

Reissner 厚板弹性弯曲的理性有限元法^{*}孙卫明^{1,2}, 杨光松³¹ 海军工程学院 蒸汽燃气与核动力工程系, 武汉 430033;² 国防科技大学 航天技术系, 长沙 410073; ³ 北京 清河大楼子七 100085

(一皓江推荐)

摘要: 本文在非协调元的修正泛函中引入满足系统微分方程的单元变形模式, 提出了一种将解析方法与数值方法有机结合的理性有限元法。这种新的计算方案合乎单元的力学要求和结构的几何复杂性要求。据此所得的厚板弯曲四边形单元具有计算精度高、可对刚度矩阵精确积分等优点。

关键词: Reissner 厚板; 厚板弹性弯曲; 理性有限元

分类号: O242.21 **文献标识码:** A

引 言

30 年前, 我国和西方的力学工作者沿着不同的道路各自独立地创造发展了一种求解微分方程的现代化系统化的数值方法——有限元法。它首先在弹性结构领域内广泛运用; 并且随着计算机的发展, 程度不同地推广到几乎一切工程行业以及许多科学技术领域, 成为当代计算数学的一项重大成就。有限元的数学基础是变分原理和分割近似原理(或称分片插值方法)。前者作为建立各种有限元模型的依据, 一直受到广大力学工作者的高度重视。如 Hellinger, Reissner, 胡海昌, 鹭津等人就曾提出过某些特殊形式的广义变分原理, 而钱伟长又利用拉氏乘子法, 将建立各级广义变分原理的工作纳入了简明、规范的轨道; 同时 Melosh, Jones, 卞学^[1], Veubeke, 董平等人也积极地将各类修正的变分原理引入自己的有限元研究, 其中卞学^[1]倡导的多变量变分原理更是继往开来, 创造了杂交应力有限元的历史。相比之下, 作为后者的分片插值方法(通常使用线性或低次的多项式)则有些随意和过于简单, 由此导致了不可压缩材料的体积自锁、板壳弯曲单元的剪切自锁等问题。值得借鉴的是, 边界元中的基本解满足系统微分方程, 相应情况就有了很大的改观。

据笔者所知, 国内首先提出用方程的解逼近单元内部场这一思想的是蒋炜(1981), 当时他以满足静力平衡方程及协调条件的多项式通解为单元位移场, 并成功地求解了弹性理论平面问题^[1]。但他只是认为自己的工作相当于一般变分计算中的放松边界条件法, 而没有将其推广到其它的有限元计算。1996 年初, 钟万勰对传统分片插值方法进行批判的同时, 引入了充分考虑力学微分方程需要的理性有限元法^[2]。单元的位移、内力满足系统控制方程, 这合乎力

* 本文曾在 1997 年 8 月 26 日~ 28 日庆祝中国力学学会成立 40 周年纪念大会上作扼要介绍

来稿日期: 1997_05_15; 修订日期: 1997_08_24

作者简介: 孙卫明(1974~)男, 讲师, 硕士

学对单元变形模式的要求;单元可根据计算需要合理剖分,这又合乎结构的几何复杂性要求。因此理性有限元的提出,具有十分深远的意义。但文献[2]选择满足力学微分方程的单元变形模式,并通过分片试验对刚度矩阵和等效节点力进行修正比较繁复、难于推广。为此,本文试图将有限元的两大数学基础——变分原理和分割近似原理有机结合起来,通过单元变形模式的选取和非协调元修正势能的构造两方面来建立系统的理性有限元分析方法。其中单元的变形模式必须满足力学微分方程,这也意味着几百年来力学家们在解析解上的所有成就都可运用到有限元这一现代数值方法中。例如可以选取一些多项式形式的补充解^[3,4]作为节点数固定的三角形元或四边形元的单元内部场;也可以采用多项式级数^[5]或傅立叶级数^[4]形式的通解构造单元自由度可变的扇形^[1]或条形单元;以及利用一些特殊形式的解构造嵌入的奇异单元等。总之,为了适应实际问题的需要,单元变形模式的选取具有很大的灵活性。另一方面,为建立系统对应的广义泛函,只需对文献[6]中的放松交界面连续条件的分区广义变分原理作适当修正即可。由此可见,理性有限元既充分利用了解析方法的成就,又突出了广义变分原理的基础地位,实现了解析方法和数值方法的完美结合。本文给出的厚板弯曲四边形理性有限元也反映了这一方法的优越性质。

1 单元变形模式的选取

在文献[4]中,笔者曾推导了 Reissner 厚板弹性弯曲的一般解析解,其中多项式形式的补充解如下:

$$\left. \begin{aligned} W &= \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^3 a_{ij} x^i y^j + \sum_{i=2}^3 \sum_{j=0}^1 a_{\bar{i}j} x^i y^j, \\ \Phi_x &= -\frac{\partial W}{\partial x} - c \frac{\partial}{\partial x} (\dots^2 W), \\ \text{但他 } \Phi_y &= -\frac{\partial W}{\partial y} - c \frac{\partial}{\partial y} (\dots^2 W), \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

式中 W , Φ_x , Φ_y 分别为厚板中面的挠度和平均转角, a_{ij} 为待定常数,常数 $c = h^2/5(1-\mu)$ 。

若选取(1.1)式为四节点四边形单元的弯曲变形模式,并记 $\mathbf{u} = [W, \Phi_x, \Phi_y]^T$, $\mathbf{a} = [a_{00}, a_{10}, a_{01}, \dots, a_{31}, a_{13}]^T$, 则有

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{a}, \quad (1.2)$$

式中 \mathbf{N} 为 x, y 的函数矩阵。

将节点坐标 (x_i, y_i) 及节点位移 $\mathbf{u}_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 代入(1.2)式,可写出相应的矩阵形式:

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{a}, \quad (1.3)$$

其中 $\mathbf{q} = [u_1^T, u_2^T, u_3^T, u_4^T]^T$, $\mathbf{T}^{-1} = [N_1^T, N_2^T, N_3^T, N_4^T]^T$, 故

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{T}\mathbf{q}, \quad (1.4)$$

上式中,矩阵 $\mathbf{N}\mathbf{T}$ 相当于一般有限元中的插值函数。

由此可得单元内应变

$$\mathbf{e} = \mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{T}\mathbf{q} \quad (1.5)$$

以及单元内力

$$\mathbf{H} = \mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{T}\mathbf{q}, \quad (1.6)$$

其中 \mathbf{L} 为一微分算子矩阵, \mathbf{D} 为厚板的弯曲刚度矩阵。

进而若设边界外法线 \mathbf{n} 与 x 轴夹角为 θ , 则该方向广义位移和内力分别为:

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{R}_u \mathbf{u}, \mathbf{H}_n = \mathbf{R}_H \mathbf{H}, \quad (1.7)$$

$\mathbf{R}_u, \mathbf{R}_H$ 均为与 θ 有关的转换矩阵。

2 广义变分原理

按照上节选取单元变形模式, 则单元之间并不一定协调, 因此特建立放松单元界面连续性要求^[6]的广义泛函:

$$\Pi = \sum_m \left\{ \iint_{\Omega_m} \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{D} \mathbf{e} d\Omega - \iint_{\Omega_m} \mathbf{u}^T \mathbf{p} d\Omega + \int_{S_\sigma^{(m)}} \mathbf{u}_n^T \mathbf{H}_n dS + \sum_m \int_{S^{(mm')}} \frac{1}{2} \mathbf{u}_n^{(m)T} (\mathbf{H}_n^{(m)} + \mathbf{H}_n^{(m')}) dS \right\}, \quad (2.1)$$

上式中 $S_\sigma^{(m)}$ 为单元 m 中的应力边界, $S^{(mm')}$ 为单元 m 与其相邻单元 m' 的共有边界。将(1.4)~(1.7)式代入, 则(2.1)式可写成:

$$\Pi = \sum_m \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{q}^{(m)T} \mathbf{K}^{(m)} \mathbf{q}^{(m)} + \frac{1}{2} \sum_m \mathbf{q}^{(m)T} \mathbf{K}^{(mm')} \mathbf{q}^{(m')} - \mathbf{q}^{(m)T} \mathbf{Q}^{(m)} \right\}, \quad (2.2)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(m)} &= \iint_{\Omega_m} (\mathbf{LNT})^{(m)T} (\mathbf{DLNT})^{(m)} d\Omega + \sum_m \int_{S^{(mm')}} (\mathbf{NT})^{(m)T} (\mathbf{R}_u^T \mathbf{R}_H)^{(m)} (\mathbf{DLNT})^{(m)} dS, \\ \mathbf{K}^{(mm')} &= \int_{S^{(mm')}} (\mathbf{NT})^{(m)T} (\mathbf{R}_u^T \mathbf{R}_H)^{(m)} (\mathbf{DLNT})^{(m')} dS, \\ \mathbf{Q}^{(m)} &= \iint_{\Omega_m} (\mathbf{NT})^{(m)T} \mathbf{p} d\Omega - \int_{S_\sigma^{(m)}} (\mathbf{R}_u \mathbf{NT})^{(m)T} \mathbf{H}_n dS. \end{aligned}$$

上述刚度矩阵中被积函数为不超过 6 次的多项式, 故可对其实现四点高斯精确积分。

(2.2) 式可组合成整体矩阵方程

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{Q}, \quad (2.3)$$

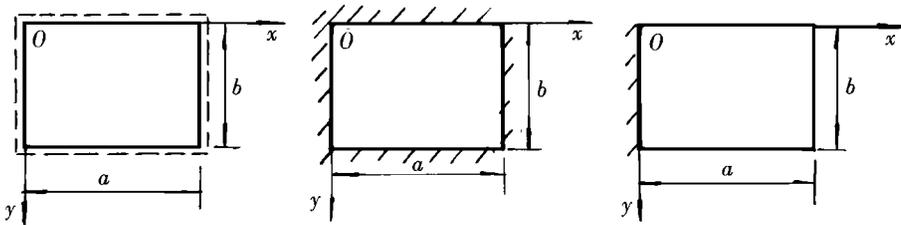
泛函中 \mathbf{K} 并不是对称矩阵, 其驻值条件给出

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{Q}, \quad (2.4)$$

其中 $\mathbf{K} = (\mathbf{K} + \mathbf{K}^T)/2$ 。

3 算例分析

笔者针对四边简支(SSSS)、四边固支(CCCC)、悬臂以及角点支承四种边界条件, 在微机上进行了计算验证; 并着重对上述四边形十二自由度单元的数值收敛性、正确性和有效性作了考察。



(a) 四边简支

(b) 四边固定

(c) 悬臂

图 1 几种典型的边界条件

3.1 数值收敛性

考虑如图 1(a), (b) 两种不同支撑条件下, 厚板承受均布荷载时的弯曲。计算参数为 $\mu = 0.3, b/a = 1.0, h/a = 0.3$ 。由于对称性, 仅取四分之一板进行计算, 并依次采用 $1 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 3, 4 \times 4, 6 \times 6, 8 \times 8$ 的网格。从表 1 可以看出, 两种边界条件下, 最大挠度和中心弯矩都收敛得很快, 这表明本文所得单元收敛性良好。

表 1 厚板中心挠度 ($W = 10^{-2}\alpha qa^4/Eh^3$) 和中心弯矩 ($M = 10^{-2}\beta qa^2$) 收敛情况

		1×1	2×2	3×3	4×4	6×6	8×8	解析解 ^[4]
W(α)	SSSS	7.696 5	6.671 9	6.414 4	6.313 6	6.235 4	6.205 8	6.194 5
	CCCC	3.944 1	3.374 2	3.256 1	3.212 4	3.179 0	3.166 5	
M(β)	SSSS	6.923 6	5.208 3	4.962 8	4.885 2	4.832 9	4.815 0	4.929 7
	CCCC	4.620 6	2.751 1	2.503 0	2.424 1	2.371 4	2.353 8	

3.2 正确性

对于图 1 所示边界条件, 采用 8×8 网格分别对四分之一板(图 1a,b)和二分之一板(图 1c) 进行计算 ($\mu = 0.3$), 计算结果如表 2、3。表 2 中, 当厚跨比 h/a 在很宽的范围 ($0.0001 \sim 0.4$) 变动时, 本文所得厚板中心挠度系数与参考值完全吻合。表 3 中本文所得悬臂板自由边的挠度系数也与文献[7] 基本一致, 但 h/a 很小时, 本文结果更接近于级数解^[8] 和有限元修正解^[9]。

表 2 受中心集中力作用的方板的中心挠度系数 $\alpha (W = 10^{-2}\alpha Pa^2/D)$

h/a	简支方板					固支方板			
	本文	文献[7]	文献[10]	文献[11]	薄板解	本文	文献[7]	等参元	薄板解
0.000 1	1.170 8	1.155			1.160	0.570 0	0.541		0.560 0
0.010 0	1.172 5	1.156	1.170	1.160	1.160	0.571 8	0.543	0.556	0.560 0
0.100 0	1.335 9	1.294	1.353	1.354	1.160	0.738 6	0.686	0.730	0.560 0
0.200 0	1.827 8	1.708	1.801	1.943	1.160	1.233 8	1.107	1.232	0.560 0
0.400 0	3.793 9	3.360			1.160	3.201 9	2.767	3.210	0.560 0

表 3 受均布载荷的方形悬臂板自由边 ($x = a$) 处的挠度系数 $\alpha (W = 10^{-1}\alpha qa^4/Eh^3)$

h/a	y = 0.5a		y = 0.25a		y = 0	
	本文	文献[7]	本文	文献[7]	本文	文献[7]
0.000 1	1.290 8	1.288	1.285 2	1.282	1.271 0	1.266
0.010 0	1.290 8	1.288	1.285 4	1.282	1.271 2	1.266
0.100 0	1.304 1	1.306	1.298 5	1.299	1.284 1	1.282
0.200 0	1.340 8	1.349	1.334 5	1.342	1.320 4	1.325
0.400 0	1.484 4	1.503	1.478 5	1.495	1.463 8	1.477
级数解	1.310 2		1.305 6		1.293 3	
有限元修正解	1.290 5		1.285 1		1.270 8	

3.3 有效性

计算方案的实用性很大程度上取决于一些特定情况下的内力收敛性。我们采用算例 2 的计算参数, 对于承受均布载荷的角点支承板进行分析(见表 4)。计算结果集中体现了本文所选单元变形模式的合理性。

表 4 角点支承方板的挠度系数 $\alpha (W = 10^{-2}\alpha qa^4/Eh^3)$ 和弯矩系数 $\beta (M = 10^{-1}\beta qa^2)$

h/a	边界中点				方板中心			
	α		β		α		β	
	本文	文献[7]	本文	文献[7]	本文	文献[7]	本文	文献[7]
0.000 1	1.765 1	1.70	1.532 0	1.463	2.536 1	2.45	1.123 6	1.061
0.010 0	1.766 7	1.72	1.563 3	1.465	2.537 5	2.46	1.122 7	1.061
0.100 0	1.964 5	1.88	1.721 6	1.556	2.723 4	2.60	1.112 8	1.053
0.200 0	2.410 0	2.29	1.716 4	1.600	3.183 0	3.01	1.110 9	1.038
0.400 0	4.144 6	3.77	1.711 4	1.551	4.992 0	4.53	1.110 1	1.014
矩形单元	1.65		1.49		2.32		1.08	
Marcus 解	1.80		1.54		2.81		1.10	

4 结 论

本文首次提出了在非协调元的修正泛函中引入满足系统微分方程变形模式的思想, 并相应给出了建立一般理性有限元的具体步骤。按照理性有限元法可建立各种不同的单元, 如一般的三角形元、四边形元, 还有较特殊的条形元、扇形元等。这些单元通常都有十分优越的性质, 如本文提出的厚板弯曲四边形单元计算精度高、适用范围广, 且可实现刚度矩阵的精确积分。

本文工作得到了郝松林教授的热情鼓励和亲切指导, 在此表示衷心感谢!

参 考 文 献

- [1] 蒋炜. 有限单元_放松边界条件法解弹性理论平面问题[J]. 力学学报, 1981, **13**(3): 236~ 247
- [2] 钟万勰, 纪峥. 理性有限元[J]. 计算结构力学及其应用, 1996, **13**(1): 1~ 8
- [3] 黄炎. 弹性薄板理论[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1992, 31~ 39
- [4] 孙卫明, 杨光松. Reissner 厚板弹性弯曲的一般解析解[J]. 应用数学和力学, 1998, **19**(1): 79~ 87
- [5] 蒋炜. 弹性理论平面问题中由应力函数积分位移分量的一般方法[J]. 上海力学, 1980, **1**(1): 23~ 37
- [6] 钱伟长. 广义变分原理[M]. 上海: 知识出版社, 1985, 228~ 256
- [7] 丁皓江, 周卫宇, 孙丽波. 一种新型的平板弯曲单元[J]. 力学学报, 1986, **18**(5): 421~ 429
- [8] 张福范. 均布载荷下悬臂矩形板的弯曲[J]. 应用数学和力学, 1980, **1**(3): 349~ 362
- [9] 吴良芝. 结构有限元的修正解[J]. 固体力学学报, 1981, **2**(4): 457~ 467
- [10] 浙江大学. 平板分析中的有限元法译文集[C]. 1973: 87~ 109
- [11] 王家林. 8点超参板壳单元的改进[J]. 吉林工业大学学报, 1982, (1): 1~ 11

Rational Finite Element Method for Elastic Bending of Reissner Plates

Sun Weiming^{1,2}, Yang Guangsong³

¹Department of Steam, Gas and Nuclear Power Engineering, Naval Academy
of Engineering, Wuhan 430033, P R China;

²Department of Astronautics, National University of Defence Technology, Changsha 410073, P R China;

³Mailbox 7, Qinhe Building, Beijing 100085, P R China

Abstract: In this paper, some deformation patterns defined by differential equations of the elastic system are introduced into the revised functional for the incompatible elements. And therefore the rational FEM, which is perfect combination of the analytic methods and numeric methods, has been presented. This new approach satisfies not only the mechanical requirement of the elements but also the geometric requirement of the complex structures. What's more the quadrilateral element obtained accordingly for the elastic bending of thick plates demonstrates such advantages as high precision for computation and availability of accurate integration for stiffness matrices.

Key words: thick Reissner plates; elastic bending of thick plates; rational finite element method