应用数学和力学, 第 19 卷 第 12 期(1998 年 12 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

双曲型 Lagrangian 函数*

于学刚[①]

(叶庆凯推荐; 1996 年 9 月 15 日收到, 1997 年 6 月 5 日收到修改稿)

摘　要

双曲复数与 Minkowski 几何相对应, 由四维时空间隔不变量和双曲型 Lorentz 变换可导出双曲型 Lagrangian 方程和 Hamilton_Jacobi 方程•

关键词　双曲四元数　Lagrangian 函数　广义惯性力

中图分类号　O316

§1. 引　言

双曲复函理论是一种新的数学分支[1], 双曲复空间与 Minkowski 空间相吻合, 双曲复数的模方与双曲内积范数相对应• 当模为 0 时为连续零因子区域, 对应相对论空间的拟光区域; 模为 1 时, 在二维时空对应一对双曲线• 用双曲复函理论可以同时讨论相对论和量子力学的内容, 并使两论对应的时空间、坐标变换、不变量、群表示和算符表示从形式上统一起来[2, 3]•

§2. 预 备 知 识

在双曲复空间引入虚单位 j, 有性质:

$$j^2 = 1, j^* = -j \tag{2.1}$$

定义双曲型线性四元数[4]:

$$X_\mu = \vec{r} + jct,\quad X_\mu^* = \vec{r} - jct \tag{2.2a, b}$$

两式取内积给出四维时空间隔和复数模方:

$$s^2 = -X_\mu^* X_\mu = c^2t^2 - r^2 \tag{2.3}$$

四维形式的 Lorentz 变换:

$$X_\mu' = j\frac{1}{c}\omega_\mu \odot X_\mu \tag{2.4}$$

其中: $\omega_\mu = (\vec{v} + jc)/\alpha$, 为四维广义速度, $\odot$ 为四维点矢, $\alpha = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$• 取 τ 为自时, 有:

$$d\tau = \alpha dt \tag{2.5}$$

令:

$$\omega_\mu = \frac{dX_\mu}{d\tau} = \vec{\omega} + j\omega_0 \tag{2.6}$$

---

* 吉林省教委科学基金资助课题

① 通化师范学院物理系, 吉林通化 134002

其中 $\vec{\omega} = d\vec{r}/d\tau = \vec{v}/\alpha, \quad \omega_0 = c/\alpha$ (2.7)

速度空间间隔:

$$-\omega_\mu^* \omega_\mu = \omega_0^2 - \omega^2 = c^2 \qquad (2.8)$$

令四维广义加速度:

$$W_\mu = d\omega_\mu / d\tau = \vec{W} + jW_0 \qquad (2.9)$$

加速度空间间隔:

$$W_\mu^* W_\mu = W^2 - W_0^2 = a^2/\alpha^6 \qquad (2.10)$$

其中: $\vec{a} = d\vec{v}/dt$, 取四维动量:

$$P_\mu = m_0 \omega_\mu = \vec{P} + jP_0 \qquad (2.11)$$

动量空间间隔:

$$-P_\mu^* P_\mu = E^2/c^2 - P^2 = m_0^2 c^2 \qquad (2.12)$$

取四维广义力:

$$F_\mu = dP_\mu / d\tau = \vec{F} + jF_0 = m_0 W_\mu \qquad (2.13)$$

广义力空间间隔:

$$F_\mu^* F_\mu = f^2 = \left(\frac{d\vec{P}}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dE}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}(m\vec{A})^2 \qquad (2.14)$$

其中: $\vec{f} = d(m\vec{v})/dt$, $\vec{A} = \vec{a}/\alpha$, $\vec{A}$ 命名为广义加速度, 而 $m\vec{A}$ 为广义惯性力·

§3. 第一类 Lagrangian 函数

在双曲复空间取最小作用量方程:

$$S = \int b\,ds \qquad (3.1)$$

其中 b 为待定常数· 因作用量函数必须满足与惯性系选择无关的要求, 取 ds 为四维间隔不变量:

$$d^2 s = -dX_\mu^* dX_\mu \qquad (3.2)$$

代入(3.1)得:

$$S = \int b(-dX_\mu^* dX_\mu)^{1/2} = \int b(c^2 - v^2)^{1/2} dt \qquad (3.3)$$

取 Lagrangian 函数:

$$L_1 = b(c^2 - v^2)^{1/2} \qquad (3.4)$$

有 $\partial L_1/\partial \dot{q} = \partial L_1/\partial v = -bv/\alpha c$ (3.5)

当取 $b = -m_0 c$ 时, 则:

$$\partial L_1/\partial v = (1/\alpha) m_0 v = mv = P \qquad (3.6)$$

而 $v\,\partial L_1/\partial v - L_1 = mc^2 = H$ (3.7)

为系统的 Hamilton 函数· (3.7) 也可写作

$$H = -L_1 + \sum_{i=1}^{3} p_i \dot{q}_i \qquad (3.8)$$

有: $dH = -dL_1 + \sum_{i=1}^{3}(p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i)$ (3.9)

取: $L_1 = L_1(q, \dot q, t)$, 则:

义 加 $$dL_1 = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial L_1}{\partial \dot q_i}d\dot q_i + \frac{\partial L_1}{\partial q_i}dq_i\right) + \frac{\partial L_1}{\partial t}dt \tag{3.10}$$

代入(3.9), 并注意(3.6) 得:

$$dH = \sum_{i=1}^{3}\left(\dot q_i dp_i - \frac{\partial L_1}{\partial q_i}dq_i\right) - \frac{\partial L_1}{\partial t}dt \tag{3.11}$$

取 $H = H(q, p, t)$, 则

$$dH = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i\right) + \frac{\partial H}{\partial t}dt \tag{3.12}$$

由(3.11)、(3.12) 得:

$$\partial H/\partial q_i = -\partial L_1/\partial q_i;\ \partial H/\partial t = -\partial L_1/\partial t \tag{3.13a}$$
$$\partial H/\partial p_i = \dot q_i \quad d \tag{3.13b}$$

§4. 第二类 Lagrangian 函数

取最小作用量方程:

$$S = \int b(-\omega_\mu^* \omega_\mu)^{1/2} d\tau \tag{4.1}$$

$$L_2 = b(-\omega_\mu^* \omega_\mu)^{1/2} = -m_0c^2 = L_1/\alpha \tag{4.2}$$

其中 m_0c^2 为静能。 由(2.6) 令:

$$\partial L_2/\partial \omega_\mu = \partial L_2/\partial \omega + j\partial L_2/\partial \omega_0 \tag{4.3}$$

则: $$\partial L_2/\partial \omega = -b\omega/c = P,\ \partial L_2/\partial \omega_0 = b\omega_0/c = -P_0 \tag{4.4}$$

有关系式: $$\partial L_2/\partial \omega_\mu = m_0\omega_\mu^* = P_\mu^* \tag{4.5}$$

(4.2) 可写作:

$$L_2 = \omega_\mu \partial L_2/\partial \omega_\mu = \omega_\mu P_\mu^* \tag{4.6}$$

对(4.6) 乘 m_0, 注意(2.11)、(2.12) 有质能关系:

$$E^2 = P^2c^2 + m_0^2c^4 \tag{4.7}$$

所以(4.6) 可看作质能关系的 Lagrangian 函数形式。 显然(4.6) 与(3.7) 不同的是, 系统的 Hamilton 函数 H 隐藏于 $\omega_\mu \partial L_2/\partial \omega_\mu$ 之中。

由(4.6) 有:

$$dL_2 = \omega_\mu dP_\mu^* + P_\mu^* d\omega_\mu \tag{4.8}$$

注意到(2.6)、(2.13) 则(4.8) 可写作:

$$dL_2 = F_\mu^* dX_\mu + P_\mu^* d\omega_\mu \tag{4.9}$$

取 $L_2 = L_2(X_\mu, \omega_\mu)$, 则:

$$dL_2 = \frac{\partial L_2}{\partial X_\mu}dX_\mu + \frac{\partial L_2}{\partial \omega_\mu}d\omega_\mu \tag{4.10}$$

比较(4.9)、(4.10) 有:

$$\partial L_2/\partial X_\mu = F_\mu^*,\ \partial L_2/\partial \omega_\mu = P_\mu^* \tag{4.11a, b}$$

命名为四维双曲型正则方程。

令 $\dot X_\mu = dX_\mu/d\tau$, 由(2.13)、(4.11) 给出:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L_2}{\partial \dot{X}_\mu}\right)-\frac{\partial L_2}{\partial X_\mu}=0 \tag{4.12}$$

为四维双曲型 Lagrangian 方程•

由(4.2)令 $\partial L_2/\partial\vec{r}=(1/\alpha)\partial L_1/\partial\vec{r}$, 则由(3.13a)得:

$$\partial L_1/\partial\vec{r}=\vec{f}=d(m\vec{v})/dt \tag{4.13}$$

(3.13)可写作

$$\partial H/\partial q_i=-\dot{p}_i,\ \partial H/\partial p_i=\dot{q}_i \tag{4.14}$$

为三维形式的相对论正则方程, 而:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L_1}{\partial q_i}=0 \tag{4.15}$$

为三维双曲型 Lagrangian 方程•

(4.11a)可写作:

$$\partial L_2/\partial X_\mu=\partial L_2/\partial\vec{r}+j\partial L_2/\partial(ct)=\vec{F}-jF_0 \tag{4.16}$$

其中: 最小 $\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{d\tau}=\frac{1}{\alpha}\frac{d}{dt}\left(m\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$ (4.17)

为相对论质点的运动方程•

$$F_0=\frac{1}{c}\frac{dE}{d\tau}=\frac{1}{c}\vec{F}\cdot\vec{v}=\frac{1}{\alpha}\frac{d}{dt}(m_0\omega_0) \tag{4.18}$$

为运动方程的能量积分•

(2.13)也可写作:

$$dP_\mu=F_\mu d\tau=\alpha F_\mu dt \tag{4.19}$$

命名为相对论四维动量定理• (4.19)可分写成:

$$d\vec{P}=\vec{F}d\tau=\alpha\vec{F}dt \tag{4.20}$$

为相对论三维动量定理•

$$dP_0=\frac{1}{c}dE=\alpha F_0dt$$

或: $dE=c\alpha F_0dt=\alpha\vec{F}\cdot d\vec{r}$ (4.21)

为相对论能量定理• 当 $v\ll c$ 时, (4.20)、(4.21)可分别过渡到经典的动量定理和能量定理•

取四维双曲梯度算符[5]:

$$\Box=\frac{\partial}{\partial X_\mu}=\nabla+j\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\quad \Box^*=\frac{\partial}{\partial X^*_\mu}=\nabla-j\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \tag{4.22}$$

作内积: $\Box^*\Box=\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ (4.23)

(4.11a)可写作:

$$\Box L_2=F^*_\mu,\quad \Box^*L_2=F_\mu \tag{4.24}$$

作内积可导出:

$$\left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)^2=\frac{1}{c^2}\left(\frac{dE}{dt}\right)^2+(m\vec{A})^2 \tag{4.25}$$

(4.25)为质能变化关系式, 它描述了相对论中, 能量变化率、动量变化率和广义惯性力的关

联• 当 $v \ll c$ 时, (4.25) 过渡到经典的牛顿第二定律:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\vec{a} \tag{4.26}$$

§5. Hamilton_Jacobi 方程

对(3.1)取变分:

$$\delta S = b\int \delta(ds) = b\int d(\delta s) \tag{5.1}$$

$$\therefore \quad \delta S = b\delta s \tag{5.2}$$

由 Lorentz 变换(2.4), 在惯性系中取 $\delta\omega_\mu = 0$, 则(2.4) 的变分形式为:

$$\delta X'_\mu = j\frac{1}{c}\omega_\mu \odot \delta X_\mu \tag{5.3}$$

由(3.2)、(5.2) 取:

$$\delta S = b(-\delta X'^*_\mu \delta X'_\mu)^{1/2} \tag{5.4}$$

与(5.3) 联立, 得:

$$\delta S = \left(\frac{b^2}{c^2}\omega^*_\mu \odot \delta X^*_\mu \cdot \omega_\mu \odot \delta X_\mu\right)^{1/2} = (P^*_\mu \odot \delta X^*_\mu \cdot P_\mu \odot \delta X_\mu)^{1/2} \tag{5.5}$$

令 Q 为主函数, 取:

$$\delta Q = P_\mu \odot \delta X_\mu = \frac{\partial Q}{\partial X_\mu} \odot \delta X_\mu \tag{5.6}$$

亦即:

$$P_\mu = \frac{\partial Q}{\partial X_\mu} = \Box Q \tag{5.7}$$

(5.5) 可写作:

$$\delta S = (\delta Q^* \delta Q)^{1/2} \tag{5.8}$$

有

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)^2 + m_0^2 c^2 = 0 \tag{5.9}$$

为双曲型 Hamilton_Jacobi 方程•

§6. 结 束 语

双曲虚单位 j 与 Minkowski 空间具有一种内在的逻辑关联• 通过双曲复函理论可以简明地讨论相对论内容• 由 Lorentz 变换导出 Hamilton_Jacobi 方程, Lagrangian 函数对应着质能关系, 显示了这套数学工具与相对论理论的密切联系• 特别是首次引入广义惯性力, 讨论了动量变化率、能量变化率与广义惯性力的关联, 拓宽了狭义相对论的研究内容•

参 考 文 献

1 熊锡金, 泛复变函数, 武汉大学学报, (1) (1980), 26—29•

2 于学刚、崔景贸, 双曲量子力学, 松辽学刊, (4) (1995), 1—6•

3 于学刚、马龙军, 双曲型复泛函分析概论, 通化师院学报, (4) (1993), 30—34•

4 于学刚、于学钎, 双曲复函与相对论, 数学物理学报, **15**(4) (1995), 435—441•

5 于学刚、高俊丽, 双曲张量分析,《第二届国际非线性力学会议论文集》, 北京大学出版社 (1993), 883—884•

Hyperbolic Lagrangian Functions

Yu Xuegang
(Department of Physics, Tonghua Teachers' College, Tonghua, Jilin 134002, P.R.China)

Abstract

Hyperbolic complex numbers correspond with Minkowski geometry. The hyperbolic Lagrangian equation and the Hamilton_Jacobi equation will be derived from the invariants of four_dimensional space_time intervals and hyperbolic Lorentz transformations.

Key words hyperbolic quaternion numbers, Lagrangian functions, generalized inertia forces