应用数学和力学, 第 19 卷 第 12 期(1998 年 12 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

多值 (S_+) 型映象的度理论*

刘振海①　　张石生②

(1997 年 8 月 11 日收到, 1998 年 5 月 20 日收到修改稿)

摘　要

本文的目的是推广张石生和陈玉清(多值 (S) 型映象度理论以及不动点定理)的结果· 假设 L 是闭稠定线性极大单调映象, S 是关于 $D(L)$ 的 (S_+) 型多值映象, 我们建立具有形式 $F = L + S$ 的多值映象的拓扑度·

关键词　拓扑度　多值映象　存在性结果
中图分类号　O177

§1. 引　　言

张石生和陈玉清[1]建立了多值 (S) 型映象的拓扑度· 本文进一步推广他们的结果· 设 L 是实自反 Banach 空间 X 到其对偶空间 X^* 的闭稠定线性极大单调映象, S 关于 $D(L)$ 是 (S_+) 型多值映象· 我们将建立具有形式 $F = L + S$ 的多值映象的逼近度理论· 类似于 Browder[2], Berkovits 和 Mustonen[3], 我们利用一簇关于 $D(L)$ 的图范数下的多值 (S_+) 型映象恰当逼近 $F = L + S$ 型多值映象· 这样建立的度理论, 使我们能利用连续性方法研究拟线性抛物型 H_半变分不等式, 即: 下列形式的初一边值问题

$$
(\mathrm{P})\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} + Au + e = f & (x, t) \in \Omega \times (0, T) \\
u(x, 0) = 0 & x \in \Omega \\
u(x, t) = 0 & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \\
e \in \bar{\partial} E(u(x, t)) & (x, t) \in \Omega \times (0, T)
\end{cases}
$$

其中 Ω 是 R^N 中有界开集, f 是定义在 $\Omega \times (0, T)$ 上的函数, A 是二阶微分算子:

$$
Au(x, t) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, t, u, \nabla u) + a_0(x, t, u, \nabla u)
$$

而 $\bar{\partial} E$ 表示局部 Lipschitz 泛函 E 的 Clarke 广义梯度(见[4])·

设 X 是实自反 Banach 空间· X 与其对偶空间 X^* 均是局部一致凸· 假设 $L: D(L) \subset X \to X^*$ 是线性极大单调闭映象, 且定义域 $D(L)$ 在 X 中稠密· 故图

* 国家教委留学回国人员基金(1995806)和电力部教育基金资助课题
① 长沙电力学院数学系, 长沙 410077
② 四川大学数学系, 成都 610064

$\{(u, Lu) \mid u \in D(L)\}$ 是 $X \times X^*$ 中闭子集. 令 $Y = D(L)$ 赋予图范数

$$\|u\|_Y = \|u\|_X + \|Lu\|_{X^*}, \qquad \forall u \in Y$$

则 Y 成为实自反Banach 空间. 不失一般性, 可以假设 Y 与其对偶空间 Y^* 也是局部一致凸(见[5]).

我们称多值映象 $T: D(T) \subset X \to 2^{X^*}$ 是(S_+) 型的, 若下列条件满足[1]:

(S_1) 对任一 $u \in D(T)$, Tu 是非空有界闭凸的;

(S_2) T 是有限维弱上半连续, 即对 X 之任一有限维子空间E, $T: D(T) \cap E \to 2^{X^*}$ 是从 X 之范数拓扑到X^* 之弱拓扑上半连续的.

(S_3) 设$\{u_j\} \subset D(T)$, $u_j \to$ (弱) $u \in D(T)$, $w_j \in Tu_j$, $j \geqslant 1$, $\limsup\langle w_j, u_j - u\rangle \leqslant 0$, 则 $u_j \to$ (强) u, $\{w_j\}$ 有子列$\{w_{n_j}\}$, $w_{n_j} \to$ (弱) $w \in Tu$.

这里$\langle \cdot, \cdot \rangle$表示 X 与X^* 的对偶积.

§2. 度函数的构造

张和陈[1]定义了形式为 $L + T$ 之映象的拓扑度, 其中 L 为极大单调, T 为有界多值(S_+)映象. 由于研究抛物型H_半变分不等式的需要, 本节我们定义形式为$F = L + S$ 之映象的拓扑度, 其中$L: D(L) \subset X \to X^*$ 是闭稠定线性极大单调映象, 而$S: D(S) \subset X \to 2^{X^*}$ 是一类关于$D(L)$ 的多值(S_+) 型映象.

我们称 S 是关于$D(L)$ 的(S_+) 型映象, 如果上节的条件(S_1), (S_2) 成立, 且若$\{u_j\} \subset D(L)$, $u_j \to$ (弱) $u \in D(L)$, $Lu_j \to$ (弱) Lu, 对 X^* 中任意$\{w_j\}$, $w_j \in S(u_j)$, $j \geqslant 1$,

$$\limsup\langle w_j, u_j - u\rangle \leqslant 0$$

则 $u_j \to$ (强) u, 且存在$\{w_j\}$ 的子列$\{w_{n_j}\}$, $w_{n_j} \to$ (弱) $w \in Su$.

众所周知, 条件

$$\|J(u)\| = \|u\|, \quad \langle J(u), u\rangle = \|u\|^2, \qquad \forall u \in X$$

唯一确定$J: X \to X^*$, 我们称 J 为X 的对偶映象. 由于假设 X 和X^* 是局部一致凸的, 对偶映象 J 是双射、双连续的严格单调(S_+) 映象. 又因J^{-1}可以看成是X^* 到 $X^{**}(= X)$ 的对偶映象, 故J^{-1} 也是(S_+) 映象. 利用对偶映象, 我们知道, 映象T 是极大单调的充要条件是对任何 $\lambda > 0$, $T + \lambda J$ 是满射(见[5]).

记j 是 $Y \to X$ 的自然嵌入, 它的共轭映象$j^*: X^* \to Y^*$. 对于任何 X 的有界开子集 G, 记

$$F_G(L; S_+) = \{L + S: \bar{G} \cap D(L) \to 2^{X^*} \mid S \text{ 是关于} D(L) \text{ 的} (S_+) \text{ 映象}$$

$$\limsup \langle w_j, u_j - u\rangle \leqslant 0$$

那么，$u_j \to$ (强) u，且存在 $\{w_j\}$ 的子列 $\{w_{n_j}\} \to$ (弱) $w \in S(t)u$.

显然，若 $L+S_1, L+S_2 \in F_G(L;S_+)$，则 $L+(1-t)S_1+tS_2 \in H_G(L;S_+)$，即：$H_G(L;S_+)$ 包含了所有仿射同伦.

为了构造 $F = L+S \in F_G(L;S_+)$ 的恰当逼近，记

$$\hat{L} = j^* Lj: Y \to Y^*, \quad \hat{S}(t) = j^* S(t) j: j^{-1}(\bar{G}) \to 2^{Y^*}$$

那么，$\hat{L}: Y \to Y^*$ 是有界线性单调映象. 因 $j: Y \to X$ 是连续的，故 $j^{-1}(\bar{G}) = \bar{G} \cap D(L)$ 是 Y 中闭子集，$j^{-1}(G) = G \cap D(L)$ 是 Y 中开子集. 易证

$$\overline{j^{-1}(G)} \subset j^{-1}(\bar{G}), \quad \partial(j^{-1}(G)) \subset j^{-1}(\partial G) \tag{2.1}$$

这里我们对 X 和 Y 中的闭包和边界用了同样的符号.

定义 $(M(u), v) = \langle Lv, J^{-1}(Lu)\rangle, \quad u, v \in Y$ (2.2)

其中 $(\cdot,\cdot)$ 表示 Y 与 Y^* 之对偶积，J^{-1} 是对偶映象 $J: X \to X^*$ 的逆映象. 若 $M(u) \in j^*(X^*)$，$u \in Y$，易得 $J^{-1}(Lu) \in D(L^*)$，所以，由(2.2)式，有

$$M(u) = j^* L^* J^{-1}(Lu)$$

在引理 2 的证明中，我们将利用该表达式.

设 $F = L+S \in F_G(L;S_+)$，$F(t) = L+S(t) \in H_G(L;S_+)$

对于任何 $\varepsilon > 0$，定义

$$\hat{F}_\varepsilon = \hat{L} + \hat{S} + \varepsilon M, \quad \hat{F}_\varepsilon(t) = \hat{L} + \hat{S}(t) + \varepsilon M$$

则我们有

引理 1 设 $F(t) \in H_G(L;S_+)$，$\varepsilon > 0$，则 $\hat{F}_\varepsilon(t): j^{-1}(\bar{G}) \subset Y \to 2^{Y^*}$ 是有界 (S_+) 同伦类. 特别地，对任何 $\varepsilon > 0$，$\hat{F}_\varepsilon: j^{-1}(\bar{G}) \subset Y \to 2^{Y^*}$ 是 (S_+) 映象.

证明 设 $F(t) = L+S(t) \in H_G(L;S_+)$. 由定义易知，$\hat{L}, M: Y \to Y^*$ 是单值映象，$\hat{L}$ 连续，M 次连续. 故 $\hat{F}_\varepsilon(t) = \hat{L} + \hat{S}(t) + \varepsilon M: j^{-1}(\bar{G}) \subset Y \to 2^{Y^*}$ 满足[1]中条件$(S_1)'$，$(S_2)'$.

设 $\{u_n\} \subset \bar{G} \cap D(L)$，且在 Y 中 $u_n \to$ (弱) u (即：在 X 中 $u_n \to$ (弱) u，在 X^* 中 $Lu_n \to$ (弱) Lu)，$t_n \to t$，$\hat{w}_n \in \hat{S}(t_n)u_n$ ($\hat{w}_n = j^* w_n$，$w_n \in S(t_n)ju_n = S(t_n)u_n$)，使得

$$\limsup (\hat{L}u_n + \hat{w}_n + \varepsilon Mu_n, u_n - u) \leqslant 0$$

即

$$\limsup \{\langle Lu_n, u_n - u\rangle + \langle w_n, u_n - u\rangle + \varepsilon\langle Lu_n - Lu, J^{-1}(Lu_n)\rangle\} \leqslant 0$$

从而，由 u_n, Lu_n 分别在 X, X^* 中的弱收敛性，有

$$\limsup \{\langle Lu_n - Lu, u_n - u\rangle + \langle w_n, u_n - u\rangle + \varepsilon\langle Lu_n - Lu, J^{-1}(Lu_n) - J^{-1}(Lu)\rangle\} \leqslant 0$$

又由 L 的单调性和 J^{-1} 的严格单调性，有

$$\limsup \langle w_n, u_n - u\rangle \leqslant 0$$

因为 $L+S(t) \in H_G(L;S_+)$，所以，上式推出：在 X 中，$u_n \to$ (强) u，存在 $\{w_n\}$ 的子序列 $\{w_{n_k}\}$，使得 $w_{n_k} \to$ (弱) $w \in S(t)u$. 因而有

$$\lim \langle Lu_n - Lu, J^{-1}(Lu_n) - J^{-1}(Lu)\rangle = 0$$

再由 J^{-1} 的 (S_+) 性质，在 X^* 中，$Lu_n \to$ (强) Lu. 综上所述，有

在 Y 中，$u_n \to$ (强) u，且 $\hat{L}u_{n_k} + \hat{w}_{n_k} + \varepsilon Mu_{n_k} \in \hat{F}_\varepsilon(t)u_{n_k}$

$$\hat{L}u_{n_k} + \hat{w}_{n_k} + \varepsilon M u_{n_k} \to (\text{弱}) \hat{L}u + \hat{w} + \varepsilon M u \in \hat{F}_\varepsilon(t)u$$

其中 $\hat{w} = j^* w$. 由[1]知 $\hat{F}_\varepsilon(t): j^{-1}(\bar{G}) \subset Y \to 2^{Y^*}$ 是(S_+)同伦类. 证毕.

S 设 $F(t) \in H_G(L; S_+)$, $\{h(t) \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ 是 X^* 中连续曲线.

记 $$K = \left\{u \in j^{-1}(\bar{G}) \mid j^* h(t) \in \hat{F}_\varepsilon(t)u;\ \forall \varepsilon > 0, 0 \leqslant t \leqslant 1\right\}$$

因为 $j(K) \subset \bar{G}$, 故 K 是 X 中有界子集. 更进一步, 有

引理2 存在与 ε 和 t 无关的常数 $R > 0$, 使得 $K \subset B_R(Y) = \left\{v \in Y \mid \|v\|_Y < R\right\}$.

证明 不失一般性, 我们可以假设 $h(t) \equiv 0$. 任取 $u \in K$, $\varepsilon > 0, 0 \leqslant t \leqslant 1$, 存在 $w(t) \in S(t)u$, 使得

$$\langle Lu, v\rangle + \langle w(t), v\rangle + \varepsilon\langle L^* J^{-1}(Lu), v\rangle = 0, \qquad \forall v \in D(L) \tag{2.3}$$

这里利用了 $M(u) \in j^*(X^*)$ 和 $J^{-1}(Lu) \in D(L^*)$. 又因 $D(L)$ 在 X 中稠密, 故(2.3)式对任何 $v \in X$ 成立. 故可引入 $v = J^{-1}(Lu)$ 有

$$\langle Lu, J^{-1}(Lu)\rangle + \langle w(t), J^{-1}(Lu)\rangle + \varepsilon\langle L^* J^{-1}(Lu), J^{-1}(Lu)\rangle = 0$$

注意到 L^* 的单调性, 有

$$\|Lu\|_{X^*}^2 \leqslant \|w(t)\|_{X^*} \|J^{-1}(Lu)\|_X$$

而 $\|J^{-1}(Lu)\|_X = \|Lu\|_{X^*}$, 且 $S(t)$ 是关于 $D(L)$ 从 $\bar{G}$ 到 2^{X^*} 的有界(S_+)同伦类, 故

$$\|Lu\|_{X^*} \leqslant C_1$$

C_1 是不依赖于 $\varepsilon > 0$, $t \in [0, 1]$ 的常数, 这就证明了引理2.

引理3 设 $A \subset \bar{G}$ 是任何闭子集, $F(t) \in H_G(L; S_+)$, $h(t)$ 是 X^* 中连续曲线, 且

$$h(t) \notin F(t)(A \cap D(L)), \qquad \exists\, t \in [0, 1]$$

则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得

$$j^* h(t) \notin \hat{F}_\varepsilon(t)(j^{-1}(A)), \qquad \forall t \in [0, 1], 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$$

证明 不失一般性, 我们同样可以假设 $h(t) \equiv 0$. 我们将用反证法给出引理3的证明. 假设存在 $\{\varepsilon_n\}$, $\{t_n\}$, $\{u_n\} \subset j^{-1}(A)$ 且 $\varepsilon_n \to 0_+$, $t_n \to t \in [0, 1]$, $\hat{w}_n = j^* w_n \in \hat{S}(t_n)u_n$ (这里 $w_n \in S(t_n)u_n$)

$$\hat{L}u_n + \hat{w}_n + \varepsilon_n M(u_n) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.4}$$

由引理2, $\{u_n\}$ 在 Y 中有界. 故存在子序列(仍记为 $\{u_n\}$) 使得在 X 中, $u_n \to (\text{弱}) u$, 在 X^* 中, $Lu_n \to (\text{弱}) Lu$, $u \in D(L)$. 利用 L 和 J^{-1} 的单调性和(2.4)式, 有

$$\begin{aligned}\limsup \langle w_n, u_n - u\rangle = \limsup\Big\{ &-\langle Lu_n - Lu, u_n - u\rangle \\ &- \varepsilon_n\langle Lu_n - Lu, J^{-1}(Lu_n) - J^{-1}(Lu)\rangle\Big\} \\ \leqslant 0\end{aligned}$$

因 $L + S(t) \in H_G(L; S_+)$, 由此可得, 在 X 中, $u_n \to (\text{强}) u$, 在 X^* 中, w_n 有子序列弱收敛于 $w \in S(t)u$. 由(2.4)可得

$$(\hat{L}u_n, v) + (\hat{w}_n, v) + \varepsilon_n(M(u_n), v) = 0, \qquad \forall v \in Y, n = 1, 2, \ldots$$

即: $$\langle Lu_n, v\rangle + \langle w_n, v\rangle + \varepsilon_n\langle Lv, J^{-1}(Lu_n)\rangle = 0, \qquad \forall v \in Y, n = 1, 2, \ldots$$

令 $n \to \infty$, 得

$$\langle Lu, v\rangle + \langle w, v\rangle = 0, \qquad \forall v \in Y$$

由于 $Y = D(L)$ 在 X 中稠密, 有

$$Lu + w = 0, \qquad w \in S(t)u,\ u \in A \cap D(L)$$

故 $$0 \in F(t)(A \cap D(L))$$

这与已知条件矛盾。 因此引理 3 成立。

如果取 $A=\partial G$, $L+S(t)=L+S\in F_G(L;S_+)$, 则引理3断言, 从条件 $0\notin(L+S)(\partial G\cap D(L))$, 可推出, 存在 $\varepsilon_0>0$, 使得

$$0\notin(\hat{L}+\hat{S}+\varepsilon M)(j^{-1}(\partial G)),\qquad \forall 0<\varepsilon<\varepsilon_0$$

从(2.1)式, 有

$$0\notin(\hat{L}+\hat{S}+\varepsilon M)(\partial(j^{-1}(G))),\qquad \forall 0<\varepsilon<\varepsilon_0$$

利用引理 2, 存在不依赖于 ε 的常数 $R>0$, 使得

$$0\notin\hat{L}u+\hat{S}+\varepsilon M(u),\qquad \forall u\in\bar{G},\ \|u\|_Y\geqslant R,\ \varepsilon>0 \tag{2.5}$$

记 $G_R(Y)=j^{-1}(G)\cap B_R(Y)$

我们有

$$0\notin(\hat{L}+\hat{S}+\varepsilon M)(\partial G_R(Y)),\qquad 0<\varepsilon<\varepsilon_0 \tag{2.6}$$

由引理1, $\hat{F}_\varepsilon=\hat{L}+\hat{S}+\varepsilon M: j^{-1}(\bar{G})\to 2^{Y^*}$ 是(S_+)映象。 所以, 对任何 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, 我们可以定义拓扑度(见[1])

$$d_{S_+}(\hat{L}+\hat{S}+\varepsilon M,\ G_R(Y),0)$$

并且当 $R>0$ 满足(2.5)式时, 该度函数与 R 无关。 进一步, 该度函数对一切 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ 是稳定的。 事实上, 设 $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<\varepsilon_0$, 有

$$(1-t)(\hat{L}+\hat{S}+\varepsilon_1 M)+t(\hat{L}+\hat{S}+\varepsilon_2 M)=\hat{L}+\hat{S}+\varepsilon(t)M$$

其中 $\varepsilon(t)=(1-t)\varepsilon_1+t\varepsilon_2$ 且 $0<\varepsilon_1\leqslant\varepsilon(t)\leqslant\varepsilon_2$。 因此, 由(2.6)式

$$0\notin(\hat{L}+\hat{S}+\varepsilon(t)M)(\partial G_R(Y)),\qquad \forall 0\leqslant t\leqslant 1$$

故由(S_+)同伦不变性[1], 有

$$d_{S_+}(\hat{L}+\hat{S}+\varepsilon_1 M,\ G_R(Y),0)=d_{S_+}(\hat{L}+\hat{S}+\varepsilon_2 M,\ G_R(Y),0) \tag{2.7}$$

因此, 当 $0\notin(L+S)(\partial G\cap D(L))$, R 充分大时, 我们定义

$$d_L(L+S,\ G,\ 0)=\lim_{\varepsilon\to 0_+} d_{S_+}(\hat{L}+\hat{S}+\varepsilon M,\ G_R(Y),\ 0) \tag{2.8}$$

往后, 我们总是假设 R 是满足引理 2 的充分大的正常数。

§3. 拓 扑 度 的 性 质

设 G 是 X 中有界开子集, $F=L+S\in F_G(L;S_+)$, $0\in X^*\setminus F(\partial G\cap D(L))$。 则(2.8)式定义了一个度函数 d_L。 我们有

定理 1 设 X 是实自反Banach空间。 $L: D(L)\subset X\to X^*$ 是闭稠定线性极大单调映象, G 是 X 中有界开子集。 $F_G(L;S_+)$ 是允许映象类。 则存在度函数 d_L 满足下列性质:

(a) 若 $d_L(L+S,\ G,\ 0)\neq 0$, 则存在 $u\in G\cap D(L)$, 使得 $0\in Lu+Su$。

(b) 设开集 $G^1, G^2\subset G$, $G^1\cap G^2=\varnothing$(空集), $0\notin(L+S)[(\bar{G}\setminus(G^1\cup G^2))\cap D(L)]$, 则 $d_L(L+S,\ G,0)=d_L(L+S,\ G^1,0)+d_L(L+S,\ G^2,0)$。

(c) 设 $F(t)=L+S(t)\in H_G(L;S_+)$, $0\notin F(t)(\partial G\cap D(L))$, $\forall t\in[0,1]$。 则 $\forall t\in[0,1]$, $d_L(F(t),\ G,0)$ 是常数。

(d) 若 $0\in(L+J)(G\cap D(L))$, 则 $d_L(L+J,\ G,0)=1$。

证明

(a) 设 $d_L(L+S,\ G,\ 0)\neq 0$。 若 $0\notin(L+S)(G\cap D(L))$, 则 $0\notin(L+S)(\bar{G}\cap D(L))$,

有 $\varepsilon>0$, $0\notin F_\varepsilon(j^{-1}(\bar G))$. 从(2.8)式, 有 $d_{S_+}(F_\varepsilon, G_R(Y), 0)\neq 0$. 利用 d_{S_+} 的性质(见[1]), $0\in F_\varepsilon(j^{-1}(G))$. 从而推出了矛盾.

(b) 设 G^1, G^2 是 G 的开子集, 且 $G^1\cap G^2=\varnothing$, $0\notin(L+S)[(\bar G\setminus(G^1\cup G^2))\cap D(L)]$. 利用引理 2 和 3, 存在 $\varepsilon_0>0$, $R>0$, 使得

$$0\notin \hat L u+\hat S u+\varepsilon M(u),\qquad \forall u\in j^{-1}(\bar G),\ \|u\|_Y\geqslant R,\ \varepsilon>0$$

且
$$0\notin(\hat L+\hat S+\varepsilon M)(j^{-1}(\bar G\setminus(G^1\cup G^2))),\qquad \forall 0<\varepsilon<\varepsilon_0$$

注意到 $j^{-1}(\bar G\setminus(G^1\cup G^2))=j^{-1}(\bar G)\setminus(j^{-1}(G^1)\cup j^{-1}(G^2))$, 我们有

$$0\notin(\hat L+\hat S+\varepsilon M)[\overline{G_R(Y)}\setminus(G^1_R(Y)\cup G^2_R(Y))],\qquad \forall 0<\varepsilon<\varepsilon_0$$

由 (S_+) 型映象的度性质[1], 有

$$d_{S_+}(F_\varepsilon, G_R(Y), 0)=d_{S_+}(F_\varepsilon, G^1_R(Y), 0)+d_{S_+}(F_\varepsilon, G^2_R(Y), 0)$$

再利用(2.8)式, 就有

$$\begin{aligned}d_L(L+S, G, 0)&=d_{S_+}(F_\varepsilon, G_R(Y), 0)\\&=d_{S_+}(F_\varepsilon, G^1_R(Y), 0)+d_{S_+}(F_\varepsilon, G^2_R(Y), 0)\\&=d_L(L+S, G^1, 0)+d_L(L+S, G^2, 0)\end{aligned}$$

其中 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$.

(c) 设 $F(t)=L+S(t)\in H_G(L, S_+)$, $0\notin F(t)(\partial G\cap D(L))$ $\forall t\in[0,1]$. 由引理 3, 存在 $\varepsilon_0>0$, 使得

$$0\notin F_\varepsilon(t)(j^{-1}(\partial G)),\qquad \forall t\in[0,1],\ 0<\varepsilon<\varepsilon_0$$

再利用引理 2, 存在 $R>0$, 使得

$$0\notin \hat L u+\hat S(t)u+\varepsilon M(u),\qquad \forall t\in[0,1],\ \varepsilon>0,\ u\in j^{-1}(\bar G),\ \|u\|_Y\geqslant R$$

因此, $$0\notin F_\varepsilon(t)(\partial G_R(Y)),\qquad \forall t\in[0,1],\ 0<\varepsilon<\varepsilon_0$$

由 (S_+) 同伦不变性[1], 就有

$$d_L(F(t), G, 0)=\lim_{\varepsilon\to 0_+}d_{S_+}(F_\varepsilon(t), G_R(Y), 0)=\text{const},\qquad \forall t\in[0,1]$$

(d) 我们知道 $L+J: D(L)\to X^*$ 是 1—1 的满射. 因为 G 是 X 中有界开子集, 取 $r>0$, 使得

$$G\subset B_r(X)=\{v\in X\mid \|v\|_X<r\}$$

又由性质(b)和 $0\in(L+J)(G\cap D(L))$, 就有

$$\begin{aligned}d_L(L+J, G, 0)&=d_L(L+J, B_r(X), 0)\\&=\lim_{\varepsilon\to 0_+}d_{S_+}(\hat L+\hat J+\varepsilon M, j^{-1}(B_r(X))\cap B_R(Y), 0)\\&=\lim_{\varepsilon\to 0_+}d_{S_+}(\hat L+\hat J+\varepsilon M, B_R(Y), 0)\end{aligned}$$

设 J_Y 是 Y 到 Y^* 的对偶映象. 易证

$$(1-t)J_Y(u)+t(\hat L u+\hat J(u)+\varepsilon M(u))\neq 0,$$
$$\forall t\in[0,1],\ 0<\varepsilon<\varepsilon_0,\ \|u\|_Y=R$$

因此,

$$\begin{aligned}d_L(L+J, G, 0)&=\lim_{\varepsilon\to 0_+}d_{S_+}(\hat L+\hat J+\varepsilon M, B_R(Y), 0)\\&=d_{S_+}(J_Y, B_R(Y), 0)\\&=1\end{aligned}$$

这样, 我们就完成了定理 1 的证明.

§4. 存在性定理

设 X 是实自反Banach 空间, $L: D(L) \subset X \to X^*$ 是线性极大单调闭映象, G 是X 中有界开子集. $F = L + S \in F_G(L; S_+)$. 我们研究

$$0 \in Lu + Su, \qquad u \in \bar{G} \cap D(L)$$

的可解性.

定理2 设 $L + S \in F_X(L; S_+)$, 并且下面条件满足

(i) 若 $v_n \in Su_n$, $Lu_n + v_n \to w$, 则$\{u_n\}$是有界序列;

(ii) 存在 $R > 0$, 使得对一切 $u \in X$, $\|u\| \geqslant R$, $v \in Su$ 满足$\langle v, u\rangle > 0$.

则 $$0 \in (L + S)(D(L))$$

证明 由条件(i), 存在正常数 $R' > R > 0$, $\delta > 0$, 使得

$$\|Lu + Su\| \geqslant \delta, \qquad \forall u \in D(L), \|u\| = R'$$

记 $$F(t)u = Lu + (1 - t)J(u) + tS(u), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

若 $0 \in F(t)u$, $t \in [0, 1]$, $\|u\| = R'$, 则存在 $v \in S(u)$, 使得

$$Lu + (1 - t)J(u) + tv = 0, \qquad t \in [0, 1], \|u\| = R'$$

由条件(ii)和 $R' > R$, 有

$$0 = \langle Lu, u\rangle + (1 - t)R'^2 + t\langle v, u\rangle > 0$$

矛盾. 因此, 对一切 $t \in [0, 1]$, $\|u\| = R'$, 有 $0 \notin F(t)(u)$. 再利用定理1 的结论(c), 有

$$d_L(L + S, B_{R'}(X), 0) = d_L(L + J. B_{R'}(X), 0) = 1$$

由定理1 的结论(a), 就有 $u \in D(L)$, 使得 $0 \in Lu + S(u)$, 即:

$$0 \in (L + S)(D(L))$$

证毕.

显然, 若 S 满足强制性条件, 即: 对于一切 $v \in S(u)$, 当 $\|u\| \to \infty$时, 有

$$\frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|} \to \infty \tag{4.1}$$

则定理2 中的条件(i), (ii) 同时满足. 因此, 我们有

定理3 设 $L + S \in F_X(L; S_+)$ 且 S 满足强制性条件(4.1). 则$(L + S)(D(L)) = X^*$.

证明 任取 $h \in X^*$. 令$S'(u) = S(u) - h$. 显然, $L + S' \in F_X(L; S_+)$. 由强制性条件(4.1), S' 满足定理2 的条件(i), (ii). 故

$0 \in (L + S')(D(L))$, 即: $h \in (L + S)(D(L))$. 由 h 的任意性, 就有

$$(L + S)(D(L)) = X^*$$

注 令 $X = L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$, $L = \partial/\partial t: D(L) = \{v \in X \mid v' \in X^*, v(0) = 0\} \subset X \to X^*$, 满足

$$\langle Lu, v\rangle = \int_0^T [u'(t), v(t)]_v dt, \qquad u \in D(L), v \in X$$

则 L 是闭稠定极大单调算子. 这里$[\cdot, \cdot]_v$ 表示 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 与其对偶空间的对偶积. 在适当的条件下, 我们可以证明拟线性抛物型H_半变分不等式(P) 中的映象 $A + \bar{\partial} E: X \to 2^{X^*}$ 关于 $D(L)$ 是(S_+)型映象. 从而, 可以利用本文所建立的理论研究拟线性抛物型 H_半变分不等式. 我们将另文讨论这一问题.

参 考 文 献

1 张石生、陈玉清, 多值(S)型映象度理论以及不动点定理, 应用数学和力学, **11**(5) (1990), 409—421

•

2 F. E. Browder, Degree theory for nonlinear mappings, Proc. Sympos. Pure. Math., **45**(1)(1986), 203—226•

3 J. Berkovits and V. Mustonen, Topological degree for perturbations of linear maximal monotone mappings and applications to a class of parabolic problems, Rc. Mat., **7**(12) (1992), 597—621•

4 张恭庆,《临界点理论及其应用》, 上海科学技术出版社 (1986)•

5 E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, Ⅱ A and Ⅱ B, Springer, New York (1990)•

On the Degree Theory for Multivalued (S_+) Type Mappings

Liu Zhenhai

(Department of Mathematics, Changsha University of Electric Power, Changsha 410077, P. R. China)

Zhang Shisheng

(Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P. R. China)

Abstract

This paper is to generalize the results of Zhang and Chen [1]. We construct a topological degree for a class of mappings of the form $F = L + S$ where L is closed densely defined maximal monotone operator and S is a nonlinear multivalued map of class (S_+) with respect to the domain of L.

Key words topological degree, multivalued mappings, existence results