应用数学和力学, 第 20 卷 第 1 期(1999 年 1 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

论文编号: 1000_0887(1999) 01_0071_78

交替方向隐格式稳定性和收敛性的改进*

程爱杰

山东大学数学系, 济南 250100

(苏煜城推荐)

摘要: 交替方向隐格式是数值求解高维抛物型方程的主要方法之一, 考虑二维变系数抛物型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f$$

本文研究两个著名的交替方向隐式差分格式——P_R 格式和 Douglas 格式的稳定性和收敛性, 对常系数情形(即函数 a 和 b 均为常数), 文献已证明了按离散 L^2 范数的绝对稳定性和二阶收敛性, 结论是完善的, 但所用 Fourier 分析方法不能推及一般变系数问题• 文献采用了能量方法研究 P_R 格式的稳定性和收敛性, 但由于目的是 L^2 估计以及使用了" L^2 范数与 H^1 半范数等价", 所得到的 L^2 稳定性和收敛性结论是很不完善的• 本文采用 H^1 能量估计方法, 证明了格式按离散 H^1 范数是稳定的, 并且收敛阶为 $O(\Delta t^2 + h^2)$, 改进了已有结果•

关键词: P_R 格式; Douglas 格式; 变系数抛物型方程; H^1 能量估计方法; 稳定性和收敛性

分类号: O241.82 文献标识码: A

引 言

交替方向隐式差分格式产生于五十年代, 至今仍是数值求解高维问题的主要方法之一• 原有的关于交替方向隐格式的稳定性、收敛性某些结论并不完善, 本文将进一步研究并改进这些结论•

考虑如下二维变系数抛物方程初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(a(x,y,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(b(x,y,t)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = f(x,y,t) \\ \qquad\qquad ((x,y) \in \Omega,\ t \in (0,T]), & (1) \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) \qquad ((x,y) \in \Omega), & (2) \\ u(x,y,t) = 0 \qquad ((x,y) \in \partial\Omega,\ t \in (0,T]), & (3) \end{cases}$$

其中, $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ 为平面方形域, a, b, f, u_0 为已知函数•

* 收稿日期: 1996_09_09; 修订日期: 1998_10_06
基金来源: 山东省自然科学基金资助(Y197A01008)
作者简介: 程爱杰(1965~), 男, 副教授

对 Ω 进行网格划分, x, y 方向网格步长均取为h, $x_i = ih$, $y_j = jh$, $0 \leqslant i, j \leqslant N$, $N = \dfrac{1}{h}$ 为正整数, 时间步长取为 Δt, $t^n = n\Delta t$, 记 $w_{ij} = w(x_i, y_j)$, $w^n = w(t^n)$, $w_{ij}^n = w(x_i, y_j, t^n)$, 用 $\bar{\delta}_x$, δ_x 表示x 方向的一阶向后、向前差商算子, $\bar{\delta}_x(a\delta_x)$ 表示二阶中心差商算子, d_t 表示时间方向上的差商算子, 即

$$d_t w^n = \frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t},$$

$$\bar{\delta}_x w_{ij} = \frac{w_{ij} - w_{i-1,j}}{h}, \qquad \delta_x w_{ij} = \frac{w_{i+1,j} - w_{ij}}{h},$$

$$\bar{\delta}_x(a\delta_x w)_{ij} = \bar{\delta}_x(a\delta_x) w_{ij} = h^{-2}[a_{i+\frac{1}{2},j}(w_{i+1,j} - w_{ij}) - a_{i-\frac{1}{2},j}(w_{ij} - w_{i-1,j})],$$

$$a_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{a_{i+1,j} + a_{ij}}{2}.$$

类似定义 y 方向差商算子 $\bar{\delta}_y$, δ_y, $\bar{\delta}_y(b\delta_y)$, $b_{i,j+\frac{1}{2}}$.

用 U 表示差分解, P_R 格式源于如下可分裂格式

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2}\bar{\delta}_x(a^{n+\frac{1}{2}}\delta_x)\right)\left(1 - \frac{\Delta t}{2}\bar{\delta}_y(b^{n+\frac{1}{2}}\delta_y)\right) d_t U_{ij}^n = [\bar{\delta}_x(a^{n+\frac{1}{2}}\delta_x) + \bar{\delta}_y(b^{n+\frac{1}{2}}\delta_y)] U_{ij}^n + f_{ij}^{n+\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

其中, $a^{n+\frac{1}{2}} = a(t^{n+\frac{1}{2}})$, $t^{n+\frac{1}{2}} = (n + \frac{1}{2})\Delta t$, $b^{n+\frac{1}{2}}$、$f^{n+\frac{1}{2}}$ 类似. 引进中间变量 $U^{n+\frac{1}{2}}$, (4) 可分裂成如下交替方向隐格式

$$\begin{cases} \dfrac{U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - U_{ij}^n}{\Delta t/2} - \bar{\delta}_x(a^{n+\frac{1}{2}}\delta_x) U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\delta}_y(b^{n+\frac{1}{2}}\delta_y) U_{ij}^n = f_{ij}^{n+\frac{1}{2}}, & (5) \\ \dfrac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} - \bar{\delta}_x(a^{n+\frac{1}{2}}\delta_x) U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\delta}_y(b^{n+\frac{1}{2}}\delta_y) U_{ij}^{n+1} = f_{ij}^{n+\frac{1}{2}}, & (6) \end{cases}$$

这就是著名的 P_R 格式[1], 是最早的关于抛物型方程的交替方向隐格式.

(4) 可按另一种方式分裂, 得到著名的 Douglas 格式[2]

$$\begin{cases} \dfrac{U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - U_{ij}^n}{\Delta t} - \bar{\delta}_x(a^{n+\frac{1}{2}}\delta_x) \dfrac{U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + U_{ij}^n}{2} - \bar{\delta}_y(b^{n+\frac{1}{2}}\delta_y) U_{ij}^n = f_{ij}^{n+\frac{1}{2}}, & (7) \\ \left(1 - \dfrac{\Delta t}{2}\bar{\delta}_y(b^{n+\frac{1}{2}}\delta_y)\right)(U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^n) = (U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - U_{ij}^n). & (8) \end{cases}$$

不论是 P_R 格式还是 Douglas 格式, 都等价于格式(4), 它们都具有一维隐式形式, 实际计算只需求解三对角线性代数方程组.

1 稳定性、收敛性的已有结论

考虑到边界条件(3) 是齐次的, 定义离散 L^2 内积及范数

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i,j=1}^{N-1} v_{ij} \cdot w_{ij} \cdot h^2, \qquad \| v \|_h = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Peaceman D. W. 和 Rachford H. H. 在关于 P_R 格式的奠基性论文[1] 中, 采用 Fourier 分析方法研究了模型问题(系数 a、b 均为 1) 的稳定性和收敛性, 但 Fourier 分析方法并不适用于一般变系数问题. 借鉴偏微分方程理论中的能量方法, Lees M.[3] 最早引入能量估计方法研究差分格式的性质, 此后能量方法逐渐成为数值分析的主要手段之一. 在交替方向隐格式

理论分析中首先使用能量方法的是 Lees M.[4], 从方法论上看, 能量方法的引入使我们能够有效地解决传统的 Fourier 分析无法处理的问题, 但该文关于 P_R 格式稳定性结论是

$$\| U^n \|_h^2 \leqslant [4\xi - 8\lambda + (1 + 4\lambda)^2] \| U^0 \|_h^2 \tag{1.1}$$

其中, $\lambda = \Delta t / h^2$ 为网比•

$$\zeta = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & (\text{当 } 4\lambda \leqslant 1), \\ 4\lambda - \dfrac{1}{2} & (\text{当 } 4\lambda > 1) \cdot \end{cases}$$

此结论被作者称为按范数 $\|\cdot\|_h$ 无条件稳定性, 但注意一下右端乘子与网比 λ 有关, 所以其所谓"无条件稳定"并不是对任何网比都一致的稳定, 当 Δt 固定而 h 趋于 0 时, $\| U^n \|_h$ 可能无限制地增大, 也就无稳定可言; 只有当 λ 小于任一给定常数时, 才能保证格式是稳定的• 文中关于收敛性结论似乎更严重, 其结论为

$$\| (u - U)^n \|_h^2 \leqslant (c + \zeta) \sum_{k=1}^{n} \| R^k \|_h^2 \Delta t, \tag{1.2}$$

其中, c 为常数, ζ 同上; R 为截断误差, $| R | = O(\Delta t^2 + h^2)$, 很显然, 由于受 ζ 的影响, 其收敛阶达不到 $O(\Delta t^2 + h^2)$, 比如当 $\Delta t = O(h)$ 时, 其收敛阶仅为 $O\left(\dfrac{\Delta t^{\frac{1}{2}}}{h}(\Delta t^2 + h^2)\right)$, 造成这种不理想结论的原因有两个, 一是作者目的是 L^2 估计, 其次是使用了所谓"L^2 范数与 H^1 半模的等价性"(原文引理 2), 而这一等价性与网比有关•

Douglas 格式发表于 1962 年[2], 其数值分析同样仅限于常系数模型问题, 所用 Fourier 分析方法难以推广到一般变系数问题• Douglas J. Jr. 和 Gunn J. E. 在 1964 年发表的总结性论文[5]中, 把交替方向隐格式纳入一个统一公式, 沿用了 Fourier 分析方法, 虽然研究对象包括了一般变系数问题, 然而结论相当弱; 首先是一般性地给出了稳定性的充分条件($\Delta t h^{-4}$ 足够小), 这一条件太过苛刻, 另外, 为了克服算子 $\delta_x(a\delta_x)$ 与 $\delta_y(b\delta_y)$ 不可交换性带来的困难, 作者定义了一个与 Δt 有关的范数《•》, 得到了格式按此范数的稳定性, 原文作者指出, 并不存在一个与 Δt 和 h 无关的范数与《•》等价; 由此可见, 作为稳定性使用范数《•》未免过于牵强甚至背离稳定性原意• Lees M. 在对此文的评述中[6]指出对一般变系数问题仍需进一步研究; 据查阅, 包括原苏联数学家的工作[7, 8]在内, 尚未发现更好的结论•

本文试图进一步研究前述两交替格式, 采用能量方法, 与文献不同的是, 我们的目标不是 L^2 模估计而是 H^1 模估计• 本文结论是, 当 Δt 小于某个与函数 a, b 有关的常数时, 格式 (4) 按离散 H^1 范数是稳定的, 同时证明了最佳收敛阶 $O(\Delta t^2 + h^2)$• 我们的结论不需要在时间步长 Δt 和空间步长 h 之间加任何限制; 而且所得收敛性包含了文献中相应结论, 并有本质性改进•

2 稳定性分析

对函数 a, b 作如下基本假定, 存在正常数 a_*, a^*, b_*, b^*, a_t, b_t 使得

$$a_* \leqslant a(x, y, t) \leqslant a^*, \qquad b_* \leqslant b(x, y, t) \leqslant b^*,$$

$$\left| \frac{\partial a}{\partial x} \right| \leqslant a_1, \qquad \left| \frac{\partial a}{\partial y} \right| \leqslant a_1,$$

$$\left| \frac{\partial b}{\partial x} \right| \leqslant b_1, \qquad \left| \frac{\partial b}{\partial y} \right| \leqslant b_1,$$

$$\left|\frac{\partial a}{\partial t}\right| \leqslant a_t, \qquad \left|\frac{\partial b}{\partial t}\right| \leqslant b_t,$$

对 $(x, y) \in \Omega$, $t \in [0, T]$ 一致成立·

采用记号

$$|w^n|_{1x} = \Big[\sum_{i,j=0}^{N-1} a^n_{i+\frac{1}{2},j} \cdot (\delta_x w^n_{ij})^2 \cdot h^2\Big]^{\frac{1}{2}},$$

$$|w^n|_{1y} = \Big[\sum_{i,j=0}^{N-1} b^n_{i,j+\frac{1}{2}} \cdot (\delta_y w^n_{ij})^2 \cdot h^2\Big]^{\frac{1}{2}},$$

$$|w^n|_{h1} = (|w^n|^2_{1x} + |w^n|^2_{1y})^{\frac{1}{2}},$$

$$\|w^n\|_{h1} = (\|w^n\|^2_h + |w^n|^2_{h1})^{\frac{1}{2}},$$

此处 $\|\cdot\|_{h1}$ 为离散 H^1 范数, 与函数 $a(x, y, t)$, $b(x, y, t)$ 有关, 下面给出另一个离散 H^1 范数

$$|||w|||_{h1} = \Big\{\|w\|^2_h + \sum_{i,j=0}^{N-1}[(\delta_x w_{ij})^2 + (\delta_y w_{ij})^2] \cdot h^2\Big\}^{\frac{1}{2}},$$

它与前面定义的范数 $\|\cdot\|_{h1}$ 是等价的, 易知

$$\frac{1}{1+a^*+b^*}\|w\|^2_{h1} \leqslant |||w|||^2_{h1} \leqslant \left(1+\frac{1}{a_*}+\frac{1}{b_*}\right)\|w\|^2_{h1} \tag{2.1}$$

引理 2.1(分部求和公式) 若对 $0 \leqslant j \leqslant N$ 有 $w_{0j} = w_{Nj} = 0$, 则

$$-\sum_{i=1}^{N-1}\delta_x(a\delta_x)v_{ij} \cdot w_{ij} = \sum_{i=0}^{N-1} a_{i+\frac{1}{2},j} \cdot \delta_x v_{ij} \cdot \delta_x w_{ij} \tag{2.2}$$

下面研究(4)的稳定性, 考察右端为齐次的方程, 令(4)与 $d_t U^n$ 作离散 L^2 内积, 有

$$\langle d_t U^n, d_t U^n\rangle - \Big\langle \delta_x(a^{n+\frac{1}{2}}\delta_x)\frac{U^{n+1}+U^n}{2}, d_t U^n\Big\rangle -$$
$$\Big\langle \delta_y(b^{n+\frac{1}{2}}\delta_y)\frac{U^{n+1}+U^n}{2}, d_t U^n\Big\rangle +$$
$$\frac{\Delta t^2}{4}\langle \delta_x(a^{n+\frac{1}{2}}\delta_x)\delta_y(b^{n+\frac{1}{2}}\delta_y)d_t U^n, d_t U^n\rangle = 0 \tag{2.3}$$

左端项依次为 A_1, A_2, A_3, A_4; 显然

$$A_1 = \|d_t U^n\|^2_h$$

利用引理 2.1, 并注意到齐次边界条件, 有

$$A_2 = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{N-1} a^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j} \cdot \delta_x\frac{U^{n+1}_{ij}+U^n_{ij}}{2} \cdot \delta_x d_t U^n_{ij} \cdot h^2 =$$
$$\frac{1}{2\Delta t}\sum_{i,j=0}^{N-1}[a^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j} \cdot (\delta_x U^{n+1}_{ij})^2 - a^n_{i+\frac{1}{2},j} \cdot (\delta_x U^n_{ij})^2] \cdot h^2 +$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{N-1}\frac{a^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j} - a^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta t} \cdot (\delta_x U^{n+1}_{ij})^2 \cdot h^2 +$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{N-1}\frac{a^n_{i+\frac{1}{2},j} - a^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta t} \cdot (\delta_x U^n_{ij})^2 \cdot h^2 \equiv$$
$$A_{21} + A_{22} + A_{23},$$

$$A_{21} = \frac{1}{2}d_t|U^n|^2_{1x},$$

$$|A_{22} + A_{23}| \leqslant \frac{1}{4}\frac{a_t}{a_*}(|U^{n+1}|^2_{1x} + |U^n|^2_{1x}) \cdot$$

同样处理 A_3．

$$A_3=\frac{1}{2\Delta t}\sum_{i,j=0}^{N-1}\left[b_{i,j+\frac12}^{n+1}\cdot(\delta_y U_{ij}^{n+1})^2-b_{i,j+\frac12}^{n}\cdot(\delta_y U_{ij}^{n})^2\right]\cdot h^2+$$
$$\frac12\sum_{i,j=0}^{N-1}\frac{b_{i,j+\frac12}^{n+\frac12}-b_{i,j+\frac12}^{n+1}}{\Delta t}\cdot(\delta_y U_{ij}^{n+1})^2\cdot h^2+$$
$$\frac12\sum_{i,j=0}^{N-1}\frac{b_{i,j+\frac12}^{n}-b_{i,j+\frac12}^{n+\frac12}}{\Delta t}\cdot(\delta_y U_{ij}^{n})^2\cdot h^2\equiv A_{31}+A_{32}+A_{33},$$

$$A_{31}=\frac12 d_t|U^n|_{1y}^2,$$

$$|A_{32}+A_{33}|\leqslant\frac14\frac{b_t}{b_*}(|U^{n+1}|_{1y}^2+|U^n|_{1y}^2)．$$

对 A_4 的处理先采用对 i 的分部求和再采用对 j 的分部求和．

$$A_4=-\frac{\Delta t^2}{4}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}a_{i+\frac12,j}^{n+\frac12}\cdot\delta_x[\delta_y(b^{n+\frac12}\delta_y)d_tU_{ij}^n]\cdot\delta_x d_tU_{ij}^n\cdot h^2=$$
$$\frac{\Delta t^2}{4}\sum_{i,j=0}^{N-1}\delta_x[b_{i,j+\frac12}^{n+\frac12}\cdot\delta_y d_tU_{ij}^n]\cdot\delta_y[a_{i+\frac12,j}^{n+\frac12}\cdot\delta_x d_tU_{ij}^n]\cdot h^2=$$
$$\frac{\Delta t^2}{4}\sum_{i,j=0}^{N-1}b_{i,j+\frac12}^{n+\frac12}\cdot\delta_x\delta_y d_tU_{ij}^n\cdot a_{i+\frac12,j}^{n+\frac12}\cdot\delta_y\delta_x d_tU_{ij}^n\cdot h^2+$$
$$\frac{\Delta t^2}{4}\sum_{i,j=0}^{N-1}b_{i,j+\frac12}^{n+\frac12}\cdot\delta_x\delta_y d_tU_{ij}^n\cdot\delta_y a_{i+\frac12,j}^{n+\frac12}\cdot\delta_x d_tU_{i,j+1}^n\cdot h^2+$$
$$\frac{\Delta t^2}{4}\sum_{i,j=0}^{N-1}\delta_x b_{i,j+\frac12}^{n+\frac12}\cdot\delta_y d_tU_{i+1,j}^n\cdot a_{i+\frac12,j}^{n+\frac12}\cdot\delta_y\delta_x d_tU_{ij}^n\cdot h^2+$$
$$\frac{\Delta t^2}{4}\sum_{i,j=0}^{N-1}\delta_x b_{i,j+\frac12}^{n+\frac12}\cdot\delta_y d_tU_{i+1,j}^n\cdot\delta_y a_{i+\frac12,j}^{n+\frac12}\cdot\delta_x d_tU_{i,j+1}^n\cdot h^2\equiv$$
$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$$

注意到 $\delta_x\delta_y=\delta_y\delta_x$, 使用柯西不等式

$$A_{41}=\frac{\Delta t^2}{4}\sum_{i,j=0}^{N-1}a_{i+\frac12,j}^{n+\frac12}\cdot b_{i,j+\frac12}^{n+\frac12}\cdot(\delta_x\delta_y d_tU_{ij}^n)^2\cdot h^2\geqslant0$$

$$|A_{42}|=\frac{\Delta t^2}{4}\cdot\frac12\sum_{i,j=0}^{N-1}a_{i+\frac12,j}^{n+\frac12}\cdot b_{i,j+\frac12}^{n+\frac12}\cdot(\delta_x\delta_y d_tU_{ij}^n)^2\cdot h^2+$$
$$\frac14\cdot\frac12\sum_{i,j=0}^{N-1}\frac{(\delta_y a_{i+\frac12,j}^{n+\frac12})^2\cdot b_{i,j+\frac12}^{n+\frac12}}{a_{i+\frac12,j}^{n+\frac12}}\cdot(\Delta t\cdot\delta_x d_tU_{i,j+1}^n)^2\cdot h^2\leqslant$$
$$\frac12 A_{41}+\frac{a_1^2\cdot b^*}{4a_*^2}(|U^{n+1}|_{1x}^2+|U^n|_{1x}^2),$$

同理

$$|A_{43}|\leqslant\frac12 A_{41}+\frac{b_1^2\cdot a^*}{4b_*^2}(|U^{n+1}|_{1y}^2+|U^n|_{1y}^2),$$

$$|A_{44}|\leqslant\frac{a_1^2}{4a_*}(|U^{n+1}|_{1x}^2+|U^n|_{1x}^2)+$$
$$\frac{b_1^2}{4b_*}(|U^{n+1}|_{1y}^2+|U^n|_{1y}^2)．$$

综合上述估计, 我们有

$$\| d_t U^n \|_h^2 + \frac{1}{2} d_t (| U^n |_{1x}^2 + | U^n |_{1y}^2) \leqslant$$
$$\frac{1}{2} Q (| U^{n+1} |_{1x}^2 + | U^{n+1} |_{1y}^2 + | U^n |_{1x}^2 + | U^n |_{1y}^2), \tag{2.4}$$

此处

$$Q = \max\left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{a_t}{a_*} + \frac{a_1^2 b^*}{a_*^2} + \frac{a_1^2}{a_*} \right), \frac{1}{2}\left(\frac{b_t}{b_*} + \frac{2b_1^2 a_*}{b_*^2} + \frac{b_1^2}{b_*} \right) \right\} \tag{2.5}$$

将(2.4)写为

$$2 \| d_t U^n \|_h^2 + d_t | U^n |_{h1}^2 \leqslant$$
$$Q (| U^{n+1} |_{h1}^2 + | U^n |_{h1}^2) \tag{2.6}$$

注意到

$$d_t \| U^n \|_h^2 \leqslant 2 \langle d_t U^n, U^{n+1} \rangle \leqslant$$
$$\| d_t U^n \|_h^2 + \| U^{n+1} \|_h^2 \tag{2.7}$$

将之加到(2.6)上, 得

$$d_t \| U^n \|_{h1}^2 \leqslant (Q + 1) \| U^{n+1} \|_{h1}^2 + Q | U^n |_{h1}^2$$

令

$$\Delta t \leqslant \frac{1}{2(Q+1)}, \text{即 } 1 - \Delta t (Q+1) \geqslant \frac{1}{2}, \text{有}$$

$$\| U^{n+1} \|_{h1}^2 \leqslant \left(1 + \frac{3Q+2}{1-(Q+1)\Delta t} \Delta t \right) \| U^n \|_{h1}^2 \leqslant \dots \leqslant$$
$$(1 + M\Delta t)^{n+1} \| U^0 \|_{h1}^2 \leqslant$$
$$e^{MT} \| U^0 \|_{h1}^2 \tag{2.8}$$

对$(n+1) \leqslant T/\Delta t$成立, 此处$M = 2(3Q+2)$•

定理2.1 假定函数a, b满足基本假定, 则当$\Delta t \leqslant \frac{1}{2(Q+1)}$时, 格式(4)按范数$\|\cdot\|_{h1}$是稳定的•

因为不需要对网比$\Delta t/h^2$加任何限制, 故(4)是绝对稳定的; 再注意到(2.1)式, $|||\cdot|||_{h1}$与$\|\cdot\|_{h1}$是等价的, 知定理2.1的结论对$|||\cdot|||_{h1}$范数亦成立, 而范数$|||\cdot|||_{h1}$与函数$a(x, y, t)$, $b(x, y, t)$无关•

3 收敛性分析

记$| w |_{c^k} = \sup\left\{ \left| \frac{\partial^\alpha w}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} \right|, (x, y) \in \Omega, 0 \leqslant \alpha \leqslant k, 0 \leqslant t \leqslant T \right\}$

其中, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$; $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$

将方程(1)在$(x_i, y_j, t^{n+\frac{1}{2}})$离散得

$$d_t u_{ij}^n - \delta_x (a^{n+\frac{1}{2}} \delta_x) \frac{u_{ij}^{n+1} + u_{ij}^n}{2} - \delta_y (b^{n+\frac{1}{2}} \delta_y) \frac{u_{ij}^{n+1} + u_{ij}^n}{2} +$$
$$\frac{\Delta t^2}{4} \delta_x (a^{n+\frac{1}{2}} \delta_x) \delta_y (b^{n+\frac{1}{2}} \delta_y) d_t u_{ij}^n =$$
$$f_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + R_{ij}^{n+\frac{1}{2}} \tag{3.1}$$

此处R为截断误差, 利用Taylor展开不难发现

$$| R | \leqslant M^* (\Delta t^2 + h^2), \tag{3.2}$$

$M^* = M^*\left(|a|_{c^3}, |b|_{c^3}, |u|_{c^4}, \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{c^4}, \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{c^2}, \left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right|_{c^0}\right.$ 表示与括号中项有关的正常数•

记差分解与精确解之间误差为 π, $\pi = u - U$, 利用和第 2 节中同样的推导过程, 易得

$$d_t \|\pi^n\|_{h1}^2 \leqslant (Q+1)\|\pi^{n+1}\|_{h1}^2 + Q|\pi^n|_{h1}^2 + \|R^{n+\frac{1}{2}}\|_h^2$$

其中, Q 定义见第 2 节• 对 n 从 1 到 m 求和, 注意到 $\pi^0 = u^0 - U^0 = 0$, 有

$$\frac{1}{\Delta t}\|\pi^{m+1}\|_{h1}^2 \leqslant (Q+1)\|\pi^{m+1}\|_{h1}^2 + (2Q+1)\sum_{n=1}^{m}\|\pi^n\|_{h1}^2 + \sum_{n=1}^{m}\|R^{n+\frac{1}{2}}\|_h^2 \tag{3.3}$$

令 $\Delta t < \frac{1}{2(Q+1)}$, 即 $1-\Delta t(Q+1) > \frac{1}{2}$, 有

$$\|\pi^{m+1}\|_{h1}^2 \leqslant 2(2Q+1)\sum_{n=1}^{m}\|\pi^n\|_{h1}^2\Delta t + 2\sum_{n=1}^{m}\|R^{n+\frac{1}{2}}\|_h^2\Delta t$$

利用 Gronwall 引理得

$$\|\pi^{m+1}\|_{h1}^2 \leqslant 2e^{MT}\sum_{n=1}^{m}\|R^{n+\frac{1}{2}}\|_h^2\Delta t \tag{3.4}$$

其中, $M = 2(2Q+1)$, 由(3.2) 易知, (3.4) 意谓着格式(4) 的收敛阶按 $\|\cdot\|_{h1}$ 范数应为 $O(\Delta t^2 + h^2)$•

定理 3.1 假定方程(1) 的系数适当光滑且满足基本假定, 则差分格式(4) (或 P_R 格式和 Douglas 格式) 的解按离散 H^1 范数 $\|\cdot\|_{h1}$ 收敛到精确解, 收敛阶为 $O(\Delta t^2 + h^2)$•

范数 $\|\cdot\|_{h1}$ 与函数 a, b 有关, 由(2.2), 它与 $|||\cdot|||_{h1}$ 等价, 故知上述结论对范数 $|||\cdot|||_{h1}$ 亦成立•

显然, 我们得到的收敛性结论不仅包含了[4] 中结论, 而且有本质的改进•

致谢 袁益让教授、梁栋教授提出了宝贵建议, 谨致谢意•

参 考 文 献

[1] Peaceman D W, Rachford H H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations[J]. J SIAM, 1955, **3**(1): 28~41

[2] Douglas J Jr. Alternating direction methods for three space variables[J]. Numer Math, 1962, **4**(1): 41~63

[3] Lees M. Apriori estimates for the solutions of difference approximation to parabolic partial differential equations[J]. Duke Math J, 1960, **27**(3): 297~311

[4] Lees M. Alternating direction and semi_explicit difference method for parabolic partial differential equations[J]. Numer Math, 1961, **3**(3): 398~412

[5] Douglas J Jr, Gunn J E. A general formulation of alternating direction method[J]. Numer Math, 1964, **6**(5): 428~453

[6] Lees M. Comment on [5] [J]. Math Review, 1966, **31**(1): 159~160

[7] Marchuk G I. Methods of Numerical Mathematics[M]. Springer_Verlag, 1981

[8] Yanenko N N. The Method of Fractional Steps[M]. Spring_Verlag, 1971

Improvement on Stability and Convergence of A. D. I. Schemes

Cheng Aijie
Department of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, P R China

Abstract: Alternating direction implicit(A. D. I.) schemes have been proved valuable in the approximation of the solutions of parabolic partial differential equations in multi_dimensional space. Consider equations in the form

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2f$$

Two A. D. I. schemes, Peaceman_Rachford scheme and Douglas scheme will be studied. In the literature, stability and convergence have been analysed with Fourier Method, which cannot be extended beyond the model problem with constant coefficients. Additionally, L^2 energy method has been introduced to analyse the case of non_constant coefficients, however, the conclusions are too weak and incomplete because of the so_called" equiverlence between L^2 norm and H^1 semi_norm". In this paper, we try to improve these conclusions by H^1 energy estimating method. The principal results are that both of the two A. D. I. schemes are absolutely stable and converge to the exact solution with error estimations $O(\Delta t^2 + h^2)$ in discrete H^1 norm. This implies essential improvement of existing conclusions.

Key words: P_R scheme; Douglas scheme; parabolic partial differential equation; variable coefficient; H^1 energy estimating method; stability and convergence