

两自由度非对称三次系统非奇异时的 非线性模态及叠加性

徐 鉴 陆启韶 黄克累

(陈予恕推荐; 1996 年 9 月 2 日收到, 1997 年 3 月 20 日收到修改稿)

摘 要

本文利用非线性模态子空间的不变性研究两自由度非对称三次系统在非奇异条件下的非线性模态及其模态叠加解有效性, 重点考虑这种有效性与模态动力学方程静态分岔之间的关系。大量的数值结果表明, 非线性模态解的有效性不仅与其局部性的限制有关, 而且与模态动力学方程静态解分岔有关。

关键词 非线性模态 非对称系统 静态分岔 非线性振动 非线性动力学

中图分类号 O322, TU311

1 引 言

由于模态分析在线性振动系统的研究中起到了重要作用, 因此, 多年来许多学者都在试图把这一思想方法用于非线性系统的振动研究中。自 60 年代开始, Rosenberg^[1-5] 在他的系列文章中, 详细介绍了非线性模态的概念。依据 Rosenberg 的观点, 以模态形式的自由振动是具有统一性的(vibration_in_union), Shaw 在近期的工作^[6]中, 把这一思想与动力系统流形不变性的概念结合起来, 提出了非线性模态子空间具有不变性的观点, 同时, 基于一阶常微分方程组, 给出了解非线性模态解的构造性方法。

除上述的研究方法之外, 研究非线性模态还有许多其他的方法: Anand^[7]使用单项 Fourier 近似, 研究由非线性弹簧相连双质量系统自由振动的周期运动; 在[8]中, 群论被用于考察对称系统的模态; Vakakis^[9]应用匹配法研究了相似模态和它们的分岔; 文献[10]则利用数值方法研究了模态分岔。

综合以往的研究, 大都是针对相似模态进行, 并且选择的物理模型以对称系统为主。尽管 Shaw 的工作为非线性模态的研究开拓了一个新的领域, 但如果系统存在二个以上的非线性模态, 叠加后的模态解在多大程度范围内能描述原系统的解这一基本问题未详细研究, 本文正是针对这一问题, 研究如下两自由度三次非线性自由振动系统

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \dot{x}_1 + k(x_1 - x_2) + p_1 x_1^3 + q(x_1 - x_2)^3 &= 0 \\ x_2 + (1 + \dots)x_2 + k(x_2 - x_1) + p_2 x_2^3 + q(x_2 - x_1)^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

其中 k, p_1, p_2 和 q 为参数, 而 $x_1, x_2 \in \mathcal{R}$ 当 $\alpha = 0$ 或 $p_1 = p_2$ 时, 系统(1.1) 被称为非对称系统; 当 $\alpha = 0, p_1 = p_2$ 时, 系统(1.1) 被称为对称系统. 如果设 $p_2 = p_1 + \alpha$, 则称 α 和 β 为非对称参数. 我们将研究系统(1.1) 在平衡点原点附近的非线性模态及其叠加性.

2 非线性模态及其奇异性条件

对于一个动力系统, 定义相空间的一个不变子集, 使得如果系统初始条件在 S 中, 则系统的运动永远保持在 S 中. 依据 Shaw^[6] 给出的非线性模态的构造方法, 我们知它们是非线性运动方程的不变子流形, 且在平衡点处与对应的线性不变子空间相切. 将系统(1.1) 改写为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 \\ \dot{y}_1 &= -x_1 - p_1 x_1^3 - k(x_1 - x_2) - q(x_1 - x_2)^3 \\ \dot{x}_2 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -(1 + \alpha)x_2 - p_2 x_2^3 - k(x_2 - x_1) - q(x_2 - x_1)^3 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

或

$$\dot{z} = [A_0 + A_2(z)]z \quad (2.2)$$

其中 $z = [x_1, y_1, x_2, y_2]^T$,

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(1+k) & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & -(1+\alpha+k) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$A_2(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(p_1+q)x_1^2 - 3qx_2^2 & 0 & 3qx_1^2 + qx_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3qx_2^2 + qx_1^2 & 0 & -(p_2+q)x_2^2 - 3qx_1^2 & 0 \end{bmatrix}$$

, k, q 均不为零, $p_1 = p_2$

令 $x_1 = u, y_1 = v$, 并且将 x_2, y_2 展开成关于模态坐标 u, v 的函数:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= a_1u + a_2v + a_3u^2 + a_4uv + a_5v^2 + a_6u^3 + a_7u^2v + a_8uv^2 + a_9v^3 + \\ y_2 &= b_1u + b_2v + b_3u^2 + b_4uv + b_5v^2 + b_6u^3 + b_7u^2v + b_8uv^2 + b_9v^3 + \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

将(2.4)式代入系统(2.1)可通过 u, v 各次幂系数的比较得到一系列恒等式, 其中的推导都是通过计算机代数语言 MATHEMATICA 得到的:

u 项

$$\left. \begin{aligned} a_2 + b_1 + a_2k - a_1a_2k &= 0 \\ -a_1 - a_1 + b_2 + k + b_2k - a_1k - a_1b_2k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

v 项

$$\left. \begin{aligned} -a_1 + b_2 - a_2^2k &= 0 \\ -a_2 - a_2 - b_1 - a_2k - a_2b_2k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

u^2 项

$$\left. \begin{aligned} a_4 + b_3 - a_2a_3k + a_4k - a_1a_4k &= 0 \\ -a_3 - a_3 + b_4 - a_3k - a_3k - a_3b_2k + b_4k - a_1b_4k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

w 项

$$\left. \begin{aligned} -2a_3 + 2a_5 + b_4 - 2a_2a_4k + 2a_5k - 2a_1a_5k &= 0 \\ -a_4 - a_4 - 2b_3 + 2b_5 - a_4k - a_4b_2k - a_2b_4k + 2b_5k - 2a_1b_5k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2\ 8)$$

v^2 项

$$\left. \begin{aligned} -a_4 + b_5 - 3a_2a_5k &= 0 \\ -a_5 - a_5 - b_4 - a_5k - a_5b_2k - 2b_5a_2k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2\ 9)$$

u^3 项

$$\left. \begin{aligned} a_7 + a_6 - a_3a_4k - a_2a_6k + a_7k - a_1a_7k + a_2p_1 + a_2q \\ - 3a_1a_2q + 3a_1^2a_2q - a_1^3a_2q &= 0 \\ -a_6 - a_6 + b_7 - a_6k - a_6b_2k - a_3b_4k + b_7k - a_1b_7k + b_2p_1 - a_1^3p_2 + q \\ - 3a_1q + 3a_1^2q - a_1^3q + b_2q - 3a_1b_2q + 3a_1^2b_2q - a_1^3b_2q &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2\ 10)$$

u^2v 项

$$\left. \begin{aligned} -3a_6 + 2a_8 + b_7 - a_4^2k - 2a_3a_5k - 2a_2a_7k + 2a_8k - 2a_1a_8k \\ - 3a_2^2q + 6a_1a_2^2q - 3a_1^2a_2^2q &= 0 \\ -a_7 - a_7 - 3b_6 + 2b_8 - a_7k - a_7b_2k - a_4b_4k - 2a_3b_5k - a_2b_7k \\ + 2b_8k - 2a_1b_8k - 3a_1^2a_2p_2 - 3a_2q + 6a_1a_2q - 3a_1^2a_2q \\ + 3a_2b_2q + 6a_1a_2b_2q - 3a_1^2a_2b_2q &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2\ 11)$$

w^2 项

$$\left. \begin{aligned} -2a_7 + 3a_9 + b_8 - 3a_4a_5k - 3a_2a_8k + 3a_9k - 3a_1a_9k \\ + 3a_2^3q - 3a_1a_2^3q &= 0 \\ -a_8 - a_8 - 2b_7 + 3b_9 + a_8k - a_8b_2k - a_5b_4k - 2a_4b_5k - 2a_2b_8k \\ + 3b_9k - 3a_1b_9k - 3a_1a_2^2p_2 + 3a_2^2q - 3a_1a_2^2q \\ + 3a_2^2b_2q - 3a_1a_2^2b_2q &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2\ 12)$$

v^3 项

$$\left. \begin{aligned} -a_8 + b_9 - 2a_5^2k - 4a_2a_9k - a_2^4q &= 0 \\ -a_9 - a_9 - b_8 - a_9k - a_9b_2k - 2a_5b_5k - 3a_2b_9k - a_2^3p_2 \\ - a_2^3q - a_2^3b_2q &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2\ 13)$$

注意到系统(2 1)和展开式(2 4)的形式,可推断 $a_2 = b_1$, 将其代入(2 5) ~ (2 13) 并继续利用 MATHEMATICA 解得二个模态的系数,若记系统(2 1)的模态 1 系数是 $a_{11}, a_{21}, a_{31}, b_{11}, b_{21}, b_{31}$, 模态 2 系数是 $a_{12}, a_{22}, a_{32}, b_{12}, b_{22}, b_{32}$, 则三次近似的二个模态系数分别为

模态 1

$$\left. \begin{aligned} a_{11} = b_{21} = - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 4k/2k} \\ a_{21} = b_{11} = a_{31} = b_{31} = a_{41} = b_{41} = a_{51} = b_{51} = 0 \\ a_{61} = \frac{-8k^4 l_{61} n_{61}}{m_1^2}, a_{71} = 0, a_{81} = \frac{12g_{81}}{m_1} \\ a_{91} = b_{61} = 0, b_{71} = \frac{3h_{71} j_{71}}{m_1}, b_{81} = 0, b_{91} = a_{81} \end{aligned} \right\} \quad (2\ 14)$$

模态 2

$$\left. \begin{aligned} a_{12} = b_{22} &= -\frac{\sqrt{2+4k^2}}{2k} \\ a_{22} = b_{12} = a_{32} = a_{42} = a_{52} = b_{32} = b_{42} = b_{52} &= 0 \\ a_{62} &= \frac{-8k^4 l_{62} n_{62}}{m_2^2}, a_{72} = 0, a_{82} = \frac{12g_{82}}{m_2} \\ a_{92} = b_{62} = 0, b_{72} &= \frac{3h_{72} j_{72}}{m_2}, b_{82} = 0, b_{92} = a_{82} \end{aligned} \right\} \quad (2\ 15)$$

其中

$$l_{6i} = (-62 - 3 - 62k)^2 - (248 + 124 - 248k)k^2 \sqrt{2+4k^2}(48 + 48 + 32^2 + 96k + 48k + 128k^2) \quad (2\ 16)$$

$$n_{6i} = k^3 p_1 - k(2 + 3k^2)p_2 + (4 + 2^3k + 4^2k^2 + 4k^3)q \sqrt{2+4k^2}(-k^3 p_1 + 2k p_2 + k^3 p_2 - 3q - 2^2kq - 2k^2q) \quad (2\ 17)$$

$$g_{8i} = n_{6i} \quad (2\ 18)$$

$$h_{7i} = 4 + 2 + 4k - 4\sqrt{2+4k^2} \quad (2\ 19)$$

$$j_{7i} = n_{6i} \quad (2\ 20)$$

$$m_i = -16k^4(1 + 2k + k) + 4k^4(2 + 2k - 2\sqrt{2+4k^2}) \quad (2\ 21)$$

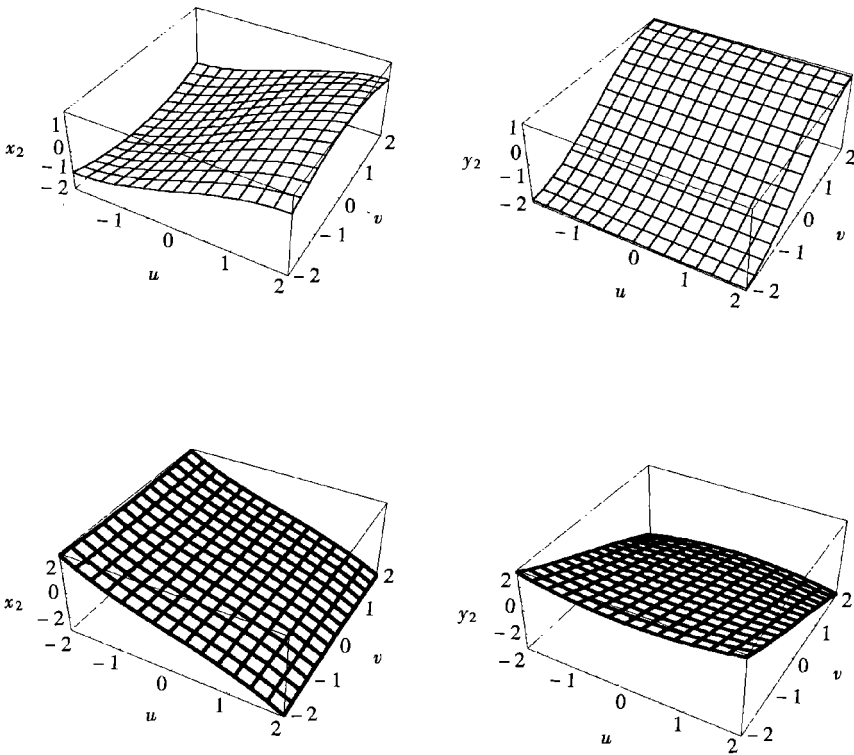


图 1 非线性模态(2 22) 不变曲面

在系数表达式(2 16)~ (2 21)中, $i = 1$ 表示模态 1 的系数, $i = 2$ 表示模态 2 的系数, 并且在 $\sqrt{2 + 4k^2}$ 前的符号分别取上端和下端符号 于是, 三次近似非线性模态的表达式为

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= a_{1i}u + a_{6i}u^3 + a_{8i}uw^2 \\ y_2 &= a_{1i}v + b_{7i}u^2v + a_{8i}v^3 \end{aligned} \right\} \quad (2 22)$$

其中 $i = 1, 2$ 分别对应模态 1 和模态 2 的表达式

图 1 绘出了当 $k = 1, g = 0.05, p_1 = 0.5, p_2 = 0.7, q = 0.02$ 时二个非线性模态不变子曲面, 其细实线曲面表示模态 1 的不变曲面; 粗实线曲面表示模态 2

若取 $g = 0, p_1 = g, p_2 = 0, q = 0$, 代入(2 14)~ (2 21) 立即可求得二个模态的模态系数

模态 1:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= b_{21} = 1, \quad a_{21} = b_{11} = a_{31} = b_{31} = a_{41} = b_{41} = a_{51} = b_{51} = 0 \\ a_{61} &= \frac{g(k-3)}{2k(k-4)}, \quad a_{81} = -\frac{3g}{2k(k-4)}, \quad b_{71} = \frac{3g(k-1)}{2k(k-4)} \\ b_{91} &= a_{81}, \quad a_{71} = b_{61} = b_{81} = a_{91} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2 23)$$

模态 2:

$$\left. \begin{aligned} a_{12} &= b_{22} = -1, \quad a_{22} = b_{12} = a_{32} = b_{32} = a_{42} = b_{42} = a_{52} = b_{52} = 0 \\ a_{62} &= \frac{(3+7k)g}{2k(4+9k)}, \quad a_{82} = \frac{3g}{2k(4+9k)}, \quad b_{72} = \frac{3g(1+3k)}{2k(4+9k)} \\ b_{92} &= a_{82}, \quad a_{72} = a_{92} = b_{62} = b_{82} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2 24)$$

上述(2 23)和(2 24)式和文[6]中例 2 的结果完全一致

由模态系数表达式(2 14)~ (2 21), 当下列条件之一成立时, 系数将出现奇异性:

$$(1) \quad k = 0 \quad (2 25)$$

$$(2) \quad m_i = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (2 26)$$

上述条件(2 25)和(2 26)被称为系统(2 1)的非线性模态的奇异性条件 本文仅研究当(2 25)和(2 26)都不成立时, 即非奇异时的非线性模态, 至于奇异时非线性模态的研究, 我们将另文讨论

3 非线性模态的叠加性

众所周知, 线性系统的各阶模态叠加后仍为系统的解, 亦即各阶模态具有叠加性, 而非线性系统叠加原理一般已不成立 但这里所定义的非线性模态是在平衡点的邻域内, 其非线性强弱依赖于该邻域的大小, 邻域越小, 非线性越弱 因此, 非线性模态的叠加性一定依赖于初值的选取 那么, 是否还有另外的因素影响非线性模态的叠加性? 就局部性而言, 非线性系统和线性系统性质上的重要区别之一是: 非线性系统存在着分岔现象^[1], 由于所论系统(1 1)是自由振动系统, 因此, 我们将讨论模态动力学方程平衡解的静态分岔对叠加各模态后形成的模态解描述原系统解准确性的影响

设 (u_1, v_1) 和 (u_2, v_2) 分别是模态 1 和模态 2 的位置和速度坐标, 则由(2 22) 可以产生物理坐标和模态坐标之间的非线性关系^[6] 将(2 22) 式代入系统(1 1) 可产生关于二个模态坐标所满足的模态动力学方程(忽略三次以上的项):

$$u_i + (1 + k - a_{1i}k)u_i + (q + p_1 - a_{6i}k - a_{1i}^3q + 3a_{1i}^2q - 3a_{1i}q)u_i^3 - a_{8i}ku_iu_i^2 = 0 \quad (3.1)$$

其中 $i = 1$ 和 $i = 2$ 分别对应于模态 1 和模态 2 方程(3.1)表明, 当

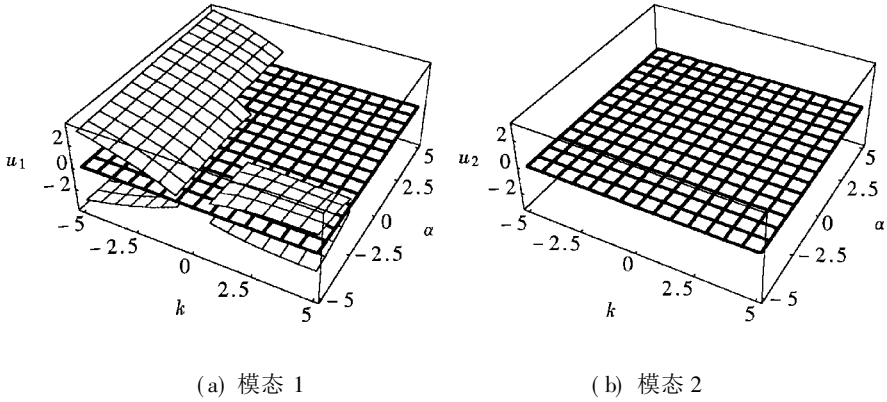


图 2 模态动力学方程平衡解随 k 的静态分岔图

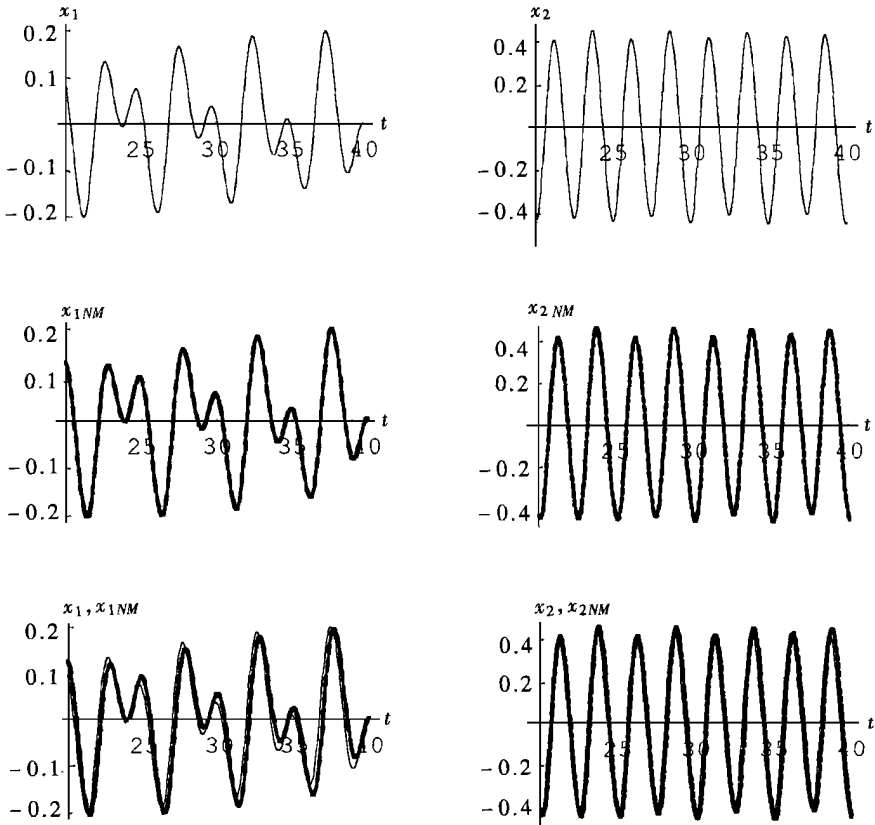


图 3 当 $\alpha = 4, (u_{10}, v_{10}, u_{20}, v_{20}) = (0, 1, 0, 0, 1, 0)$ 时的数值解与模态解比较

$$\frac{a_{1i}k - k - 1}{q + p_1 - a_{6i}k - a_{1i}^3q + 3a_{1i}^2q - 3a_{1i}q} > 0 \quad (3.2)$$

时,存在着静态分岔 特别地,当(3 2)式左端式的分母为零时,存在着退化分岔,这时,必须考虑更高阶的动力学方程^[11] 为使数据保持统一以便比较,取 $p_1 = 0.5, p_2 = 0.7, q = 0.02$ (参看图1) 图2表明了模态动力学方程(3 1)的模态1和模态2随二个参数 μ 和 k 的静态分岔图,其中粗实线曲面表示平凡平衡解,细实线表示非平凡平衡解曲面

若记非线性模态1解为 $x_2^{(1)}$, 模态2解为 $x_2^{(2)}$ (参看式(2 22)), 则系统(1 1)的模态叠加解(简记模态解)为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= u_1 + u_2 \\ x_2 &= x_2^{(1)} + x_2^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

其中 u_1, u_2 满足(3 1), $x_2^{(1)}$ 和 $x_2^{(2)}$ 由(2 22)式确定 下面,我们将分析模态解(3 3)描述原系统(2 1)的程度,至于非线性模态1解 $x_2^{(1)}$ 和模态2解 $x_2^{(2)}$ 描述原系统(2 1)二个模态的准确性,文[6]已有结论,这里不再重复

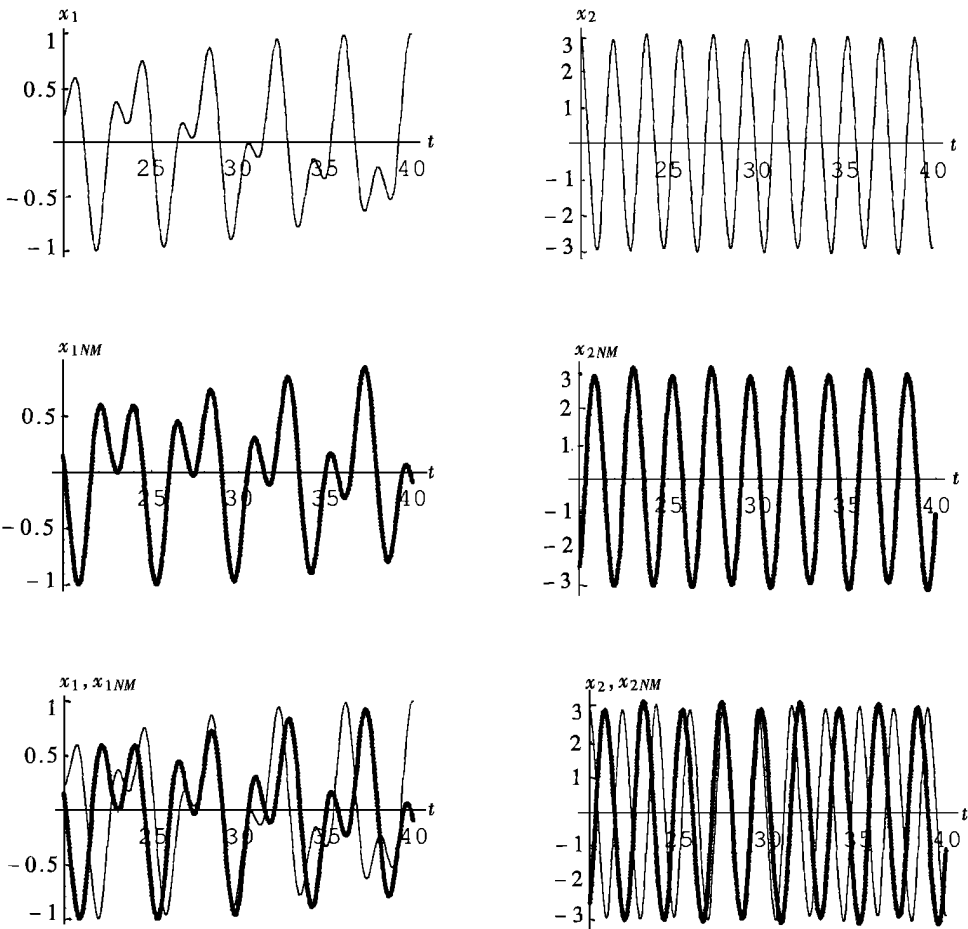


图4 当 $\mu = 4, (u_{10}, v_{10}, u_{20}, v_{20}) = (0.5, 0, 0.5, 0)$ 时的数值解与模态解比较

分析过程分为三步:首先,对系统(2 1)应用四阶的R_K方法求数值解,其初始值与模态解(3 3)的初值相同;其次,给出非线性模态解的结果;最后,将二个结果进行比较 图3、图4、图5和图6都表示了这种分析过程 固定 $k = 1, p_1, p_2$ 和 q 与图1和图2的取值相同,图3、

图 4、图 5 和图 6 表明了不同的非对称参数 α 和初值得出的结果。在图 3 和图 4 中, $\alpha = 4$, 而初值分别为 $(u_{10}, v_{10}, u_{20}, v_{20}) = (0.1, 0, 0.1, 0)$ 和 $(0.5, 0, 0.5, 0)$; 在图 5 和图 6 中, $\alpha = -4$, 初值分别是 $(0.01, 0, 0.01, 0)$ 和 $(0.1, 0, 0.1, 0)$ 。于是, 可以由(3.3)求得相应的模态解和数值解的初值。在所有图 3~6 中, 细实线表示数值解, 粗实线表示模态解(3.3), 而第三行是二个解的比较, 其中的模态系数是通过(2.14)~(2.21)式解得的。

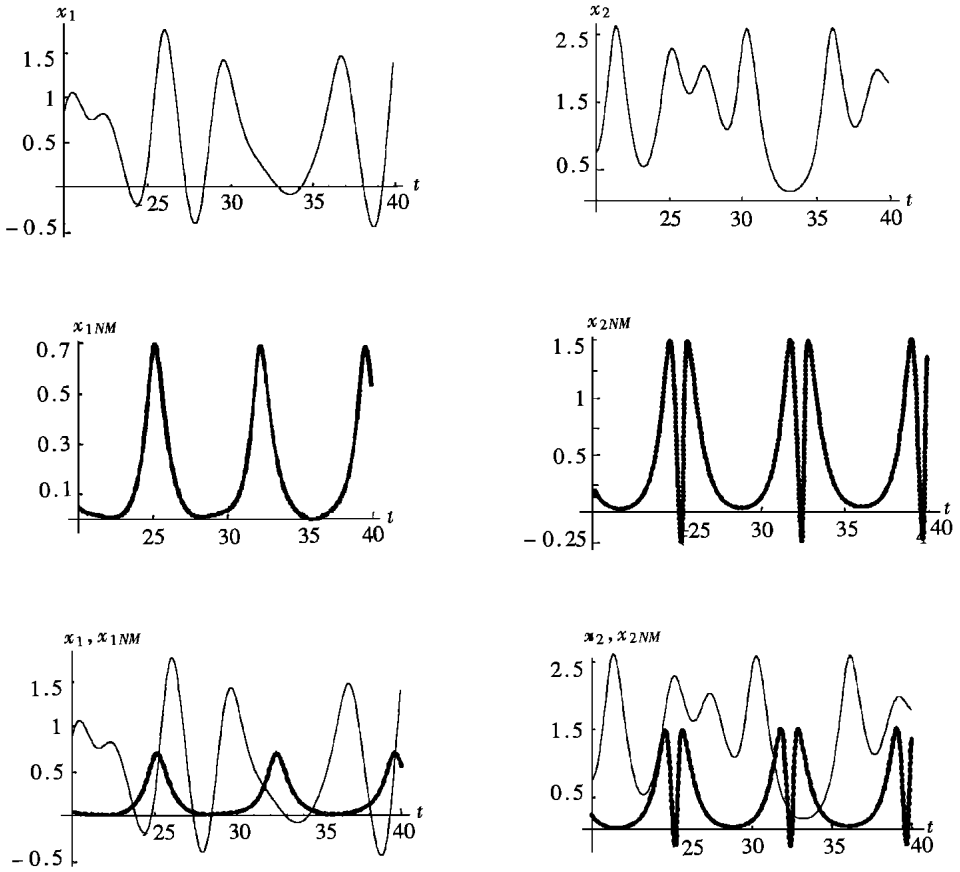


图 5 当 $\alpha = -4, (u_{10}, v_{10}, u_{20}, v_{20}) = (0.01, 0, 0.01, 0)$ 时的数值解与模态解比较

图 3 表明了数值解与模态解很好的吻合, 图 4 说明了初值的增大将影响它们的吻合, 但曲线的走向仍基本保持一致, 只是模态解比数值解在时间上有个滞后和超前。综合图 3 和图 4, 我们可以看出, 对于弱非线性系统, 非线性模态方法是适用的, 也可在工程实际中加以应用, 但对于强非线性系统, 方法是否适用还有待于进一步研究。至于应用非线性模态方法所得到的模态叠加解与对应的线性化系统解的比较, 文[6]已有结果, 本文不再重复。在图 5 和图 6 中, 发现这种吻合已不可能, 尽管初值取的比图 3 中的初值再小一个量级(参看图 5)。比较图 2(a)看出, 这时的模态动力学方程平衡解发生了静态分岔, 对模态解已产生了本质的影响。为了进一步证实我们提出的观点, 重复上述过程, 我们还考察了 $\alpha = 0.05, \alpha = -0.05, \alpha = 2, \alpha = -2$ 时的结果, 同时, 固定 $\alpha = 0.05$, 还考察了 $k = 1, k = -1, k = -2, k = -4$ 时的情形。结果发现, 当参数 α 或 k 取在已产生静态分岔的值时, 数值解与模态解无论初值多么小, 都无

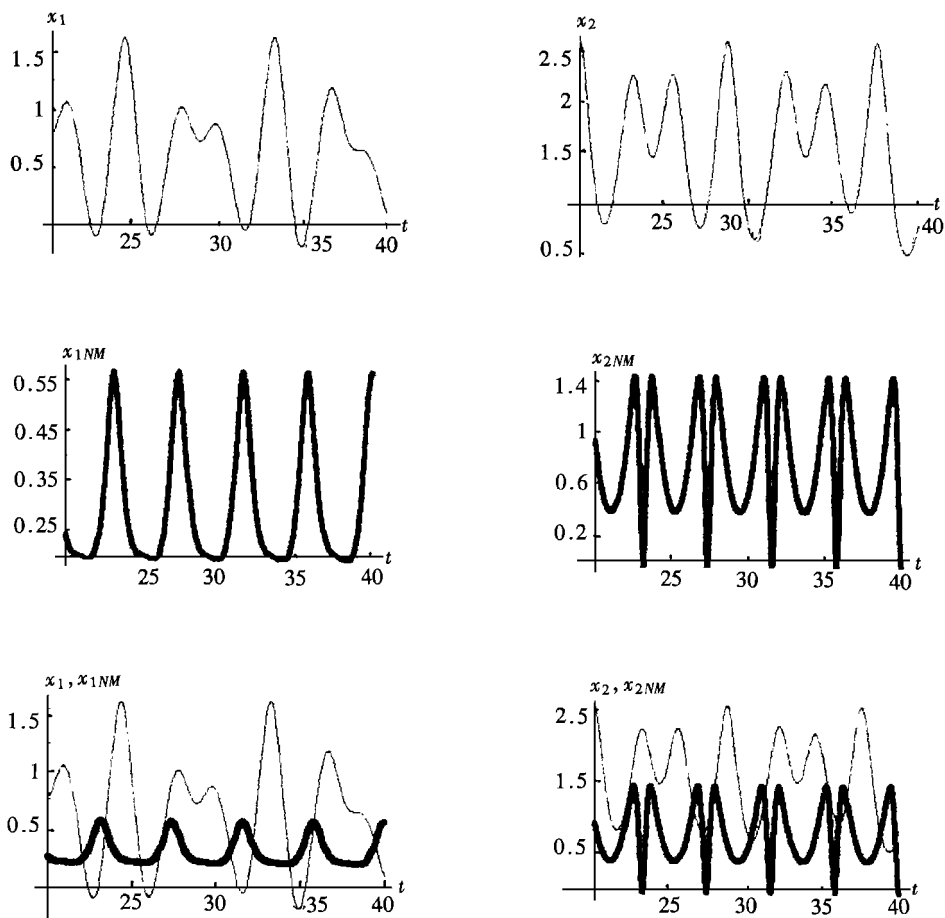


图6 当 $\gamma = -4, (u_{10}, v_{10}, u_{20}, v_{20}) = (0, 1, 0, 0, 1, 0)$ 时的数值解与模态解比较

法吻合,说明这时的模态解已无法描述原系统的局部动力学行为;当 γ 或 k 取到不产生静态分岔的值时,数值解与模态解的吻合受初值的影响,初值越小,这种吻合越好,说明了这时的模态解(3.3)描述原系统(1.1)的程度仅依赖于初值,这也进一步证实了非线性模态方法局部性的限制。由于篇幅所限,其余的结果图都已略去。

4 结 论

- (1) 非奇异时,模态坐标所满足的模态动力学方程静平衡态的稳定性与非线性模态叠加解表示原系统解的准确性有着密切的联系
- (2) 当参数取得使模态动力学方程的平衡解不产生静态分岔的值时,模态解描述原系统解的准确性受模态动力学方程初值的影响,初值越小,准确程度越好;反之,当参数值取得使平衡解产生静态分岔的值时,非线性模态方法失效
- (3) 奇异时的非线性模态性质有待于进一步研究

参 考 文 献

- 1 R. M. Rosenberg, Normal modes in nonlinear dual_mode systems, *J. Appl. Mech.*, **27**(3) (1960), 263–268
- 2 R. M. Rosenberg, On normal vibrations of a general class of nonlinear dual_mode systems, *J. Appl. Mech.*, **28**(3) (1961), 275–283
- 3 R. M. Rosenberg, The normal modes of nonlinear n _degree of freedom systems, *J. Appl. Mech.*, **30**(1) (1962), 7–14
- 4 R. M. Rosenberg, On a geometrical method in nonlinear vibrations, in *Les Vibrations Forces dans systems Nonlinearities*, Int. Conf. in Nonlinear Vibrations, Marseille (1964)
- 5 R. M. Rosenberg, On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom, *Adv. Appl. Mech.*, **8**(2) (1966), 155–242
- 6 S. W. Shaw and C. Pierre, Normal modes for nonlinear vibrations systems, *J. Sound Vibration*, **164**(1) (1993), 35–122
- 7 G. V. Anand, Natural modes of a coupled nonlinear system, *Internat. J. Non Linear Mech.*, **7**(1) (1972), 81–91.
- 8 A. K. Mishra and M. C. Singh, The normal modes of nonlinear symmetric systems by group representation theory, *Internat. J. Non Linear Mech.*, **9**(4) (1974), 463–480
- 9 T. K. Caughey, A. Vakakis and J. M. Sivo, Analytical study of similar normal modes and their bifurcations in a class of strongly nonlinear systems, *Internat. J. Non Linear Mech.*, **25**(5) (1990), 521–533
- 10 T. L. Jonson and R. Rand, On the existence and bifurcation of minimal modes, *Internat. J. Non Linear Mech.*, **14**(1) (1979), 1–12
- 11 陈予恕、徐鉴, Van del Pol_Duffing_Mathieu 型方程主参数共振分叉解的普适性分类, *中国科学 A 辑*, **25**(12) (1995), 1281–1297

Nonlinear Normal Modes and Their Superposition in a Two Degrees of Freedom Asymmetric System with Cubic Nonlinearities

Xu Jian Lu Qishao Huang Kelei

(Department of Applied Mathematics and Physics, Beijing University of Aeronautics
and Astronautics, Beijing 100083, P. R. China)

Abstract

This paper investigates nonlinear normal modes and their superposition in a two degrees of freedom asymmetric system with cubic nonlinearities for all nonsingular conditions, based on the invariant subspace in nonlinear normal modes for the nonlinear equations of motion. The focus of attention is to consider relation between the validity of superposition and the static bifurcation of modal dynamics. The numerical results show that the validity has something to do not only with its local restriction, but also with the static bifurcation of modal dynamics.

Key words nonlinear normal mode, asymmetric system, nonlinear vibration, nonlinear dynamics