

# 弹塑性损伤问题的自洽分析方法<sup>\*</sup>

黄模佳<sup>①</sup> 扶名福<sup>①</sup> H·布弗勒<sup>②</sup>

(赵兴华推荐; 1997 年 9 月 22 日收到)

## 摘 要

基于不可逆热力学理论和内变量理论, 提出平均意义下的 Clausius\_Duhem 不等式方程。与以往弹塑性空洞损伤研究不同, 本文旨在利用自洽分析法建立起既考虑空洞形状影响又考虑空洞之间相互作用的场方程, 并使之能够处理空洞体积比较大的弹塑性损伤问题。

**关键词** 弹塑性损伤 自洽分析 热力学定理 夹杂

**中图分类号** O344

## § 1. 引 言

在文献[1]中, 我们建立了构元含椭球空洞(夹杂)的弹塑性宏观本构方程。本文作为文献[1]的续篇, 将对当时未涉及到的空洞成长和演化规律进行研究。

将热力学不可逆定理和内变量理论用于材料损伤(特别是脆性材料损伤)的分析研究已经取得一定的成就。Lemaitre<sup>[2]</sup>、Chaboche<sup>[3,4]</sup>、Simo 和 Ju<sup>[5,6]</sup>用该理论对弹塑性损伤问题进行过讨论, Ju<sup>[7]</sup>、Rousselier<sup>[8]</sup>建立了有限变形条件下含空洞塑性材料的本构关系。他们研究的不足之处是: (1) 没有考虑空洞形状对本构关系的影响; (2) 损伤作为一个物理量, 几何意义不够明确; (3) 研究范围仅适应于空洞体积比较小的情况。

本文利用自洽方法和热力学不可逆定理成功地考虑以下损伤力学问题:

(a) 构元体积平均意义下的能量守恒方程和热力学第二定理, 它是用自洽分析法对构元进行弹塑性损伤研究基础性的工作;

(b) 根据构元平均 Clausius\_Duhem 不等式对损伤材料的力学行为进行描述;

(c) 自洽方法与连续介质损伤力学的结合, 这将使得我们的工作具有更广泛的适应性, 即使空洞在构元中占有较大的体积;

(d) 在场方程中考虑了空洞形状的影响。

## § 2. 体积平均意义下的热力学定理

考虑任一由基体和空洞组成的构元。该构元基体体积为  $V_m$ 、空洞体积为  $V_l$ 、总体积为

\* 国家自然科学基金(19762002)和江西省自然科学基金资助项目

① 南昌大学(南区)工程力学研究所, 南昌 330029

② 德国斯图加特大学, D\_70550

$V$  ( $V = V_m + V_l$ )。根据能量守恒原理, 构元的动能  $K$  和内能  $\mathfrak{E}$  的特质时间导数等于单位时间内该构元外力机械功  $\Gamma$  和热输入  $\Theta$  之和

$$K \dot{\phantom{x}} + \mathfrak{E} \dot{\phantom{x}} = \Gamma + \Theta \quad (2.1)$$

上式为热力学第一定理。

构元单位时间的热获取量由通过构元基体表面  $S_m$  进入基体  $V_m$  的热量  $q$  和内热源  $r$  组成

$$\Theta = - \oint_{S_m} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{V_m} \varrho dV = - \int_{V_m} \operatorname{div} \mathbf{q} dV + \int_{V_m} \varrho r dV \quad (2.2)$$

这里散度定理被采用, 其中的  $\rho$  是基体局部质量密度,  $\mathbf{n}$  是基体的外法线单位向量,  $\mathbf{q}$  是热通量向量,  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$  是沿单位向量  $\mathbf{n}$  的指向流过垂直于  $\mathbf{n}$  的表面的每单位面积每单位时间的热量,  $r$  是单位时间内热源生成密度, 而空洞的质量显然为  $\rho = 0$ 。

根据基体质量守恒, 动能变化率和内能变化率如下

$$K \dot{\phantom{x}} = \frac{d}{dt} \int_{V_m} \frac{\rho}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV = \frac{1}{2} \int_{V_m} \rho \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) dV \quad (2.3)$$

$$\mathfrak{E} \dot{\phantom{x}} = \frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho u dV \quad (2.4)$$

其中的  $\mathbf{v}$  为速度矢量、 $u$  为单位质量的内能。外力功  $\Gamma$  由作用在构元基体表面力  $\mathbf{t}$  (每单元面积) 和基体体力  $\mathbf{b}$  (每单位质量) 产生, 即

$$\Gamma = \oint_{S_m} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS + \int_{V_m} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV \quad (2.5)$$

利用 Cauchy 定理, 得

$$\begin{aligned} \Gamma &= \oint_{S_m} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{V_m} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV = \int_{V_m} (\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v} dV + \int_{V_m} \mathbf{T} : \mathbf{D} dV \\ &= \int_{V_m} \rho \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right] dV + \int_{V_m} \mathbf{T} : \mathbf{D} dV \quad \text{②} \end{aligned} \quad (2.6)$$

其中  $\mathbf{T}$  表示构元局部应力场、 $\mathbf{D}$  表示构元局部应变场。这里散度定理和基体局部运动(平衡)方程已经采用。(2.2)、(2.3)、(2.4)和(2.6)代入(2.1)导致

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho u dV - \int_{V_m} \mathbf{T} : \mathbf{D} dV = - \int_{V_m} \operatorname{div} \mathbf{q} dV + \int_{V_m} \varrho r dV \quad (2.7)$$

上式为构元能量平衡方程。

由热力学第二定理, 有

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \eta dV \geq \int_{V_m} \frac{r \rho}{\theta} dV - \oint_{S_m} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{\theta} dS \quad (2.8)$$

构元熵增率不小于熵输入率, 这里  $\eta$  是构元基体局部熵密度,  $\theta$  是构元局部绝对温度。

对于纯力学问题, 仅需考虑等温情形, 认为  $\theta = \text{const}$ 。因此, 从(2.7)和(2.8)式, 推得

$$\theta \frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \eta dV \geq \frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho u dV - \int_{V_m} \mathbf{T} : \mathbf{D} dV \quad (2.9)$$

设局部自由能密度  $\phi$  为

$$\phi = u - \theta \eta \quad (2.10)$$

这时可将(2.9)式改写成

$$\int_{V_m} \mathbf{T} : \mathbf{D} dV - \frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \phi dV \geq 0 \quad (2.11)$$

上式为构元 Clausius\_Duhem 不等式

如果用  $T_m$  和  $D_m$  分别表示构元基体平均应力场和基体平均应变率场, 应该存在近似关系

$$\int_{V_m} \mathbf{T} : \mathbf{D} dV \approx V_m \mathbf{T}_m : \mathbf{D}_m$$

由于

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{V_m} \rho \psi dV \right]$$

表示构元总的自由能变化率(考虑到空洞中的  $\rho = 0$ ), 如果用

$$\varepsilon_m \left[ = \int_{V_m} \varepsilon dV \right] / V_m \quad \text{和} \quad \varepsilon \left[ = \int_V \varepsilon dV \right] / V \quad \text{的处}$$

分别表示构元单位基体体积的平均自由能和构元单位体积的平均自由能, 则构元单位体积的平均自由能变化率  $\dot{\varepsilon}$  为

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{V} \int_V \varepsilon dV \right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{V_m}{V} \frac{1}{V_m} \int_{V_m} \varepsilon dV \right] = \frac{d}{dt} [(1 - \phi) \varepsilon_m] \quad (2.12)$$

其中的  $\varepsilon$  为单位体积局部自由能、 $\phi = V_I / V$  为损伤因子(空洞体积比), 而整个构元自由能变化率

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{V_m} \rho \psi dV \right]$$

应等于  $V d[(1 - \phi) \varepsilon_m] / dt$ . 这样, 方程(2.11) 能写成

$$(1 - \phi) \mathbf{T}_m : \mathbf{D}_m - d[(1 - \phi) \varepsilon_m] / dt \geq 0 \quad (2.13)$$

上式为构元体积平均意义下的 Clausius\_Duhem 不等式

对于等向硬化 von Mises 弹塑性损伤材料, 我们容易推导出

$$\varepsilon_m = \varepsilon_m(\mathbf{E}_m^e, p) = \varepsilon_m^e(\mathbf{E}_m^e) + \varepsilon_m^p(p) \quad (2.14)$$

$$\varepsilon_m^e(\mathbf{E}_m^e) = \frac{1}{2} \mathbf{E}_m^e : \mathbf{C}_0 : \mathbf{E}_m^e, \quad \varepsilon_m^p(p) = R_0 p + \frac{1}{2} H' p^2 \quad (2.15)$$

其中的  $H' = E_T E_0 / (E_0 - E_T)$  是基体等效力 / 塑性应变曲线斜率,  $\mathbf{C}_0$  是构元弹性刚度张量,  $E_0$  是基体弹性模量,  $E_T$  是基体等效力 / 应变曲线斜率,  $R_0$  是基体初始屈服半径(应力),  $p$  是基体累积塑性应变,  $\dot{p} = (2 \mathbf{D}_m^p : \mathbf{D}_m^p / 3)^{1/2}$ ,  $\mathbf{D}_m^p$  是基体平均塑性应变率场,  $\mathbf{E}_m^e$  是构元基体平均弹性应变场,  $\varepsilon_m^e$  是每单位基体体积存贮的平均弹性变形能,  $\varepsilon_m^p$  是每单位基体体积平均耗散能,  $\varepsilon_m^p$  由两部分组成: (1) 单位基体体积硬化过程的平均耗散能  $H' p^2 / 2$ , (2) 单位基体体积平均热耗散能  $R_0 p$ .

考虑关系  $\mathbf{T} = (1 - \phi) \mathbf{T}_m$  和  $\mathbf{D}_m = \mathbf{D}_m^e + \mathbf{D}_m^p$  (这里  $\mathbf{D}_m^e$  是构元基体平均弹性应变率场), 代(2.14) 和(2.15) 进入(2.13) 有

$$\mathbf{T} = (1 - \phi) \partial \varepsilon_m^e / \partial \mathbf{E}_m^e = (1 - \phi) \mathbf{C}_0 : \mathbf{E}_m^e \quad (2.16)$$

和构元平均耗散不等式

$$- Y \dot{\phi} + \mathbf{T} : \mathbf{D}_m^p - (1 - \phi) (\partial \varepsilon_m^p / \partial p) \dot{p} \geq 0 \quad (2.17)$$

其中的  $\mathbf{T}$  为构元体积平均应力场, 而

$$- Y = \varepsilon_m^e + \varepsilon_m^p \quad (2.18)$$

显然是相应于损伤因子的能量释放率(或空洞扩展驱动力), 其结果与文献[7]的 3.1.1 结论相一致. 这也表明 Lemaitre<sup>[2]</sup> 和 Chaboche<sup>[3,4]</sup> 在耦合弹塑性损伤研究中仅考虑弹性变形能对空

洞扩展的贡献是不够完善的。

如果认为硬化与损伤不发生耦合, 满足(2.17)式则需满足

$$\mathbf{T} : \mathbf{D}_m^p - (1 - \phi)(\partial \mathbf{E}_m^p / \partial p) \dot{p} \geq 0, \quad -Y \dot{\phi} \geq 0 \quad (2.19)$$

当  $-Y > 0$  时, 存在  $\dot{\phi} > 0$ 。

### § 3. 耦合弹性损伤本构方程

对于脆性损伤问题, 因为  $p = \dot{p} = 0$ ,  $-Y$  作为空洞(裂纹)扩展驱动力, 可表示成

$$-Y = \mathbf{E}_m^e = \frac{1}{2} \mathbf{E}_m^e : \mathbf{C}_0 : \mathbf{E}_m^e = \frac{1}{2E_0} \left[ (1 + \mu_0) \mathbf{T}_m' : \mathbf{T}_m' + \frac{1 - 2\mu_0}{3} (\text{tr} \mathbf{T}_m)^2 \right] \quad (3.1)$$

其中的  $\mathbf{T}_m' = \mathbf{T}_m - (\text{tr} \mathbf{T}_m) / 3$  为构元基体平均应力偏量场,  $\mu_0$  为基体泊松系数。

破坏准则  $-Y = Y^c$  为弹性变形能判别准则。 $Y^c$  作为空洞扩展门槛值, 能通过(3.1)式和简单拉伸试验确定如下

$$Y^c = \sigma_R^2 / 2E_0 (1 - \phi)^2, \quad \phi^c = 1 - \sigma_R / (2E_0 Y^c)^{1/2} \quad (3.2)$$

其中  $\sigma_R$  是一维破坏应力,  $\phi^c$  是  $\phi$  的临界值。

文献[1]的(53)式为  $\mathbf{T} = \mathbf{C}^* : \mathbf{E}$ , 它对时间的导数给出

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{C}^* : \mathbf{D} + \mathbf{G}^* : \mathbf{E} = \mathbf{C}^* : \mathbf{D} + \dot{\phi} \mathbf{C}_0 : \Sigma : \mathbf{E} \quad (3.3)$$

其中

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}_0 : \left\{ \mathbf{I} + \phi [-\mathbf{I} + (1 - \phi) \mathbf{S}] \mathbf{J}^{-1} \right. \quad (3.4)$$

$$\left. \Sigma = [-\mathbf{I} + (1 - \phi) \mathbf{S}] \mathbf{J}^{-1} + \phi [-\mathbf{I} + (1 - \phi) \mathbf{S}] \mathbf{J}^{-1} : \mathbf{S} : [-\mathbf{I} + (1 - \phi) \mathbf{S}] \mathbf{J}^{-1} \right. \quad (3.5)$$

而  $\mathbf{S}$  是 Eshelby 张量,  $\mathbf{I}$  是四阶单位张量,  $\mathbf{D}$  是构元平均应变率场,  $\mathbf{E}$  是构元平均应变场。

下面分两种情形来研究损伤因子的演化规律:

(1) 假如在裂纹扩展期间  $\dot{V}_m = 0$ ; 即: 一旦条件  $-Y = Y^c$  和  $\dot{\phi} > 0$  满足, 忽略基体材料体积变化。这时, 我们有

$$\dot{\phi} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{V - V_m}{V} \right] = (1 - \phi) \frac{\dot{V}_m}{V} = (1 - \phi) \mathbf{I}_2 : \mathbf{D} \quad (3.6)$$

其中  $\mathbf{I}_2$  表示二阶单位张量, 代(3.6)进入(3.3), 得耦合弹性损伤本构方程如下

$$\text{平均} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{T}} = \mathbf{C}^* : \mathbf{D}, & \text{当 } -Y < Y^c \text{ 或 } \dot{\phi} \leq 0 \\ \dot{\mathbf{T}} = [\mathbf{C}^* + (1 - \phi) \mathbf{C}_0 : \Sigma : \mathbf{E} + \mathbf{I}_2] : \mathbf{D}, & \text{当 } -Y = Y^c \text{ 且 } \dot{\phi} > 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

(2) 一般来讲, 基体材料为可压缩材料, 损伤因子演化来源于已有空洞的萌生、成长和聚合, 在许多情况下, 方程(3.6)与实际变形不一致, 因此, 我们定义

$$\mathcal{R} = \mathbf{E}_m^e / Y^c - Y / Y^c, \quad \mathcal{A} = Y^c / Y^c \quad (3.8)$$

其中的下标  $t$  表示该量当前值,  $Y^c$  表示初始空洞扩展驱动力门槛值,  $Y^c$  表示  $t$  时刻空洞扩展驱动力门槛值,  $-Y$  由(3.1)式给出。材料状态由损伤准则  $\Lambda(\mathcal{R}, \mathcal{A}) \leq 0$  刻划, 即

$$\Lambda(\mathcal{R}, \mathcal{A}) = \mathcal{R} - \mathcal{A} \leq 0 \quad (3.9)$$

而  $\mathcal{A}$  由下式确定

$$\mathcal{A} = \max \left\{ 1, [\max(\mathcal{A}, \tau \in (-\infty, t))] \right\} \quad (3.10)$$

根据文献[2], 损伤因子的演化率可由耗散势  $\Phi_d^*$  描述。如果我们取  $\Phi_d^*$  为  $Y$  的指数函数

$$\Phi_d^* = \frac{\Delta}{\beta + 1} \left[ \frac{-Y}{\Delta} \right]^{\beta + 1} (1 - \phi)^{-1} \quad (3.11)$$

实际损伤演化规律(至少是它的主特征)可由上式描述, 其中的  $\Delta$  和  $\beta$  是二个能用简单拉伸试

验确定的材料常数 • 对于不依赖于时间的弹性损伤问题,  $\Phi_d^*$  为凸函数 • 遵循正交性法则, 我们有

$$\dot{\phi} = - \lambda \frac{\partial \Phi_d^*}{\partial Y} = \frac{\lambda}{1 - \phi} \left[ - \frac{Y}{\Delta} \right]^\beta \quad (3.12)$$

仿照文献[7]的(16)式, 我们取

$$\lambda = \mathcal{A} \quad (3.13)$$

相应的 Kuhu\_Tucker 关系是

$$\lambda \geq 0, \quad \Lambda(\mathcal{R}, \mathcal{A}') \leq 0, \quad \lambda \Lambda(\mathcal{R}, \mathcal{A}') = 0 \quad (3.14)$$

同弹塑性材料的屈服条件一样, 方程(3.14)涉及单向作用限制: 如果  $\Lambda(\mathcal{R}, \mathcal{A}') \leq 0$ , 临界点没有达到  $\dot{\phi} = \lambda = 0$ , 空洞无进一步扩展; 在另一方面, 如果  $\lambda > 0$ , 空洞扩展, 条件  $\Lambda(\mathcal{R}, \mathcal{A}') = 0$  (或者  $-Y = Y^c$ ) 满足 • 因此,  $\lambda$  能由损伤一致性条件给出<sup>[7]</sup>

$$\Lambda(\mathcal{R}, \mathcal{A}') = \Lambda(\mathcal{R}, \mathcal{A}') = 0 \quad (3.15)$$

通过(3.1)、(3.8)和(3.15), 求得

$$\lambda = \dot{\mathcal{R}} = \frac{1}{Y_0^c} \mathbf{T}_m : \mathbf{D}_m^e \quad (3.16)$$

代(3.16)进入(3.12)得损伤演化方程如下

$$\dot{\phi} = Z \mathbf{T}_m : \mathbf{D}_m^e, \quad Z = \frac{1}{Y_0^c (1 - \phi)} \left[ - \frac{Y}{\Delta} \right]^\beta C \quad (3.17)$$

利用文献[1]中的(18)、(19)和(25), 考虑纯弹性问题有  $\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_m^e$ , 推得

$$\mathbf{E} = (\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1} : (\mathbf{I} - \mathbf{S} + \phi \mathbf{S}) : \mathbf{E}_m^e \quad (3.18)$$

上式的时间导数给出

$$\mathbf{D} = (\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1} : (\mathbf{I} - \mathbf{S} + \phi \mathbf{S}) : \mathbf{D}_m^e + \dot{\phi} (\mathbf{I} + \mathbf{S})^{-1} : \mathbf{S} : \mathbf{E}_m^e \quad (3.19)$$

结合(3.17)和(3.19)式, 得构元平均应变率场和构元基体平均弹性应变率场之间的关系

$$\mathbf{D} = \mathbf{M} : \mathbf{D}_m^e \quad (3.20)$$

其中

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1} : (\mathbf{I} - \mathbf{S} + \phi \mathbf{S}) + Z (\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1} : \mathbf{S} : \mathbf{E}_m^e \neq \mathbf{T}_m \quad (3.21)$$

代(3.20)进入(3.17)有  $\dot{\phi} = Z \mathbf{T}_m : \mathbf{M}^{-1} : \mathbf{D}$  • 再利用(3.3), 最终获得构元宏观弹性损伤本构方程

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{T}} = \mathbf{C}^* : \mathbf{D}, & \text{当 } \mathcal{R} < \mathcal{A}' \text{ 或 } \mathcal{A}' \leq 0 \\ \dot{\mathbf{T}} = [\mathbf{C}^* + Z \mathbf{C}_0 : \bar{\Sigma} : \mathbf{E} \neq \mathbf{T}_m : \mathbf{M}^{-1}] : \mathbf{D}, & \text{当 } \mathcal{R} < \mathcal{A}' \text{ 或 } \mathcal{A}' > 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

### § 4. 耦合弹塑性损伤本构方程

根据(2.19), 考虑 von Mises 塑性势建立过程, 可把耗散势  $\Phi^*$  取为塑性势  $f(\mathbf{T}_m, R)$  和损伤耗散势  $\Phi_d^*(Y, \phi)$  两部分之和, 即

$$\Phi^* = f(\mathbf{T}_m, R) + \Phi_d^*(Y, \phi) \quad (4.1)$$

其中

$$f(\mathbf{T}_m, R) = \sigma_{eq} - R, \quad \sigma_{eq} = \left[ \frac{3}{2} \mathbf{T}_m' : \mathbf{T}_m' \right]^{1/2}, \quad R = \frac{\partial \mathcal{G}_n}{\partial p} = R_0 + H' p \quad (4.2)$$

这里  $\sigma_{eq}$  是基体等效应力,  $R$  是基体当前屈服应力(半径),  $\Phi_d^*(Y, \phi)$  可取(3.11)一样的形式, 但其中的  $-Y$  值由(2.18)和(2.15)确定 •

遵循正交法则, 有

$$D_m^p = \lambda \Phi^* / \partial T_m = \lambda f / \partial T_m \quad (4.3)$$

$$\dot{p} = - \lambda \Phi^* / \partial R = \lambda \quad (4.4)$$

$$\dot{\phi} = \lambda \frac{\partial \Phi^*}{\partial Y} = \frac{\lambda}{1 - \phi} \left( - \frac{Y}{\Delta} \right)^\beta \quad (4.5)$$

由于基体材料服从 von Mises 屈服准则, 基体材料的屈服准则和一致性条件为

$$f(T_m, R) = 0, f_{\lambda}(T_m, R) = 0 \quad (4.6)$$

从一致性条件和(4.4), 推得

$$\lambda = \dot{p} = \frac{1}{H'} \frac{\partial f}{\partial T_m} : \dot{T}_m \quad (4.7)$$

代(4.7)进入(4.3)和(4.5), 获得构元基体平均塑性应变率场

$$D_m^p = \frac{1}{3H'} \left( \frac{\partial f}{\partial T_m} + \frac{\partial f}{\partial T_m} \right) : \dot{T}_m \quad (4.8)$$

和损伤演化方程

$$\dot{\phi} = \omega \frac{\partial f}{\partial T_m} : \dot{T}_m \quad (4.9)$$

其中

$$\omega = \frac{1}{H' (1 - \phi)} \left( - \frac{Y}{\Delta} \right)^\beta \quad (4.10)$$

利用关系  $T = (1 - \phi) T_m$ , 推得

$$\dot{T} = - \dot{\phi} T_m + (1 - \phi) \dot{T}_m \quad (4.11)$$

由文献[1]的(34)、(35)和(25), 我们求得

$$E = (I + \phi K) : E^e + E_m^p \quad (4.12)$$

其中

$$K = \frac{1}{1 - \phi} (I - S)^{-1} \quad (4.13)$$

方程(4.12)的时间导数给出

$$D = (I + \phi K) : D^e + D_m^p + \frac{\dot{\phi}}{1 - \phi} K : E^e \quad (4.14)$$

通过文献[1]的(38)和(50), 我们获得

$$\dot{T} = C_0 : D^e \quad (4.15)$$

结合方程(4.9)和(4.11), 找出构元平均应力率场和构元基体平均应力率场的关系

$$\dot{T} = \Omega : \dot{T}_m, \quad \Omega = - \omega T_m + (\partial f / \partial T_m) + (1 - \phi) I \quad (4.16)$$

代(4.8)、(4.9)和(4.15)进入(4.14), 利用(4.16)关系式, 最终得到耦合弹塑性损伤本构方程

$$D = M_T^* : \dot{T} \quad (4.17)$$

这里  $M_T^*$  是构元有效切线柔度张量, 它能表示成

$$M_T^* = (I + \phi K) : C_0^{-1} + \frac{1}{H'} \left[ (\partial f / \partial T_m) + (\partial f / \partial T_m) \right] : \Omega_1^{-1} + \Omega_2 \quad (4.18)$$

其中

$$\begin{cases} \Omega_1 = \Omega, \quad \Omega_2 = \frac{\omega}{1 - \phi} K : E^e + (\partial f / \partial T_m) : \Omega^{-1}, & \text{当 } -Y = Y^c \text{ 且 } \dot{\phi} > 0 \\ \Omega_1 = (1 - \phi) I, \quad \Omega_2 = \mathbf{0}, & \text{当 } -Y < Y^c \text{ 或 } \dot{\phi} \leq 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

如果基体材料在空洞成长期间满足不可压缩条件, 即  $\dot{\phi}(1-\phi) \gg V = (1-\phi)I_2: D$ , 利用(4.11) 得到

$$\dot{T}_m = \frac{\dot{T}}{1-\phi} + T_m \neq I_2: D \tag{4.20}$$

再通过(4.14)、(4.15)、(4.8)、(3.6) 和(4.20) 获得不可压缩基体材料的有效切线柔度张量  $M_T^*$

$$M_T^* = \Omega_3^{-1} : \left[ (I + \phi K) : C_0^{-1} + \frac{1}{H'(1-\phi)} \left( \frac{\partial f}{\partial T_m} \neq \frac{\partial f}{\partial T_m} \right) \right] \tag{4.21}$$

其中

$$\Omega_3 = \begin{cases} I - \frac{1}{H'} \left( \frac{\partial f}{\partial T_m} \neq \frac{\partial f}{\partial T_m} : T_m \neq I_2 - K : E^e \neq I_2, \right. & \text{当 } -Y = Y^c \text{ 且 } \dot{\phi} > 0 \\ I, & \text{当 } -Y < Y^c \text{ 或 } \dot{\phi} \leq 0 \end{cases} \tag{4.22}$$

### § 5. 简例和结论

首先看损伤因子大小对构元宏观弹性本构的影响的一个例子。对于弹性问题, 设构元处于静水压状态

$$T_{11} = T_{22} = T_{33}, T_{12} = T_{23} = T_{31} = 0 \tag{5.1}$$

构元含球形空洞, 基体弹性模量为  $E_0 = 10^{10}$ , 基体泊松比为  $\mu_0 = 1/3$ 。图 1 给出了由方程(3.7) 的计算结果: 随着损伤因子的增加, 构元宏观刚度减少。一旦达到某一变形量, 不稳定现象发生  $T_{11}D_{11} < 0$ 。空洞的成长导致构元的软化。

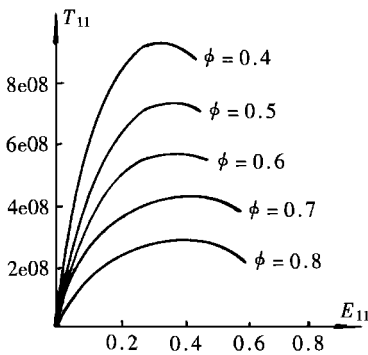


图 1 弹性损伤静水压问题应力应变曲线

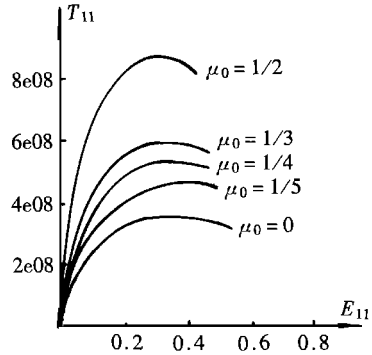


图 2 弹性损伤静水压问题应力应变曲线

再看由公式(3.7) 计算得出的泊松系数对损伤材料宏观性质的影响(图 2)。这里我们假设构元应力状态由(5.1) 给出, 损伤因子取  $\phi = 0.6$ , 基体弹性模量为  $E_0 = 10^{10}$ 。正如所预料的, 对于静水压问题, 基体的泊松系数越大, 构元的刚度越高。

本文利用自洽方法和热力学理论研究了弹塑性损伤耦合问题, 所得结果不仅能处理大空洞体积比问题, 而且具有比较明显的几何意义。

## 参 考 文 献

- 1 Huang Mojia and H. Bufler, On a self-consistent method to the analyses of elasto-plastic materials with inclusions, *Z. Angew. Math. Mech.*, **76**(8) (1996), 427—437.
- 2 J. Lemaitre, Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **51**(1) (1985), 31—49.
- 3 J. L. Chaboche, Continuum damage mechanics: Part I — General concepts, *J. Appl. Mech.*, **55**(1) (1988), 59—64.
- 4 J. L. Chaboche, Continuum damage mechanics: Part II — Damage growth, crack initiation, and crack growth, *J. Appl. Mech.*, **55**(1) (1988), 65—72.
- 5 J. C. Simo and J. W. Ju, Stress and strain based continuum damage models—I, Formulation, *Internat. J. Solids Structures*, **23**(7) (1987), 821—840.
- 6 J. C. Simo and J. W. Ju, Stress and strain based continuum damage models—II, Computational aspects, *Internat. J. Solids Structures*, **23**(7) (1987), 841—869.
- 7 J. W. Ju, On energy based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects, *Internat. J. Solids Structures*, **25**(7) (1989), 803—837.
- 8 G. Rousselier, Finite deformation constitutive relations including ductile fracture damage, *Three-Dimensional Constitutive Relations and Ductile*, Edited by S. Nemat-Nasser, North-Holland Publishing Company (1981), 331—355.
- 9 J. Koplik and A. Needleman, Void growth and coalescence in porous plastic solid, *Internat. J. Solids Structures*, **24**(8) (1988), 835—853.

## A Self-Consistent Analysis for Coupled Elastoplastic Damage Problems

Huang Mojia      Fu Mingfu

(Institute of Engineering Mechanics, Nanchang University, Nanchang 330029, P. R. China)

H. Bufler

(Institute for Mechanics (Civil Engineering), Stuttgart University,  
Federal Republic of Germany, D\_70550)

### Abstract

Based on irreversible thermodynamics and internal state variable theory, the volume-averaged Clausius-Duhem inequality is presented. In contrast to former investigations on damage-elastoplasticity, our evaluations are founded on the volume-averaged field equations of the analyzed elements and the self-consistent method. Hence, our results not only include the influence of void shapes but also consider the interaction among voids. Further, previous work about coupled elastoplastic damage problems only takes into account small initial void volume fractions. Our work, however, will be able to deal with elastoplastic damage problems with larger initial void volume fractions.

**Key words** elastoplastic damage, self-consistent method, law of thermodynamics, inclusions