应用数学和力学, 第 19 卷 第 12 期(1998 年 12 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

轴对称问题的 Wilson 四边形单元*

高　岩①②

(张汝清推荐; 1997 年 4 月 8 日收到, 1997 年 9 月 12 日收到修改稿)

摘　要

给出了一族轴对称问题的改进 Wilson 元, 利用强分片检验证明了其收敛性, 讨论了单元函数结构• 从而给出了一种构造收敛的轴对称非协调元方法•

关键词　有限元　非协调元　轴对称　收敛性

中图分类号　O242

§1. 引　　言

有关平面和空间问题非协调元方法及其收敛性研究目前已趋于完善[1, 2]• 然而, 关于轴对称非协调元方法及收敛性研究则刚刚开始[3]• 鉴于文[3]已建立了轴对称非协调元收敛理论, 因而类似于平面和空间问题, 建立一种收敛的轴对称非协调元方法已成为可能•

众所周知, 第一个非协调元是 Wilson 元, 但由于它对任意网格不能保证收敛, 许多学者对它进行改进, 得到了若干收敛的修正 Wilson 元[2, 4, 5]• 其中文[2]的结果最具有一般性, 给出了一个 Wilson 元类, 将以往各种改进的 Wilson 元包含在其中, 成为特例• 本文将对轴对称问题给出类似于文[2]的 Wilson 元类, 并讨论其收敛性, 从而建立一种收敛的轴对称非协调元一般方法•

§2. 轴对称 Wilson 类非协调元及收敛性分析

为叙述方面, 我们讨论下述二阶椭圆方程

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x, y, z), \qquad (x, y, z)\in\Omega \\ &u\mid_\Gamma=0 \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

其中, Ω 为 xOy 平面区域 Ω 绕 z 轴旋转而成的 R^3 中轴对称区域, Γ 为 Ω 边界, 函数 f 关于 z 轴对称• 方程(2.1) 的变分形式为求 $u\in H_0^1(\Omega)$ 使得

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dV=\int_\Omega f v\,dV, \qquad \forall v\in H_0^1(\Omega) \tag{2.2}$$

* 机械部基金资助项目, 博士论文部分内容

① 大连理工大学应用数学系, 大连 116024

② 燕山大学数理系, 秦皇岛 066004

利用柱坐标: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, (2.2) 式等价于求 $u \in H^1_{0r}(\Omega)$ 使得

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} \right) r\,dr\,dz = \int_\Omega f v r\,dr\,dz, \qquad \forall\ v \in H^1_{0r}(\Omega) \tag{2.3}$$

其中 $u = u(r, z) = u(x, y, z)$, $f = f(r, z) = f(x, y, z)$, $H^1_{0r}(\Omega)$ 为加权 Sobolev 空间• 有关加权 Sobolev 空间 $H^1_{0r}(\Omega)$ 的定义及有关性质可参见文[3] 或[6]•

下面讨论问题(2.3)的有限元方法• 进一步, 假定 Ω 是一个多边形• 对于任意 $h > 0$, 记 $\Omega = \bigcup_{K \in \mathscr{K}_h} K$ 为 Ω 的一个剖分, 其中每一个 K 为凸四边形, 半径不大于 h, 对任意 $K_1, K_2 \in \mathscr{K}_h$, $K_1 \cap K_2$ 为空集或 K_1 和 K_2 的共同边界• 单元剖分 $\mathscr{K}_h$ 满足通常的正则性假设, 即存在常数 σ 和 r 使得下式

$$h_K \leqslant \sigma h'_K, \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant 4} |\cos\theta_i^K| \leqslant r < 1 \tag{2.4}$$

关于 $K \in \mathscr{K}_h$ 和 h 一致成立, 其中 h_K, h'_K 和 θ_i^K 分别为 K 的直径、最大内切圆直径和夹角• 记 V_h 为问题(2.3) 的有限元空间, 则相应的有限元法为求解 $u_h \in V_h$ 使得

$$\sum_{K \in \mathscr{K}_h} \int_K \left(\frac{\partial u_h}{\partial r}\frac{\partial v_h}{\partial r} + \frac{\partial u_h}{\partial z}\frac{\partial v_h}{\partial z} \right) r\,dr\,dz$$

$$= \sum_{K \in \mathscr{K}_h} \int_K f v_h r\,dr\,dz, \qquad \forall\ v_h \in V_h \tag{2.5}$$

考虑四边形等参元, 假定 $A_i = A_i(r_i, z_i)$, $1 \leqslant i \leqslant 4$ 为 K 的顶点, $\hat{A}_i$, $1 \leqslant i \leqslant 4$ 为参考元 $\hat{K} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ 的顶点, $\hat{A}_1 = (1, 1)$, $\hat{A}_2 = (-1, 1)$, $\hat{A}_3 = (-1, -1)$, $\hat{A}_4 = (1, -1)$• 定义双线性变换 $F_K \in Q_1(\hat{K})$ 如下:

$$r^K = r^K(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) r_i \tag{2.6}$$

$$z^K = z^K(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) z_i \tag{2.7}$$

其中

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta), \qquad (i = 1, \cdots, 4)$$

则 F_K 满足

$$F_K(\hat{A}_i) = A_i,\ 1 \leqslant i \leqslant 4,\ F_K(\hat{K}) = K$$

定义函数类 Φ 如下:

$$\Phi = \left\{ \varphi \in C^1_0([-1, 1]) \cap C^2([-1, 1]) \mid \varphi''(0) = 1, \right.$$

$$\left. \int_{-1}^1 \varphi(t)\,dt = 0 \right\} \cap \left\{ \varphi \,\middle|\, \int_{-1}^1 t\varphi(t)\,dt = 0 \right\} \tag{2.8}$$

在参考元 $\hat{K}$ 上, 单元函数为

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta)\hat{u}_i + \lambda_1\varphi_1(\xi) + \lambda_2\varphi_2(\eta) \tag{2.9}$$

其中 $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$• 在单元 K 上定义 $u = \hat{u} \cdot F_K^{-1}$• 显然(2.9) 式给出一族单元, 选取不同的 φ_1 和 φ_2 则可得到不同的单元函数, 他们本质上都属改进的 Wilson 元•

下面我们讨论上式给出单元的收敛性•

引理 2.1[2] 对任意 $\varphi \in \Phi$, 有 $\int_{-1}^1 \varphi'(t)\,dt = 0$, $\int_{-1}^1 t\varphi'(t)\,dt = 0$

记

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi, \eta)\hat{u}_i \tag{2.10}$$

$$\hat{u}' = \lambda_1\varphi_1(\xi) + \lambda_2\varphi_2(\eta) \tag{2.11}$$

其中 $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$• 有下述定理

定理 2.1 对于 $u = u + u'$, 其中 $u = \bar{\hat{u}} \cdot F_K^{-1}$, $u' = \hat{u}' \cdot F_K^{-1}$, 则有

$$\int_K \frac{\partial u'}{\partial r} r\,dr\,dz = \int_K \frac{\partial u'}{\partial z} r\,dr\,dz = 0 \tag{2.12}$$

或等价形式

$$\int_{\partial K} u' N_r r\,dl = \int_{\partial K} u' N_z r\,dl = 0 \tag{2.13}$$

证明　由于 u' 是由 $\varphi_1 = \varphi_1 \cdot F_K^{-1}$, $\varphi_2 = \varphi_2 \cdot F_K^{-1}$ 张成的, 所以只要证

$$\int_K \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} r\,dr\,dz = \int_K \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} r\,dr\,dz = 0, \qquad (i = 1, 2) \tag{2.14}$$

通过计算得

$$\begin{aligned}
\int_K \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} r\,dr\,dz &= \int_{\hat{K}} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial r} \right) |J|\, r\,d\xi\,d\eta \\
&= \int_{\hat{K}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial r} |J|\, r\,d\xi\,d\eta \\
&= \int_{\hat{K}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta} r\,d\xi\,d\eta \\
&= \frac{1}{4}\int_{\hat{K}} \varphi'(\xi)[(1+\xi)z_1 + (1-\xi)z_2 - (1-\xi)z_3 - (1+\xi)z_4] \\
&\quad \cdot \sum_{i=1}^{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta) r_i\,d\xi\,d\eta \\
&\triangleq \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \varphi'(\xi)[\alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\xi\eta + \alpha_4\xi^2 + \alpha_5\eta^2]\,d\xi\,d\eta
\end{aligned} \tag{2.15}$$

注意到

$$\int_{-1}^{1} \xi^2 \varphi_1'(\xi)\,d\xi = \xi^2\varphi_1(\xi)\Big|_{-1}^{1} - 2\int_{-1}^{1} \xi\varphi_1(\xi)\,d\xi = 0 \tag{2.16}$$

再由引理 2.1 易见(2.15)式为零, 即

$$\int_K \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} r\,dr\,dz = 0$$

同理可证

$$\int_K \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} r\,dr\,dz = \int_K \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} r\,dr\,dz = \int_K \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} r\,dr\,dz = 0 \tag{2.17}$$

定理得证•

定理 2.1 说明由式(2.9)给出的轴对称非协调元通过分片检验• 众所周知, 即使对于平面问题分片检验也非严格意义下的非协调元收敛性条件[7]• 因此, 还需用更严格的收敛理论验证上述轴对称非协调元的收敛性• 为此, 给出文[3]的有关结论如下:

定义 2.1 $x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n}$ 称为 $x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ 的严格高次项, 如果 $\beta_i \geqslant \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$ 且存在 $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ 使得 $\beta_{i_0} > \alpha_{i_0}$•

定义 2.2 设 $P = P(x_1, \cdots, x_n)$ 为 R^n 中有限次多项式, $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ 为 P 中某一项, 如果 P 中无它的严格高次项, 则称 $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ 为 P 的有效最高次项•

定理 2.2 (强分片检验)[3] 设轴对称问题非协调函数在参考元 $\hat{K}$ 上具有形式

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^{m} N_i(\xi, \eta) \hat{u}_i + \lambda_1 \hat{M}_1(\xi, \eta) + \lambda_2 \hat{M}_2(\xi, \eta) \tag{2.18}$$

且通过分片检验, 即

$$\int_{\partial K} M_i N_r r dl = \int_{\partial K} M_i N_z r dl = 0, \qquad (i = 1, 2) \tag{2.19}$$

又 $M_i = \hat{M}_i \cdot F_K^{-1}$ 中分别存在有效最高次项 $\xi^{s_i}\eta^{t_i}$, $i = 1, 2$ 使得

$$\frac{\partial^{s_1+t_1}\hat{u}_c}{\partial\xi^{s_1}\partial\eta^{t_1}} = \frac{\partial^{s_2+t_2}\hat{u}_c}{\partial\xi^{s_2}\partial\eta^{t_2}} = \frac{\partial^{s_2+t_2}M_1}{\partial\xi^{s_2}\partial\eta^{t_2}} = \frac{\partial^{s_1+t_1}M_2}{\partial\xi^{s_1}\partial\eta^{t_1}} = 0 \tag{2.20}$$

则此单元收敛•

若限定 Φ 的元素为多项式, 又 $\varphi_1(\xi)$ 和 $\varphi_2(\eta)$ 的有效最高次项 ξ^p 和 η^q 均满足 $p, q \geqslant 2$, 则由定理 2.2 易验证单元收敛•

§3. 集合 Φ的结构

在实际应用中, 集合 Φ 多选取为多项式函数类• 有下述定理•

定理 3.1 记 P 为多项式集合, 对任意 $v \in \Phi \cap P$, 均可表示为

$$v = \sum_{i=1}^{M} a_i(t^{2i} - 1) + t\sum_{i=1}^{N} b_i(t^{2i} - 1) \tag{3.1}$$

其中 M, N 为正整数, 则 $a_i, b_j, i = 1, \cdots, M, j = 1, \cdots, N$ 满足

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad \sum_{i=2}^{M} \frac{ia_i}{2i+1} = -\frac{1}{6} \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^{N} b_i\left(\frac{1}{2i+3} - \frac{1}{3}\right) = 0 \tag{3.3}$$

证明 记

$$\Phi_1 = \left\{\varphi \in C_0^1([-1, 1]) \cap C^2([-1, 1]) \,\middle|\, \varphi''(0) = 1, \int_{-1}^{1} \varphi(t)\,dt = 0\right\} \tag{3.4}$$

$$\Phi_2 = \left\{\varphi \in C^2([-1, 1]) \,\middle|\, \int_{-1}^{1} t\varphi(t)\,dt = 0\right\} \tag{3.5}$$

由文[2]定理 4.1, 当 $v \in \Phi_1$ 时有

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad \sum_{i=2}^{M} \frac{ia_i}{2i+1} = -\frac{1}{6} \tag{3.6}$$

另一方面, 当 $v \in \Phi_2$ 时, 有 $\int_{-1}^{1} tv\,dt = 0$, 于是有

$$\int_{-1}^{1} t^2 \sum_{i=1}^{N} b_i(t^{2i} - 1)\,dt = 0 \tag{3.7}$$

经过计算得

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2i+3} - \frac{1}{3}\right) b_i = 0 \tag{3.8}$$

注意到 $\Phi = \Phi_1 \cap \Phi_2$, 于是(3.2)和(3.3)式同时成立• 定理得证•

例　按定理 2.2 要求 $\varphi_1(\xi)$ 和 $\varphi_2(\eta)$ 可选取为下述函数

$$\begin{cases} \varphi_1(\xi) = \dfrac{1}{2}(\xi^2 - 1) - \dfrac{5}{12}(\xi^4 - 1) \\ \varphi_2(\eta) = \dfrac{1}{2}(\eta^2 - 1) - \dfrac{5}{12}(\eta^4 - 1) \end{cases} \quad \text{调函} \tag{3.9}$$

或

$$\begin{cases} \varphi_1(\xi) = \dfrac{1}{2}(\xi^2 - 1) - \dfrac{7}{18}(\xi^6 - 1) \\ \varphi_2(\eta) = \dfrac{1}{2}(\eta^2 - 1) - \dfrac{7}{18}(\eta^6 - 1) \end{cases} \tag{3.10}$$

等•

参 考 文 献

1 高岩、陈万吉, 精化直接刚度法的不协调位移模式与收敛性分析, 力学学报, **27**(增刊) (1995), 135—142•

2 石东洋、陈绍春, 一类改进的 Wilson 任意四边形单元, 高等学校计算数学学报, **9**(2) (1994), 161—167.

3 高岩、陈万吉, 轴对称非协调元收敛理论与方法, 中国科学(A 辑), **27**(3) (1997), 262—269•

4 P. Lesaint and M. Zlamal, Convergence of the nonconforming Wilson element for arbitrary quadrilateral meshes, *Numer. Math.*, **36**(1) (1980), 33—52•

5 李镛、吴长春, 一个四边形非协调新模式及其收敛性研究, 应用数学和力学, **7**(7) (1986), 647—654•

6 高岩, 轴对称平面空间非协调元收敛理论与精化非协调元, 大连理工大学工程力学系博士论文 (1996)•

7 F. Stummel, The limitation of patch test, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **15** (1980), 177—188•

A Class of Wilson Arbitrary Quadrilateral Elements for an Axisymmetric Problem

Gao Yan

(Department of Applied Mathematics, Dalian Universtiy of Technology, Dalian 116024;
Department of Mathematics and Physics, Yanshan University,
Qinhuangdao 066004, P. R. China)

Abstract

A class of modified Wilson arbitrary quadrilateral nonconforming elements for an axisymmetric problem is proposed. Their convergence is proven by means of the strong patch test. The structure of this finite element class is investigated. Thus a general method of axisymmetric nonconforming elements with convergence properties is presented.

Key words　finite element, nonconforming element, axisymmetric, convergence