应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

论文编号: 1000_0887(1999)02_0217_219

一类拟线性椭圆型方程下解的先验估计*

王向东[1], 韩普宪[2], 梁 廷[3]

[1] 郑州轻工业学院 基础部, 郑州 450002; [2] 许昌教育学院, 河南 许昌 461000;
[3] 中山大学 数学系, 广州 510275

(许政范推荐)

摘要: 本文在一定的结构条件下, 对如下形状的拟线性椭圆型方程

$$\int_G\left\{\nabla v\cdot \boldsymbol{A}(x,u,\nabla u)+vB(x,u,\nabla u)\right\}\mathrm{d}x=0,\qquad \forall v\in \mathring{W}^1_p(G)$$

的下解作出了新的先验估计, 发展了 Gilbarg_Trudinger 的某些结果.

关键词: 椭圆方程; 下解; 先验估计
分类号: O175.26 文献标识码: A

设 G 是 n 维欧氏空间 E^n 中的有界区域, 在 G 中考虑下面形状的椭圆方程

$$\int_G\left\{\nabla v\cdot \boldsymbol{A}(x,u,\nabla u)+vB(x,u,\nabla u)\right\}\mathrm{d}x=0,\qquad \forall v\in \mathring{W}^1_p(G),\tag{1}$$

其中 $u\in W^1_p(G)$, $1<p<n$, $\boldsymbol{A}(x,u,\xi)$ 和 $B(x,u,\xi)$ 是定义在 $G\times E^1\times E^n$ 上的函数, 对固定的 x 关于 u, ξ 连续, 而对固定的 u, ξ 关于 x 可测并分别满足

$$\left.\begin{aligned}&\nabla u\cdot\boldsymbol{A}(x,u,\nabla u)\geqslant|\nabla u|^p-d(x)|u|^p-f_0(x),\\&|\boldsymbol{A}(x,u,\nabla u)|\leqslant\kappa|\nabla u|^{p-1}+b(x)|u|^{p-1}+f_1(x),\\&|B(x,u,\nabla u)|\leqslant c(x)|\nabla u|^{p-1}+d(x)|u|^{p-1}+f_2(x),\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

其中 $\kappa\geqslant 1$ 为常数, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ 和 $f_i(x)$ $(i=0,1,2)$ 是 G 上的非负函数且满足如下条件:

$$b(x)\in L_{n/(p-1)}(G),\ c(x)\in L_{n/(1-\sigma)}(G),\ d(x)\in L_{n/(p-\sigma)}(G),\quad \sigma\in(0,1),\tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}&f_i(x)\in L_{s_i}(G),\qquad (i=0,1,2),\\&s_0\geqslant 1,\ s_1\geqslant\frac{p}{p-1},\ s_2\geqslant\frac{np}{np-(n-p)}.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

称 $u\in W^1_p(G)$ 为方程(1) 的下解, 如果有

$$\int_G\left\{\nabla v\cdot \boldsymbol{A}(x,u,\nabla u)+vB(x,u,\nabla u)\right\}\mathrm{d}x=0,$$
$$\forall v\in \mathring{W}^1_p(G),\ v\geqslant 0.\tag{1$'$}$$

由[1]或[2]知, 若 $u\in W^1_p(G)$ 是方程(1) 的下解且存在常数 M, 使

* 收稿日期: 1996_10_11; 修订日期: 1997_04_01
作者简介: 王向东(1962~), 男, 教授, 从事非线性分析理论研究

$$(u-M)^+ = \max(u-M,0) \in \mathring{W}{}^1_p(G), \tag{5}$$

那么成立如下断言:

(ⅰ) 若出现在(4)中的 s_0, s_2 满足

$$1 \leqslant s_0 < \frac{n}{p},\ \frac{1}{s_2} = \left(\frac{p-1}{p}\right)\frac{1}{s_0} + \frac{1}{n}, \tag{6}$$

那么

$$(u-M)^+ \in L_{\hat{q}}(G),\ \frac{1}{\hat{q}} = \frac{1}{ps_0} - \frac{1}{n} = \left(\frac{p}{p-1}\right)\left(\frac{1}{ps_2} - \frac{1}{n}\right) > 0, \tag{7}$$

并且有

$$\begin{aligned}\|(u-M)^+\|_{L_{\hat{q}}(G)} \leqslant C\{&\|(u-M)^+\|_{L_1(G)} + |M| + \\ &\|f_0\|^{1/p}_{L_{s_0}(G)} + \|f_2\|^{1/(p-1)}_{L_{s_2}(G)}\},\end{aligned} \tag{8}$$

其中常数 $C > 0$ 与 u, M 及 $f_i\ (i = 0, 1, 2)$ 无关;

(ⅱ) 若 $s_0 > n/p,\ s_2 > n/p$, 则 $(u-M)^+ \in L_\infty(G)$, 并且

$$\begin{aligned}\|(u-M)^+\|_{L_\infty(G)} \leqslant C\{&\|(u-M)^+\|_{L_1(G)} + |M| + \\ &\|f_0\|^{1/p}_{L_{s_0}(G)} + \|f_2\|^{1/(p-1)}_{L_{s_2}(G)}\}.\end{aligned} \tag{9}$$

倘若补充假定

$$b(x) = d(x) = 0, \tag{10}$$

那么代替(8)和(9), 分别成立

$$\|(u-M)^+\|_{L_{\hat{q}}(G)} \leqslant C\{|M| + \|f_0\|^{1/p}_{L_{s_0}(G)} + \|f_2\|^{1/(1-p)}_{L_{s_2}(G)}\}, \tag{8$'$}$$

其中 s_0, s_2 满足(6)而 $\hat{q}$ 仍由(7)决定;

$$\|(u-M)^+\|_{L_\infty(G)} \leqslant C\{|M| + \|f_0\|^{1/p}_{L_{s_0}(G)} + \|f_2\|^{1/(1-p)}_{L_{s_2}(G)}\}, \tag{9$'$}$$

其中的 $s_0, s_2 > n/p$.

断言(9)$'$可见 Gilbarg_Trudinger[1]第 9 章定理 9.7, 然而断言(8)$'$在过去的文献中未见到过, 而且[1]中用于证明(9)$'$的方法不能用来证明(8)$'$. 本文则指出当补充假定(10)成立时, $\|(u-M)^+\|_{L_1(G)}$ 可以估计出来, 然后(8)$'$和(9)$'$可以分别由(8)和(9)得到. 即有

定理 设 $u \in W^1_p(G)$ 是方程(1)的下解并且满足条件(5), 又设条件(2)~(4)和(10)成立, 则有

$$\|(u-M)^+\|_{L_q(G)} \leqslant C\{|M| + \|f_0\|^{1/p}_{L_1(G)} + \|f_2\|^{1/(p-1)}_{L_{np/(np-(n-p))}(G)}\}, \tag{11}$$

其中常数 $C > 0$ 与 u, M 及 f_i 无关, 且 $1/q = 1/p - 1/n$.

参 考 文 献

[1] Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order [M]. New York, Heidelberg: Springer_Verlag, 1977, 327~340

[2] Ladyzhenskaya O A, Uraltseva N N. Linear and Quasilinear Elliptic Equations [M]. New York: Academic Press, 1968, 275~281 (English version)

A Priori Estimate for Lower Solutions of a Class Quasilinear Elliptic Equations

Wang Xiangdong[1], Han Puxian[2], Liang Xiting[3]

[1]Zhengzhou Institute of Light Industry, Zhengzhou 510275, P R China;

[2]Xuchang Eduction College, Xuchang, Henan 461000, P R China;

[3]Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, P R China

Abstract: A new priori estimate of lower solution is made for the following quasilinear elliptic equation:

$$\int_G \left\{ \nabla v \cdot \mathbf{A}(x, u, \nabla u) + vB(x, u, \nabla u) \right\} \mathrm{d}x = 0, \qquad \forall v \in \mathring{W}^1_p(G) \cdot$$

The result presented in this paper enriches and extends the corresponding result of Gilbarg_Trudinger.

Key words: elliptic equation; lower solution; priori estimate