

设 R^n, R^r 分别为n 维和 r 维欧氏空间• (1.2) 式中, $x(t) \in R^n$, $(t \in [0, T])$ 为测量到的系统响应时间历程, 在指标函数中作为已知量, 因此后面的讨论中, $f(x(s), x(s), u(s))$ 仅用 $f(x(s), u(s))$ 表示即可• u 为需辨识的系统参数(系统参数可以是时变量), 并且:

$$u(\bullet) \in U_{\mathrm{ad}} \equiv \{u(\bullet): [0, T] \to R^r \quad ,$$

动力学系统状态方程右端函数 $g(\bullet, \bullet)$ 及指标函数$f(\bullet, \bullet)$, $h(\bullet)$ 分别为:

$$g: [0, T] \times R^n \times R^r \to R^n,$$

$$f: [0, T] \times R^n \times R^r \to R,$$

$$h: R^n \to R \bullet$$

系统参数辨识问题就是求满足系统状态方程(1.1) 且使指标函数(1.2) 最小的系统参数 $u^* \in U_{\mathrm{ad}}$ 使

$$V(u^*(\bullet)) = \inf_{u(\bullet) \in U_{\mathrm{ad}}} V(u(\bullet)),$$

很明显这一问题与求系统(1.1) 的最优控制 u 使指标函数(1.2) 最小的最优控制问题存在一一对应的关系• 因而系统参数辨识问题可以利用解决最优控制问题的理论与方法来研究解决• 这样得到的参数称为系统参数辨识问题的最优控制解[2] •

本文将基于这一概念, 给最优控制的数学理论赋予新的物理意义, 构成系统参数辨识问题最优控制解的理论与方法• 鉴于动态规划方法理论的完整性及其所建立的 Hamilton_Jacobi_Bellman 方程与分析力学中 Hamilton_Jacobi 方程的联系[3,4], 本文将采用动态规划方法的理论框架构成系统参数辨识问题最优控制解的理论与方法• 20 世纪 80 年代初期关于 HJB 偏微分方程粘性解概念的引入和粘性解理论的建立, 使得动态规划方法有了严格的数学理论基础[3,4], 同时也拓宽了动力学系统参数辨识问题的研究范围, 这一点文中也将有所涉及•

2 动力学系统参数辨识问题最优控制解的存在唯一性与HJB 偏微分方程

2.1 动态规划方法与 HJB 方程

利用 Bellman 的动态规划方法研究上述动力学系统参数辨识问题的思路为: 对应于(1.1)~(1.2)构成的问题, 研究初始时间和初始状态在区域 $[0, T) \times R^n$ 中任意点的动力学系统参数辨识问题• 亦即动态规划方法把原来的一个系统参数辨识问题, 考虑成为按动力学系统的初值参数化了的一族动力学系统的参数辨识问题, 而这一族动力学系统的参数辨识问题的指标函数满足 HJB 偏微分方程• 如果能求得此方程的解, 就可进一步获得所讨论动力学系统参数辨识问题的最优控制解•

任取 $t \in [0, T]$, 考虑下述系统中参数的辨识问题

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{d}x(s)/\mathrm{d}s = g(x(s), u(s)), \qquad s \in [t, T], \\ &x(t) = x \in R^n \bullet \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

设(2.1)式满足解的存在唯一性条件, 对任何待辨识的系统参数 $u(\bullet) \in U_{\mathrm{ad}}$ 及 $x \in R^n$, (2.1)式存在唯一解, 记作

$$x_{t,x} \equiv x_{t,x}(\bullet, u(\bullet)) \bullet$$

定义上述系统参数辨识问题的指标函数为:

$$V_{t,x}(u(\bullet)) = \int_t^T f(x(s), u(s))\,\mathrm{d}s + h(x_{t,x}(T)), \tag{2.2}$$

此时系统参数辨识问题可表述为: 对任何给定的 $(t, x) \in [0, T) \times R^n$, 寻找 $u^*(\bullet) \in U_{\mathrm{ad}}$, 使得

$$V_{t,x}(u^*(\bullet)) = \inf_{u(\bullet) \in U_{\mathrm{ad}}} V_{t,x}(u(\bullet)) \bullet$$

可以看出, 如果对(1.1)增加解的存在唯一性假设, 则(1.1)~(1.2)所述参数辨识问题可以作为(2.1)~(2.2)所述问题的一个"子问题"• 通过关于时间 $t \in [0, T]$ 而言整体地研究(2.1)~(2.2)所构成的参数辨识问题来得到(1.1)~(1.2)所构成问题的最优控制解的方法, 就是动态规划方法•

记式(2.1)~(2.2)构成的系统参数辨识问题的最优指标函数为:

$$\left.\begin{aligned} &V(t, x) = \inf_{u(\bullet) \in U_{\mathrm{ad}}} V_{t,x}(u(\bullet)), \qquad \forall (t, x) \in [0, T] \times R^n, \\ &V(T, x) \text{ 参数} h(x), \qquad \forall x \in R^n \bullet \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

对上述最优指标函数 $V(t, x)$ 的研究将会提供一条获得系统参数辨识问题最优控制解的途径• 可以严格证明最优指标函数满足下述 Hamilton_Jacobi_Bellman 方程[3, 4]:

确定性动力学系统参数辨识问题的 HJB 方程:

设最优指标函数 $V(t, x) \in C^1([0, T] \times R^n)$, 则其满足下面的抛物型偏微分方程:

$$\left.\begin{aligned} &\partial V(t, x)/\partial t + \inf\left\{f(x, u) + D_x V(t, x) \bullet g(x, u)\right\} = 0, \\ &V(T, x) = h(x) \in C^1(R^n), \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

(2.4)式称为HJB偏微分方程•

2.2 HJB方程的解与参数辨识问题最优控制解的存在唯一性

由HJB方程解的存在唯一性定理将直接得出(2.1)~(2.2)所构成的系统参数辨识问题最优控制解的存在唯一性, 从而为参数辨识问题的解决奠定数学理论基础• 这时要对所讨论的动力学系统右端函数以及指标函数加一定的限制条件:

(G_1) $g(\bullet, \bullet): R^n \times R^r \to R^n$ 连续可微, g_x 有界且存在正常数 g, 满足条件

$$|g(x, u)| \leqslant g(1 + |x| + |u|);$$

(F_1) $f(\bullet, \bullet): R^n \times R^r \to R$ 连续可微,

$$|f(x,u)| \leqslant f_1(1+|x|^2+|u|^2),$$
$$f(x,u) \geqslant f_0|u|^2 - C_1,$$
$$|f_x|,|f_u| \leqslant f_2(1+|x|+|u|),$$ 其中 f_0, f_1, f_2 和 C_1 都是正常数;

(H_1) $h(\cdot): R^n \to R$ 连续可微,
$$|h(x)| \leqslant h_1(1+|x|^2),$$
$$|h_x(x)| \leqslant h_2(1+|x|),$$
$$h(x) \geqslant -h_0,$$ 其中 h_0, h_1, h_2 都是正常数•

定理Ⅰ_1 最优指标函数的性质定理

设 $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 满足条件(G_1)、(F_1)和(H_1),则最优指标函数 $V(t,x)$ 具有下面的性质:

(1) 对几乎一切 x, $D_xV(t,x)$ 存在, 对几乎一切 t, $D_tV(t,x)$ 存在;

(2) $|V(t,x)| \leqslant c_1(1+|x|^2)$,
$$|D_xV(t,x)| \leqslant c_2(1+|x|),$$
$$|D_tV(t,x)| \leqslant c_3(1+|x|^2),$$ 其中, c_1, c_2, c_3 表示具有不同值的正常数• □

上述最优指标函数的性质定理中性质(2)的三个估计式所限定的函数类中, HJB 方程的解可能不唯一• 但对动力学系统状态方程右端函数和指标函数加上进一步的限制条件(G_2)、(F_2)、(H_2)可以得到 HJB 方程解的存在唯一性定理, 亦即参数辨识问题最优控制解的存在唯一性定理•

(F_2) 设 $f(x,u)$ 对变元 (x,u) 是 C^2 类函数, 并且它的二阶偏导数的矩阵是正定矩阵, 即存在与 (x,u) 无关的正常数 α_0 使

$$\begin{bmatrix} f_{xx}(x,u) & f_{xu}(x,u) \\ f_{ux}(x,u) & f_{uu}(x,u) \end{bmatrix} \geqslant \alpha_0 I, \qquad \forall (x,u) \in R^n \times R^r,$$

I 是空间 $R^n \times R^r$ 中的单位矩阵•

(G_2) 设 $g(x,u)$ 是关于 (x,u) 的 C^2 类函数, $g(x,u)$ 的所有二阶偏导数以 $c_0/(1+|x|)$ 为界, c_0 是相对于 α_0 很小的正数•

(H_2) 设 $h(x)$ 的二阶偏导数矩阵 $h_{xx}(x)$ 是非负定的, $h_{xx} \geqslant 0$, 并设 $U = R^r$•

定理Ⅰ_2 系统参数辨识问题最优控制解的存在唯一性定理

在定理Ⅰ_1 成立的条件下, 再加上条件(G_2)、(F_2)、(H_2)• 如果 HJB 偏微分方程

$$\left.\begin{aligned} &\partial V/\partial t + \inf_{u\in U}\{f(x,u) + D_xV(t,x)\cdot g(x,u)\} = 0, \\ &V(T,x) = h(x) \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

在具有定理Ⅰ_1 的性质(2)的三个估计式的函数类中的解 $V(t,x)$ 有二阶连续偏导数, 则 $V(t,x)$ 满足下面的估计式

$$\left.\begin{aligned} &0 \leqslant D_x^2 V \leqslant MI, \qquad M > 0, \\ &|D_xD_tV| \leqslant c(1+|x|), \\ &|D_t^2V| \leqslant c(1+|x|^2), \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

式中的 D_x^2 是矩阵, I 是 R^n 中的单位矩阵•

具有定理Ⅰ_1 的性质和式(2.6)性质的 HJB 方程(2.5)的解 $V(t,x)$ 是存在且唯一的, 并且对于系统参数辨识问题(2.1) ~ (2.2), 对所有的 (t,x) 存在唯一的最优控制解• □

2.3 HJB 方程的粘性解与非光滑动力学系统参数辨识

从前面讨论问题时对系统及指标函数的各项限制条件可见, 上述动力学系统参数辨识问

题是针对具有光滑右端函数的动力学系统及光滑指标函数提出并研究解决的,而实际的动力学系统及其参数辨识问题并不总是满足这些限制条件的• 一般而言,最优指标函数 $V(t,x)$ 未必是 C^1 的,一般的 HJB 方程也未必有光滑解•

在通常称为古典解的概念下,HJB 方程的解可能不是唯一的• 为了用 HJB 方程来刻画 $V(t,x)$,Grandall 和 Lions 引入了粘性解的概念,使得 HJB 方程解的存在性和唯一性问题得到解决[7,8]• 粘性解的概念是对于连续函数类中的函数引入的,除此而外,不要求这种解具有更多的光滑性• 粘性解的引入,扩充了指标函数的范围,减弱了对动力学系统右端函数的限制•对更一般的动力学系统,在更广泛的指标函数类上解决了系统参数辨识问题最优控制解的存在唯一性问题(例如非光滑动力学系统、非光滑指标函数等具有广泛工程实际意义的系统参数辨识问题),为进一步发展参数辨识的方法提供了坚实的数学理论基础•

从下面对系统状态方程右端函数及指标函数的限制条件可以看出在粘性解意义下可研究的问题的广泛性、一般性• 对动力学系统状态方程右端函数 $g(\cdot,\cdot)$ 没有可微性连续性的限制,对指标函数 $f(\cdot,\cdot)$ 也只需要连续即可• 而前面的讨论则有对各项函数一阶、二阶导数的要求,即对系统光滑性的要求•

(G_3) 设 $g(\cdot,\cdot): R^n\times R^r\to R^n$ 可测,g_x 存在有界,存在正常数 g,使得

$$|g(x,u)|\leqslant g(1+|x|+|u|)•$$

(F_3) 设 $f(\cdot,\cdot): R^n\times R^r\to R$ 连续,存在正常数 f_0, f_1, f_2 和 c_0,使得

$$|f(x,u)|\leqslant f_1(1+|x|^2+|u|^2),$$

$$|f(x_1,u)-f(x_2,u)|\leqslant f_2|x_1-x_2|^{\alpha}(1+|x_1|+|x_2|+|u|),$$

$$f(x,u)\geqslant f_0|u|^2-c_0,$$

其中 $0<\alpha\leqslant 1$•

(H_3) 设 $h(\cdot): R^r\to R$, $h(x)\geqslant -c_1$,

$$|h(x)|\leqslant h_1(1+|x|^2),$$

$$|h(x_1)-h(x_1)|\leqslant h_2|x_1-x_2|^{\alpha}(1+|x_1|+|x_2|),$$

其中 $0<\alpha\leqslant 1$, h_1, h_2 和 c_1 是正常数•

为引入 HJB 方程粘性解的概念,需定义以下几个集合:

$C(R_+^1)$ 表示定义在 $[0,\infty)$ 上连续函数全体;

$\varphi(t,x)$ 是定义在 $[0,T]\times R^n$ 上的连续函数,对固定的 (t,x),定义点集

$$D^+\varphi(t,x)=\Big\{(\lambda,\xi)\mid(\lambda,\xi)\in R)\times R^n,\ |\lambda|+|\xi|<\infty,\text{存在常数 } r_0>0 \text{ 和函数 } \rho(\cdot)\in C(R_+^1),\ \rho(0)=0 \text{ 使得 } \varphi(s,y)\leqslant \varphi(t,x)+\xi\cdot(y-x)+\lambda(s-t)+\delta\rho(\delta),\ \text{其中 } \delta=|y-x|+|s-t|,\ \forall y,s \text{ 满足 } \delta\leqslant r_0\Big\},$$

$$D^-\varphi(t,x)=-D^+(-\varphi)(t,x)•$$

引入下述 HJB 偏微分方程

$$\left.\begin{aligned}&D_tV+\inf_u\{f(x,u)+D_xV\cdot g(x,u)\}=0,\\&V(T,x)=h(x)•\end{aligned}\right\}\qquad(2.7)$$

粘性解的定义

设 $V(s,x),(s,x)\in[t,T]\times R^n$ 是连续函数,使得 $V(T,x)=h(x)$• 如果对一切 (λ,ξ)

$\in D^+ V(t,x)(D^- V(t,x))$, $\forall x \in R^n$, $t \in [0,T)$ 满足

$$\lambda + \inf_u \{ f(x,u) + \xi \cdot g(x,u) \} \geqslant 0, \qquad (\leqslant 0), \tag{2.8}$$

则称 $V(t,x)$ 是HJB 偏微分方程(2.7) 的粘性上(下) 解• 如果 $V(t,x)$ 既是HJB 偏微分方程(2.7) 的粘性上解又是粘性下解, 称函数 $V(t,x)$ 是HJB 偏微分方程(2.7) 的粘性解•

如果 $V(t,x)$ 是(2.7) 的粘性解, 则 $V(t,x)$ 在它的所有可微点满足方程(2.7)•

定理Ⅰ_3 粘性解的存在唯一性定理

在(G_3)、(F_3)、(H_3) 假定下, 由式(2.3) 所定义的最优指标函数 $V(t,x)$ 是HJB 偏微分方程(2.7) 的粘性解, 并且该方程的粘性解在下式所定义的函数类中是唯一的•

$$\left.\begin{aligned} &|V(t,x)| \leqslant c e^{-k(T-t)}(1+|x|^2), \\ &|V(t,x_1) - V(t,x_2)| \leqslant c e^{-k(T-t)} |x_1 - x_2|^\alpha (1+|x_1|+|x_2|), \\ &|V(t_1,x) - V(t_2,x)| \leqslant c e^{-k(t_1-t_2)}(1+|x|^2)(|t_1-t_2|^{2(2-\alpha)^{-1}} + k|t_1-t_2|), \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

其中常数 c 与 k 无关, $0 < \alpha \leqslant 1$•

联系定理Ⅰ_2, 上述定理说明了非光滑动力学系统参数辨识问题最优控制解的存在唯一性•

3 确定性动力学系统参数辨识算法[3,5,6]

前面用 HJB 方程解的理论阐述了动力学系统参数辨识问题最优控制解的存在唯一性, 并利用HJB 方程粘性解的概念拓广了系统参数辨识问题的研究范围• 现在讨论获得动力学系统参数辨识问题最优控制解的具体步骤• 这里的讨论针对的是2.2 节研究的系统, 更为一般的利用粘性解概念的具体算法目前正在研究之中[4,7]•

根据下述定理可以得到由HJB 方程的解构造参数辨识问题最优控制解的步骤•

定理Ⅰ_4 动力学系统参数辨识问题最优控制解的结构

设 $V(t,x) \in C^1([0,T] \times R^n)$ 是HJB 偏微分方程

$$\left.\begin{aligned} &\partial V(t,x)/\partial t + \inf_{u \in U} \{ f(x,u) + D_x V(t,x) \cdot g(x,u) \} = 0, \\ &V(T,x) = h(x) \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

的解• $u(t,x)$ 是使Hamilton 函数

$$H(t,x,u) = f(x,u) + D_x V(t,x) \cdot g(x,u)$$

取最小值的系统参数• 并且 $x(t)$, $t \in [0,T]$ 是常微分方程

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t = g(x(t), u(t,x(t))), \qquad t \in (0,T], \\ &x(0) = x_0 \end{aligned}$$

的唯一解, 则 $u(t) = u(t,x(t))$ 是(2.1) ~ (2.2) 式所定义的系统参数辨识问题的最优控制解•

求动力学系统参数辨识题最优控制解的步骤为:

(1) 求解HJB 方程(3.1) 得到 $V(t,x)$;

(2) 求使Hamilton 函数 $H(t,x,u) = f(x,u) + D_x V(s,x) \cdot g(x,u)$ 取最小值的系统参数 $u(t,x)$;

(3) 求解常微分方程

$$\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t = g(x(t), u(t, x(t))), \qquad t \in (0, T],$$
$$x(0) = x_0,$$

得解 $x(t), t \in [0, T]$;

(4) 将第(3)步求得的 $x(t)$ 代入 $u(t, x)$, 令 $u_x(t) = u(t, x(t))$, 根据定理Ⅰ_4, $u_x(t, x)$ 是(2.1) ~ (2.2)式所定义的动力学系统参数辨识问题的最优控制解•

参 考 文 献

[1] 蔡金狮. 动力学系统辨识与建模[M]. 北京: 国防工业出版社, 1991

[2] 黄光远, 刘小军. 数学物理反问题[M]. 济南: 山东科技出版社, 1993

[3] 王康宁. 最优控制的数学理论[M]. 北京: 国防工业出版社, 1995

[4] 雍炯敏. 动态规划与 Hamilton_Jacobi_Bellman 方程[M]. 上海: 上海科技出版社, 1992

[5] Stengel R F. *Stochastic Optimal Control*[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1986

[6] Bryson A E, Ho Yu_Chi. *Applied Optimal Control*[M]. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1975

[7] Crandall M G, Lions P L. Viscosity solutions of Hamilton_Jacobi equations[J]. *Trans Amer Math Soc*, 1983, **277**(1): 1~ 42

[8] Crandall M G, Evans L C, Lions P L. Some properties of viscosity solutions of Hamilton_Jacobi equations[J]. *Trans Amer Math Soc*, 1984, **282**(2): 487~ 502

Theory and Method of Optimal Control Solution to Dynamic System Parameters Identification(Ⅰ)——Fundamental Concept and Deterministic System Parameters Identification

Wu Zhigang[1], Wang Benli[1], Ma Xingrui[2]

[1] Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P R China;

[2] Chinese Academy of Space Technology, Beijing 100081, P R China

Abstract: Based on the concept of optimal control solution to dynamic system parameters identification and the optimal control theory of deterministic system, dynamics system parameters identification problem is brought into correspondence with optimal control problem. Then the theory and algorithm of optimal control are introduced into the study of dynamic system parameters identification. According to the theory of Hamilton_Jacobi_Bellman(HJB) equations' solution, the existence and uniqueness of optimal control solution to dynamic system parameters identification are resolved in this paper. At last, the parameters identification algorithm of deterministic dynamic system is presented also based on above mentioned theory and concept.

Key words: dynamic system; parameters identification; optimal control; HJB equation